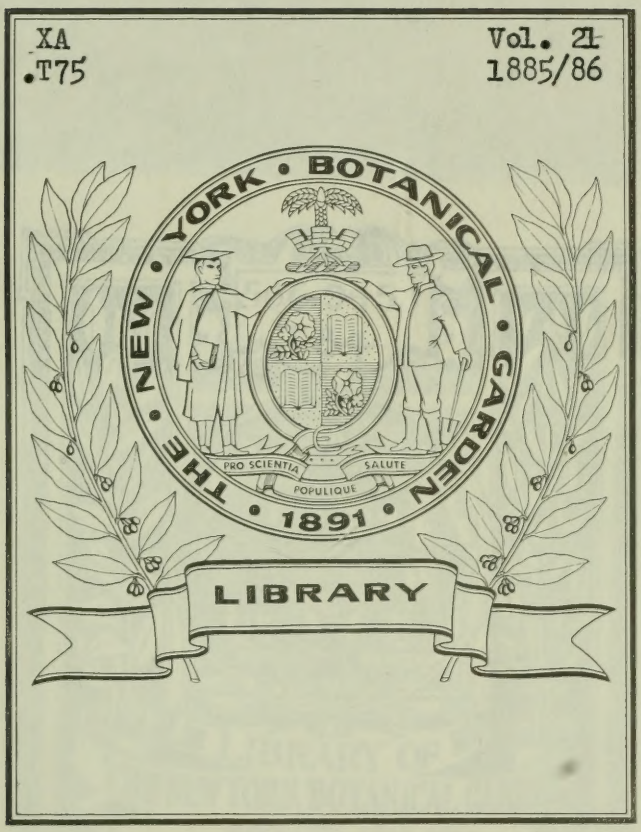
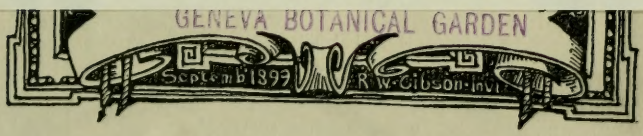
XA
.T75

Vol. 21
1885/86



GENEVA BOTANICAL GARDEN



ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI

DELLE DUE CLASSI

VOLUME VIGESIMOPRIMO

1885-86

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

LIBRARY
NEW YORK
BOTANICAL
GARDEN

TORINO
ERMANNO LOESCHER
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1885

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE
ECONOMATO
TORINO

XA
.T75
Vol. 21
1885/86

PROPRIETÀ LETTERARIA

STAMPERIA REALE
della Ditta G. B. PARAVIA e Comp.
di I. VIGLIARDI.

ACCADEMIA DELLE SCIENZE
ECONOMATO
TORINO

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXI, DISP. 1ª (*Novembre-Dicembre* **1885**)

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

UNIVERSITY OF CALIFORNIA

ELENCO DEGLI ACCADEMICI

RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI, STRANIERI E CORRISPONDENTI

al 1° Gennaio 1886

LIBRARY
NEW YORK
BOTANICAL
GARDEN

PRESIDENTE

Genocchi (Angelo), Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei, Comm. ✻, Uffiz. ⊜; ⊕.

VICE-PRESIDENTE

Fabretti (Ariodante), Professore di Archeologia greco-romana nella Regia Università, Direttore del Museo di Antichità, Socio corrispondente dell' Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei, Membro corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia di Archeologia, Letteratura e Belle Arti di Napoli, della R. Accademia della Crusca, dell'Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti, e dell'Imp. Istituto Archeologico Germanico, Professore Onorario dell'Università di Perugia, Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Uffiz. ✻, Comm. ⊜; ⊕, Cav. della Leg. d'O. di Francia, e C. O. R. del Brasile.

TESORIERE

Manno (Barone D. Antonio), Membro e Segretario della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Uffiz. ✻, e Comm. ⊜.

AUG 7 - 1923 Library N.Y. Botanical Garden

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Cossa (Alfonso), Dottore in Medicina, Professore di Chimica docimastica nella R. Scuola d'Applicazione degli Ingegneri in Torino, e di Chimica minerale presso il R. Museo Industriale Italiano, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, dell'Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali di Napoli, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino e dell'Accademia Gioenia di Catania, Comm. ✻, ⊜, e dell'O. d'I. Catt. di Sp.

Segretario Perpetuo

Sobrero (Ascanio), Dottore in Medicina ed in Chirurgia, Professore emerito di Chimica docimastica nella Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Torino, Membro del Collegio di Scienze fisiche e matematiche della Regia Università, Presidente della Reale Accademia di Agricoltura di Torino, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, dell'Ateneo di Venezia, dell'Ateneo di Brescia, della Società di Agricoltura, Storia naturale ed Arti utili di Lione, della Società di Farmacia di Parigi, Socio onorario della Società degl'Ingegneri ed Industriali di Torino, ecc., Comm. ✻; ✠, Uffiz. ⊜.

Accademici residenti.

Sobrero (Ascanio), *predetto.*

Genocchi (Angelo), *predetto.*

Lessona (Michele), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore e Direttore de' Musei di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Torino, Socio delle RR. Accademie di Agricoltura e di Medicina di Torino, Comm. ✻, e ⊕.

Dorna (Alessandro), Professore d'Astronomia nella R. Università e di Meccanica razionale nella R. Militare Accademia di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, Direttore del R. Osservatorio astronomico di Torino, ✻, Uffiz. ⊕.

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo *Cavour* di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze Naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro corrispondente della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova-York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, e della Reale Società delle Scienze Naturali delle Indie Neerlandesi, Socio straniero della *British Ornithological Union*, Socio straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, ⊕, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo).

Cossa (Alfonso), *predetto.*

Bruno (Giuseppe), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, e Professore di Geometria descrittiva nella R. Università di Torino, ✻.

Berruti (Giacinto), Direttore del R. Museo Industriale Italiano, e dell'Officina governativa delle Carte-Valori, Comm. ✻, ⊜, dell'O. di Francesco Gius. d'Austria, della L. d'O. di Francia, e della Repubblica di S. Marino.

Curioni (Giovanni), Professore di Costruzioni e Vice-Direttore della R. Scuola d'Applicazione degli Ingegneri, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Lucca, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Palermo, Comm. ✻, e Gr. Uffiz. ⊜.

Siacci (Francesco), Maggiore nell'Arma d'Artiglieria, Professore di Meccanica superiore nella R. Università di Torino, e di Matematiche applicate nella Scuola d'Applicazione delle Armi di Artiglieria e Genio, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, ✻, Uffiz. ⊜.

Bellardi (Luigi), Corrispondente estero della Società geologica di Londra e Socio di parecchi Istituti Scientifici nazionali ed esteri.

Basso (Giuseppe), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche e matematiche, Prof. di Fisica matematica nella R. Università di Torino, ⊜.

D'Ovidio (Dott. Enrico), Professore ordinario d'Algebra e Geometria analitica, incaricato di Geometria superiore, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze. Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio dell'Accademia Pontaniana, ecc., ✻, Comm. ⊜.

Bizzozero (Giulio). Professore e Direttore del Laboratorio di Patologia generale, e Rettore della R. Università di Torino. Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, delle RR. Accademie di Medicina e di Agricoltura di Torino. Socio corrispondente del Regio Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, ecc., ✻, ⊜.

Ferraris (Galileo), Ingegnere, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Professore di Fisica tecnica nel R. Museo Industriale Italiano, e di Fisica nella R. Scuola di Guerra, Uffiz. ✻; ⊖, Comm. dell'O. di Franc. Gius. d'Austria.

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Socio corrispondente dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, ⊖.

Mosso (Angelo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Fisiologia nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore dell'Istruzione Pubblica, Socio nazionale della R. Accademia de' Lincei, della R. Accademia di Medicina di Torino, e Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ✻, ⊖.

Spezia (Giorgio), Ingegnere, Professore di Mineralogia, e Direttore del Museo mineralogico della R. Università di Torino, ⊖.

Gibelli (Giuseppe), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Botanica e Direttore dell'Orto botanico della R. Università di Torino, ⊖.

Accademici Nazionali non residenti

S. E. Menabrea (Conte Luigi Federigo), Marchese di Val Dora, Senatore del Regno, Professore emerito di Costruzioni nella Regia Università di Torino, Luogotenente Generale, Ambasciatore di S. M. a Parigi, Primo Aiutante di campo Generale Onorario di S. M., Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei, Membro Onorario del Regio Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ecc.; C. O. S. SS. N., Gr. Cord. e Cons. ✻, Cav. e Cons. ✠, Gr. Cr. ✠, ⊖, dec. della Med. d'oro al Valor Militare e della Medaglia d'oro Mauriziana, Gr. Cr. dell'O. Supr. del

Serafino di Svezia, dell'O. di Sant'Alessandro Newski di Russia, di Dannebrog di Danim., Gr. Cr. dell'O. di Torre e Spada di Portogallo, dell'O. del Leone Neerlandese, di Leop. del Belg. (Categ. Militare), della Probità di Sassonia, della Corona di Wurtemberg, e di Carlo III di Sp., Gr. Cr. dell'O. di S. Stefano d'Ungheria, dell'O. di Leopoldo d'Austria, di quelli della Fedeltà e del Leone di Zöhringen di Baden. Gr. Cr. dell'Ord. del Salvatore di Grecia, G. Cr. dell'Ordine di S. Marino, Gr. Cr. degli Ordini del Nisham *Ahid* e del Nisham *Iftigar* di Tunisi, Comm. dell'Ordine della Leg. d'On. di Francia, di Cristo di Portogallo, del Merito di Sassonia, di S. Giuseppe di Toscana, Dottore in Leggi, *honoris causa*, delle Università di Cambridge e di Oxford, ecc. ecc.

Brioschi (Francesco), Senatore del Regno, Prof. d'Idraulica, e Direttore del R. Istituto tecnico superiore di Milano, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Geometria), e delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, di Gottinga, ecc., Presidente della R. Accademia dei Lincei, Membro delle Società Matematiche di Londra e di Parigi, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, dell'Accademia delle Scienze di Bologna, ecc., Gr. Uffiz. ✻, ⊖; ✠, Comm. dell'O. di Cr. di Port.

Govi (Gilberto), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Napoli, Membro del Comitato internazionale dei Pesi e delle Misure, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze e dell'Accademia Pontaniana di Napoli, della R. Accademia d'Agricoltura di Torino, Uffiz. ✻; ✠, Comm. ⊖, e della L. d'O. di Francia.

Moleschott (Jacopo), Senatore del Regno, Membro del Consiglio Superiore dell'Istruzione Pubblica, Professore di Fisiologia nella R. Università di Roma, Professore Onorario della Facoltà Medico-Chirurgica della R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino, Socio corrispondente delle

Società per le Scienze mediche e naturali a Hoorn, Utrecht, Amsterdam, Batavia, Magonza, Lipsia, Cherbourg, degli Istituti di Milano, Modena, Venezia, Bologna, delle Accademie Medico-Chirurgiche in Ferrara e Perugia, Socio Onorario della *Medicorum Societas Bohemicorum* a Praga, della *Société médicale allemande* a Parigi, della Società dei Naturalisti in Modena, dell'Accademia Fisio-medico-statistica di Milano, della *Pathological Society* di S. Louis, della *Sociedad antropolojica Española* a Madrid, Socio dell'Accademia Veterinaria Italiana, del Comitato Medico-Veterinario Toscano, della *Société Royale des Sciences Médicales et Naturelles de Bruxelles*, Socio straniero della Società Olandese delle Scienze a Harlem, e della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti del Belgio, dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, Socio fondatore della Società Italiana d'Antropologia e di Etnologia in Firenze, Membro ordinario dell'Accademia Medica di Roma, Comm. ❋ e Grand. Uffiz. ⊖, Comm. dell'Ordine di Casa Mecklenburg, e Cav. del Leone Neerlandese.

Cannizzaro (Stanislao), Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Comm. ❋, Uffiz. ⊖; ✠.

Betti (Enrico), Professore di Fisica matematica nella R. Università di Pisa, Direttore della Scuola Normale Superiore, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Comm. ❋, Gr. Uffiz. ⊖; ✠.

Scacchi (Arcangelo), Senatore del Regno, Professore di Mineralogia nella R. Università di Napoli, Presidente della Società Italiana delle Scienze detta dei XL, Presidente del Reale Istituto di Incoraggiamento alle Scienze naturali di Napoli, Segretario della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Comm. ❋, Gr. Uffiz. ⊖; ✠.

Ballada di S. Robert (Conte Paolo), Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei.

Schiaparelli (Giovanni), Direttore del R. Osservatorio astronomico di Milano, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Reale di Napoli e dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Astronomia), delle Accademie di Monaco, di Vienna, di Berlino, di Pietroborgo, di Stockolma, di Upsala, della Società de' Naturalisti di Mosca, e della Società Astronomica di Londra, Comm. ❋; ⊖, ☼, Comm. dell'O. di S. Stanislao di Russia.

Accademici Stranieri

Helmholtz (Ermanno Luigi Ferdinando), Professore nella Università di Berlino, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Fisica generale).

Dana (Giacomo), Professore di Storia naturale a New-Haven, Socio corrispondente dell' Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Anatomia e Zoologia).

Hofmann (Guglielmo Augusto), Prof. di Chimica, Membro della R Accademia delle Scienze di Berlino, della Società Reale di Londra, Socio corrispondente dell' Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Chimica).

Chevreul (Michele Eugenio), Membro dell'Istituto di Francia, Gr. C. della L. d'O. di Francia, ecc.

Hermite (Carlo), Membro dell'Istituto di Francia, Uffiz. della L. d'O. di Francia, ecc.

Joule (James Prescott), della Società Reale di Londra.

Weierstrass (Carlo), Professore di Matematica nell'Università di Berlino.

Thomson (Guglielmo), *Associé etranger* dell'Istituto di Francia, Professore di Filosofia naturale nell' Università di Glasgow.

Gegenbaur (Carlo), della R. Accademia Bavarese delle Scienze, Professore di Anatomia nell' Università di Heidelberg.

CORRISPONDENTI

SEZIONE

DI MATEMATICA PURA E ASTRONOMIA

De Gasparis (Annibale), Professore d'Astronomia nella R. Università di . . . . . *Napoli*

Tardy (Placido), Professore emerito della Regia Università di . . . . . *Genova*

Boncompagni (D. Baldassarre), dei Principi di Piombino . . . . . *Roma*

Cremona (Luigi), Professore di Matematiche superiori nella R. Università di . . . . . *Roma*

Cantor (Maurizio), Professore di Matematica nell'Università di . . . . . *Heidelberg*

Schwarz (Ermanno A.), Professore di Matematica nell'Università di . . . . . *Gottinga*

Klein (Felice), Professore di Matematica nell'Università di . . . . . *Lipsia*

Fergola (Emanuele), Professore di Analisi superiore nella R. Università di . . . . . *Napoli*

Beltrami (Eugenio), Professore di Fisica matematica e di Meccanica superiore nella R. Università di . . . . . *Pavia*

Casorati (Felice), Professore di Calcolo infinitesimale e di Analisi superiore nella R. Università di *Pavia*

Dini (Ulisse), Professore di Analisi superiore nella R. Università di . . . . . *Pisa*

Tacchini (Pietro), Direttore dell'Osservatorio del Collegio Romano . . . . . *Roma*

Battaglini (Giuseppe), Professore nella R. Università di . . . . . *Napoli*

Catalan (Eugenio), Professore emerito della Università di . . . . . *Liegi*

SEZIONE

DI MATEMATICA APPLICATA

E SCIENZA DELL'INGEGNERE CIVILE E MILITARE

Colladon (Daniele), Professore di Meccanica . *Ginevra*

Liagre (J. B.), Segretario Perpetuo della R. Accademia delle Scienze del Belgio; alla Scuola militare, *à la Cambre* . . . . . *Ixelles* (Bruxelles)

Turazza (Domenico), Professore di Meccanica razionale nella R. Università di . . . . . *Padova*

Narducci (Enrico), Bibliotecario della Biblioteca Alessandrina di . . . . . *Roma*

Pisati (Giuseppe), Professore di Fisica tecnica nella Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in . . *Roma*

Sang (Edoardo), Socio e Segretario della Società di Scienze ed Arti di . . . . . *Edimborgo*

Clausius (Rodolfo), Professore nell'Università di *Bonn*

Fasella (Felice), Direttore della Scuola navale superiore di . . . . . *Genova*

SEZIONE

DI FISICA GENERALE E SPERIMENTALE

Weber (Guglielmo), della Società Reale delle Scienze di . . . . . *Gottinga*

Fechner (Gustavo Teodoro) . . . . . *Lipsia*

Wartmann (Elia), Prof. nell'Università di . *Ginevra*

Blaserna (Pietro), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . *Roma*

Kohlrausch (Federico), Professore nell' Università di . . . . . *Würtzburg*

Jamin (Giulio Celestino), dell'Istituto di Francia *Parigi*

Cornu (Maria Alfredo), dell' Istituto di Francia *Parigi*

Felici (Riccardo), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . *Pisa*

Villari (Emilio), Professore nella R. Università di . . . . . *Bologna*

Roiti (Antonio), Professore nell' Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento di . *Firenze*

Wiedemann (Gustavo), Prof. nella Università di *Lipsia*

Righi (Augusto), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . *Padova*

Kirchhoff (Gustavo Roberto), Professore nell'Università di . . . . . *Berlino*

SEZIONE

DI CHIMICA GENERALE ED APPLICATA

Bonjean (Giuseppe) . . . . . *Chambéry*

Plantamour (Filippo), Professore di Chimica . *Ginevra*

Will (Enrico), Professore di Chimica . . . *Giessen*

Bunsen (Roberto Guglielmo), Professore di Chimica . . . . . *Heidelberg*

Marignac (Giovanni Carlo), Professore di Chimica *Ginevra*

Péligot (Eugenio Melchiorre), dell' Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

Berthelot (Marcellino), dell'Istituto di Francia *Parigi*

Paternò (Emanuele), Professore di Chimica nella R. Università di . . . . . *Palermo*

Körner (Guglielmo), Professore di Chimica organica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in *Milano*

Friedel (Carlo), dell' Istituto di Francia . *Parigi*

FRESENIUS (Carlo Remigio), Professore a . . . *Wiesbaden*

STAS (Giov. Servais), della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti del Belgio . . . . *Brusselle*

BAEYER (Adolfo von) . . . . . *Monaco* (Baviera)

KEKULE (Augusto), Professore di Chimica nell' Università di . . . . . *Bonn*

WILLIAMSON (Alessandro Guglielmo), della Reale Società di . . . . . *Londra*

THOMSEN (Giulio), Professore di Chimica nell' Università di . . . . . *Copenaghen*

SEZIONE

DI MINERALOGIA, GEOLOGIA E PALEONTOLOGIA

MENEGHINI (Giuseppe), Professore di Geologia, ecc. nella R. Università di . . . . . *Pisa*

STUDER (Bernardo), Professore di Geologia . . *Berna*

KONINK (Lorenzo Guglielmo di) . . . . *Liegi*

DE ZIGNO (Achille), Uno dei XL della Società italiana delle Scienze . . . . . *Padova*

FAVRE (Alfonso), Professore di Geologia . . *Ginevra*

KOKSCHAROW (Nicola di), dell'Accademia Imperiale delle Scienze di . . . . . *Pietroborgo*

RAMSAY (Andrea), della Società Reale di . . *Londra*

STRÜVER (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di . . . . . *Roma*

ROSENBUSCH (Enrico), Professore di Petrografia nell'Università di . . . . . *Strasborgo*

NORDENSKIÖLD (Adolfo Enrico), della R. Accademia delle Scienze di . . . . . *Stoccolma*

DAUBRÉE (Gabriele Augusto), dell'Istituto di Francia, Direttore della Scuola Nazionale delle Miniere . . . . . *Parigi*

ZIRKEL (Ferdinando), Professore di Petrografia a . . . . . *Lipsia*

DES CLOIZEAUX (Alfredo Luigi Oliviero LEGRAND), dell'Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

CAPELLINI (Giovanni), Professore nella R. Università di . . . . . *Bologna*

STOPPANI (Antonio), Professore nell' Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in . *Firenze*

TSCHERMAK (Gustavo), Professore di Mineralogia e Petrografia nell' Università di . . . . *Vienna*

ARZRUNI (Andrea), Professore di Mineralogia nell'Istituto tecnico superiore (tecnische Hochschule) *Aachen* (Aix-la-Chapelle)

MALLARD (Ernesto), Professore di Mineralogia alla Scuola nazionale delle Miniere di Francia . *Parigi*

SEZIONE

DI BOTANICA E FISIOLOGIA VEGETALE

TRÉVISAN DE SAINT-LÉON (Conte Vittore), Corrispondente del R. Istituto Lombardo . . . . *Milano*

CANDOLLE (Alfonso DE), Professore di Botanica . *Ginevra*

GENNARI (Patrizio), Professore di Botanica nella R. Università di . . . . . *Cagliari*

TULASNE (Luigi Renato), dell'Istituto di Francia *Parigi*

CARUEL (Teodoro), Professore di Botanica nell'Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . . *Firenze*

ARDISSONE (Francesco), Professore di Botanica nella R. Scuola Superiore d'Agricoltura in . . . *Milano*

SACCARDO (Andrea), Professore di Botanica nella R. Università di . . . . . *Padova*

HOOKER (Giuseppe DALTON), Direttore del Giardino Reale di Kew . . . . . *Londra*

SEZIONE

DI ZOOLOGIA, ANATOMIA E FISIOLOGIA COMPARATA

De Selys Longchamps (Edmondo) . . . . *Liegi*

Burmeister (Ermanno), Direttore del Museo pubblico di . . . . . *Buenos Aires*

Philippi (Rodolfo Armando) . . . . . *Santiago* (Chilì)

De Cigalla (Conte Giuseppe), Protomedico onorario, nell'isola di . . . . . *Santorino*

Owen (Riccardo), Direttore delle Collezioni di Storia naturale al *British Museum* . . . *Londra*

Koelliker (Alberto), Professore di Anatomia e Fisiologia . . . . . *Würtzburg*

De-Siebold (Carlo Teodoro), Professore di Zoologia e Anatomia comparata nell'Università di . *Monaco* (Baviera)

Golgi (Camillo), Professore di Istologia, ecc. nella R. Università di . . . . . *Pavia*

Haeckel (Ernesto), Professore nell'Università di . . . . . *Jena*

Sclater (Filippo Lutley), Segretario della Società Zoologica di . . . . . *Londra*

Fatio (Vittore), della Società di Fisica e Storia naturale di . . . . . *Ginevra*

Kowalewski (Alessandro), Professore di Zoologia nell'Università di . . . . . *Odessa*

Ludwig (Carlo), Professore di Fisiologia nell'Università di . . . . . *Lipsia*

Brücke (Ernesto), Professore di Fisiologia e Anatomia nell'Università di . . . . . *Vienna*

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore

PEYRON (Bernardino), Professore di Lettere, Bibliotecario Onorario della Biblioteca Nazionale di Torino, Comm. ❋.

Segretario Perpetuo

GORRESIO (Gaspare), Senatore del Regno, Prefetto della Biblioteca Nazionale, già Professore di Letteratura orientale nella R. Università di Torino, Membro dell'Istituto di Francia, Socio nazionale della R. Accademia de'Lincei, Socio corrispondente della Reale Accademia della Crusca, e della R. Accademia di Scienze e Lettere di Palermo, ecc., Membro Onorario della Reale Società Asiatica di Londra, Vice-Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Comm. ❋, Gr. Uffiz. ⊖; ⚜, Comm. dell'O. di Guadal. del Mess., e dell'O. della Rosa del Brasile, Uffiz. della L. d'O. di Francia, ecc.

Accademici residenti

GORRESIO (Gaspare), *predetto.*
FABRETTI (Ariodante), *predetto.*
PEYRON (Bernardino), *predetto.*

Vallauri (Tommaso), Senatore del Regno, Professore di Letteratura latina nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore dell'Istruzione pubblica, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Socio corrispondente della R. Accademia della Crusca, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, e dell'Accademia Romana di Archeologia, Comm. ✻, e ⊜, Cav. dell'Ordine di S. Gregorio Magno.

Flechia (Giovanni). Professore di Storia comparata delle lingue classiche e neolatine e di Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia de'Lincei. Uffiz. ✻. Comm. ⊜; ✠.

Claretta (Barone Gaudenzio), Dottore in Leggi, Socio e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro della Società di Archeologia e Belle Arti e della Giunta conservatrice dei monumenti d'Antichità e Belle Arti per la Provincia di Torino, Comm. ✻ e ⊜.

Bianchi (Nicomede), Senatore del Regno, Soprantendente degli Archivi Piemontesi, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria delle Antiche Provincie e della Lombardia, Membro corrispondente delle Deputazioni di Storia patria delle Provincie Modenesi, delle Provincie della Toscana, dell'Umbria e delle Marche, Membro Onorario della Società storica Svizzera, della R. Accademia Palermitana di Scienze e Lettere, della Società Ligure di Storia patria, della R. Accademia Petrarca di Scienze, Lettere ed Arti in Arezzo, dell'Accademia Urbinate di Scienze, Lettere ed Arti, del R. Ateneo di Bergamo, e della Regia Accademia Paloritana di Messina, Gr. Uffiz. ✻, Comm. ⊜; ✠, e Gr. Uffiz. dell'O. di S. Mar.

Promis (Vincenzo), Dottore in Leggi, Bibliotecario e Conservatore del Medagliere di S. M., Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, R. Ispettore dei monumenti, Membro e Segretario della Società d'Archeologia e Belle Arti di Torino, ✻, Comm. ⊜, Gr. Uffiz. dell'O. di Francesco Giuseppe d'Austria, Comm. dell'O. di S. Michele di Baviera e della Corona di Rumenia.

Rossi (Francesco), Adiutore al Museo d'Antichità, Professore d'Egittologia nella R. Università di Torino. Membro ordinario dell'Accademia orientale di Firenze, ⊖.

Manno (Barone D. Antonio), *predetto.*

Bollati di Saint-Pierre (Barone Federigo Emanuele), Dottore in Leggi, Direttore dell'Archivio di Stato, detto Camerale, Consigliere d'Amministrazione presso il R. Economato generale delle Antiche Provincie. Membro della R. Deputazione sopra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio corrispondente della Società Ligure di Storia Patria, della Società Colombaria Fiorentina, della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie della Romagna, e della Società per la Storia di Sicilia, Uffiz. ❋, ⊖.

Schiaparelli (Luigi), Dottore aggregato, Professore di Storia antica, Direttore della Scuola di Magistero e Preside della Facoltà di Lettere e Filosofia nella R. Università di Torino, Uffiz. ❋, Comm. ⊖.

Pezzi (Domenico), Dottore aggregato e Professore straordinario nella Facoltà di Lettere e Filosofia della R. Università di Torino, ⊖.

Ferrero (Ermanno). Dottore in Giurisprudenza. Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia nella R. Università di Torino. Professore nell'Accademia Militare. Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, e della Società d'Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino. Membro corrispondente della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie di Romagna, e dell'Imp. Instituto Archeologico Germanico, fregiato della Medaglia del merito civile di 1ª cl. della Rep. di S. Marino, ⊖.

Carle (Giuseppe), Dottore aggregato alla Facoltà di Leggi, Professore della Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino. Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Comm. ⊖.

Nani (Cesare), Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza, Professore di Storia del Diritto nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, ⊖.

Berti (Domenico), Deputato al Parlamento nazionale, Professore emerito delle R. Università di Torino, Bologna e di Roma, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente della R. Accademia della Crusca e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Gr. Uffiz. ❋, Gr. Cord. ⊖; ✠, Gr. Cord. della Legion d'O. di Francia, e dell'Ordine di Leopoldo del Belgio.

Accademici Nazionali non residenti

Carutti di Cantogno (Barone Domenico), Consigliere di Stato, Presidente della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Socio e Segretario della R. Accademia dei Lincei, Socio straniero della R. Accademia delle Scienze Neerlandese, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco in Baviera, della R. Accademia Lucchese, del R. Istituto Veneto, della Pontaniana di Napoli, Socio onorario della R. Società Romana di Storia patria, dell'Ateneo di Scienze, Lettere ed Arti di Bergamo, ecc., Membro del Consiglio degli Archivi, Gr. Uffiz. ❋, Comm. ⊖, Cav. e Cons. ✠. Gr. Cord. dell'O. del Leone Neerlandese e dell'O. d'Is. la Catt. di Sp. e di S. Mar., Gr. Uffiz. dell'O. di Leop. del B., dell'O. del Sole e del Leone di Persia, e del Mejidié di 2ª cl. di Turchia, Gr. Comm. dell' Ord. del Salv. di Gr., ecc.

Amari (Michele), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Palermo e del R. Istituto di studi superiori di Firenze; Dottore in Filosofia e Lettere delle Università di Leida e di Tubinga; Socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei in Roma, Socio ordinario delle RR. Accademie delle Scienze in Monaco di Baviera e in Copenhagen; Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze in Palermo, della Crusca, dell'Istituto Veneto, della Società Colombaria in Firenze, della R. Accademia d'Archeologia in Napoli, delle Accademie di Scienze, Lettere

ed Arti in Lucca e in Modena, della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie Parmensi, di quella per le Provincie Toscane, dell'Umbria e delle Marche, delle Accademie Imperiali di Pietroborgo e di Vienna, dell'Ateneo Veneto, dell'Ateneo orientale in Parigi e dell'Istituto Egiziano in Alessandria; Socio onorario della R. Società Asiatica di Londra, della Società orientale di Germania, della Società geografica italiana, delle Accademie di Padova e di Gottinga: Presidente onorario della Società Siciliana di Storia patria, Socio della Romana, Socio onorario della Ligure, della Veneta e della Società storica di Utrecht; Gr. Uffiz. ✻, e Gr. Croce ⊖, Cav. e Cons. ✠, Cav. dell'Ord. Brasiliano della Rosa e dell'Ordine *pour le mérite* di Prussia.

Reymond (Gian Giacomo), già Professore di Economia politica nella R. Università di Torino, ✻.

Ricci (Marchese Matteo), Socio residente della Reale Accademia della Crusca, Uffiz. ✻.

Minervini (Giulio), Bibliotecario e Professore Onorario della Regia Università di Napoli, Segretario generale perpetuo dell'Accademia Pontaniana, Socio ordinario della Società R. di Napoli, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della Commissione dei Testi di Lingua, Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), della R. Accademia delle Scienze di Berlino, ecc., Uffiz. ✻, e Comm. ⊖, Cav. della L. d'O. di Francia, dell'Aquila Rossa di Prussia, di S. Michele del Merito di Baviera, ecc.

De Rossi (Comm. Giovanni Battista), Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), e della R. Accademia delle Scienze di Berlino e di altre Accademie, Presidente della Pontificia Accademia Romana d'Archeologia.

Canonico (Tancredi), Senatore del Regno, Professore, Consigliere della Corte di Cassazione di Roma e del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Uffiz. ✻, e Gr. Uffiz. ⊖.

Cantù (Cesare), Membro effettivo del R. Istituto Lombardo, Direttore dell'Archivio di Stato di Milano, e Soprantendente degli

Archivi Lombardi, Socio delle Accademie della Crusca, dei Lincei, di Madrid, di Bruxelles, ecc.; Corrispondente dell'Istituto di Francia e d'altri, Gr. Uffiz. ❋ e Comm. ⊜, Cav. e Cons. ✠, Comm. dell'O. di C. di Port., Gr. Uffiz. dell'O. della Guadalupa, ecc., Officiale della Pubblica Istruzione e della L. d'O. di Francia, ecc.

Tosti (D. Luigi), Abate Benedettino Cassinese, Socio ordinario della Società Reale delle Scienze di Napoli, Soprantendente generale dei monumenti sacri del Regno d'Italia, Vice-Archivista della S. Sede.

Accademici Stranieri

Mommsen (Teodoro), Professore di Archeologia nella Regia Università e Membro della R. Accademia delle Scienze di Berlino, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

Müller (Massimiliano), Professore di Letteratura straniera nell'Università di Oxford, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

Bancroft (Giorgio), Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche).

De Witte (Barone Giovanni Giuseppe Antonio Maria), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

Gregorovius (Ferdinando), Membro della R. Accademia Bavarese delle Scienze in Monaco.

Ranke (Leopoldo), Membro della R. Accademia delle Scienze di Berlino, e Membro *straniero* dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche).

Meyer (Paolo), Professore delle lingue e letterature dell'Europa meridionale nel Collegio di Francia, Direttore dell'*Ecole des Chartes*, Cav. della L. d'O. di Francia.

Reumont (Alfredo von), Ministro plenipotenziario, Consigliere di S. M. Prussiana.

CORRISPONDENTI

I. — SCIENZE FILOSOFICHE.

JOURDAIN (Carlo) dell' Istituto di Francia . *Parigi*
RENDU (Eugenio) . . . . . *Parigi*
BONATELLI (Francesco), Professore di Filosofia teoretica nella R. Università di . . . . . *Padova*
FERRI (Luigi), Professore di Filosofia teoretica nella R. Università di . . . . . *Roma*

II. — SCIENZE GIURIDICHE E SOCIALI.

LAMPERTICO (Fedele), Senatore del Regno . *Roma*
SERAFINI (Filippo), Professore di Diritto romano nella R. Università di . . . . . *Pisa*
SERPA PIMENTEL (Antonio di) . . . . . *Madrid*
RODRIGUEZ DE BERLANGA (Manuel) . . . *Malaga*

III. — SCIENZE STORICHE.

MICHEL (Francesco) . . . . . *Bordeaux*
KRONE (Giulio) . . . . . *Vienna*
SANGUINETTI (Abate Angelo), della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria . . . *Genova*
CHAMPOLLION-FIGEAC (Amato) . . . . . *Parigi*
ADRIANI (P. Giambattista), della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria . . . . *Cherasco*

DAGUET (Alessandro) . . . . . } *Neuchâtel* (Svizzera)
PERRENS (Francesco) . . . . . *Parigi*
CAMPORI (Marchese Giuseppe), Presidente della R. Accademia di Scienze, Lettere, Arti in . . *Modena*
HAULLEVILLE (Prospero DE) . . . . . *Brusselle*
VILLARI (Pasquale), Professore nell'Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in . *Firenze*
GIESEBRECHT (Guglielmo), dell'Accademia bavarese delle Scienze in . . . . . *Monaco*
DE LEVA (Giuseppe), Professore di Storia moderna nella R. Università di . . . . . *Padova*
SYBEL (Enrico Carlo Ludolfo von), Direttore dell'Archivio di Stato in . . . . . *Berlino*
WALLON (Alessandro), Segretario perpetuo dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) . . . . . *Parigi*
TAINE (Ippolito), dell'Istituto di Francia . *Parigi*
RIANT (Conte Paolo), dell'Istituto di Francia *Parigi*

IV. — ARCHEOLOGIA.

HENZEN (Guglielmo) . . . . . *Roma*
BOISSIEU (Alfonso DE) . . . . . *Lione*
WIESELER (Federico) . . . . . *Gottinga*
PALMA di CESNOLA (Conte Luigi) . . . . *New-York*
GOZZADINI (Giovanni), Senatore del Regno . *Bologna*
RAWLINSON (Giorgio), Professore nella Università di . . . . . *Oxford*
FIORELLI (Giuseppe), Senatore del Regno . *Roma*
CURTIUS (Ernesto), Professore nell'Università di . . . . . *Berlino*

Birch (Samuele), Conservatore delle Antichità orientali, ecc., e delle Collezioni etnografiche del *Museo Britannico* in . . . . . *Londra*

Maspero (Gastone), dell'Istituto di Francia a *Parigi*

V. — GEOGRAFIA.

Negri (Barone Cristoforo), Console generale di prima Classe, Consultore legale del Ministero per gli affari esteri . . . . . *Torino*

Kiepert (Enrico), Professore nell'Università di *Berlino*

Pigorini (Luigi), Professore di Paleoetnologia nella Regia Università di . . . . . *Roma*

VI. — LINGUISTICA E FILOLOGIA ORIENTALE.

Krehl (Ludolfo) . . . . . *Dresda*

Rénan (Ernesto), dell'Istituto di Francia . *Parigi*

Sourindro Mohun Tagore . . . . . *Calcutta*

Ascoli (Isaia Graziadio), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di . . . . . *Milano*

Weber (Alberto), Professore nell'Università di *Berlino*

Withney (Guglielmo), Prof. nel Collegio *Yale*. *New-Haven*

Kerbaker (Michele), Professore di Storia comparata delle lingue classiche e neo-latine nella R. Università di . . . . . *Napoli*

Marre (Aristide) Membro della Società Asiatica *Parigi*

VII. — FILOLOGIA, STORIA LETTERARIA E BIBLIOGRAFIA.

Franceschi-Ferrucci (Catterina), Corrispondente della R. Accademia della Crusca . . . *Pisa*

Silorata (Pietro Bernabò), Prof., Comm. . *Roma*

Linati (Conte Filippo), Senatore del Regno . *Parma*

Comparetti (Domenico), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . *Firenze*

Bréal (Michele) . . . . . *Parigi*

Negroni (Carlo), della R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria . . . . . *Novara*

D'Ancona (Alessandro), Professore nella R. Università di . . . . . *Pisa*

MUTAZIONI

avvenute nel Corpo Accademico
dal 1° *Gennaio* 1885 *al* 1° *Gennaio* 1886

ELEZIONI

SOCI

Stas (Giov. Servais), eletto Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, il 25 Gennaio 1885 (Sezione di Chimica generale ed applicata).

Baeyer (Adolfo von), id. id. id.

Kekule (Augusto), id. id. id.

Williamson (Alessandro), id. id. id.

Thomsen (Giulio), id. id. id.

Sclater (Filippo Lutley), eletto Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, il 25 Gennaio 1885 (Sezione di Zoologia, Fisiologia e Anatomia comparata).

Fatio (Vittore), id. id. id.

Kowalewski (Alessandro), id. id. id.

Ludwig (Carlo), id. id. id.

Brücke (Ernesto), id. id. id.

Maspero (Gastone), eletto Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, il 1° Febbraio 1885 (Sezione di Archeologia)

Marre (Aristide), id. id. id. (Sezione di Linguistica e Filologia orientale).

Bréal (Michele), id. id. id. (Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia).

D'Ancona (Alessandro), eletto Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, il 1° Febbraio 1885 (Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia).

Negroni (Carlo), id. id. id. id.

Tschermak (Gustavo), eletto Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, l' 8 Febbraio 1885 (Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia).

Arzruni (Andrea), id. id. id.

Mallard (Ernesto), id id. id.

Saccardo (Andrea), id. id. id. (Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale).

Hooker (Giuseppe Dalton), id. id. id. id.

Sachs (Giulio von), eletto Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali il 22 Febbraio 1885 (Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale).

Nägeli (Carlo), id. id. id.

Delpino (Federico), id. id. id.

Reumont (Alfredo von), eletto Socio straniero della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, il 15 Marzo 1885.

Genocchi (Angelo), eletto Presidente dell'Accademia il 12 e approvato con Decreto Reale del 26 Aprile 1885.

Cossa (Alfonso), eletto Direttore della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali il 12 e approvato con Decreto Reale del 26 Aprile 1885.

Fabretti (Ariodante), eletto Vice-Presidente dell'Accademia il 17 Maggio e approvato con Decreto Reale del 6 Giugno 1885.

MORTI.

20 Aprile 1885.

Rossetti (Francesco), Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Fisica generale e sperimentale).

5 Maggio 1885.

Garrucci (P. Raffaele), Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Archeologia).

21 Maggio 1885.

Mamiani (Terenzio), Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Filosofia).

11 Giugno 1885

Renier (Leone), Socio straniero della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Agosto 1885.

Milne Edwards (Henri), Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Zoologia, Fisiologia e Anatomia comparata).

30 Agosto 1885.

Egger (Emilio), Socio straniero della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

25 Settembre 1885.

Boissier (Pietro Edmondo), Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale).

26 Dicembre 1885.

Gachard (Luigi Prospero), Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze storiche).

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

—

Novembre - Dicembre

1885

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 15 Novembre 1885.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANGELO GENOCCHI

Sono presenti i Soci: GENOCCHI, COSSA, SOBRERO, LESSONA, DORNA, SALVADORI, BRUNO, BERRUTI, SIACCI, D'OVIDIO, BIZZOZERO, MOSSO, SPEZIA.

Dichiaratasi aperta la seduta, il Socio BASSO dà lettura del verbale della seduta tenutasi dalla Classe il 21 giugno scorso, in cui egli tenne le veci del Segretario SOBRERO assente: il verbale è approvato.

« Il Presidente, a nome del Socio nazionale non residente Gilberto GOVI, presenta il volume intitolato *L'Ottica di Claudio Tolomeo*, avvertendo essere intenzione del medesimo GOVI che fra i diversi Corpi Scientifici il primo a ricevere l'omaggio d'un esemplare di quest'opera sia l'Accademia delle Scienze di Torino, la quale presieduta dall'egregio Conte SCLOPIS accolse premurosamente la domanda fatta dal GOVI nell'adunanza del 23 aprile 1871 e decise di far copiare e pubblicare il più corretto fra gli esemplari conosciuti dell'*Ottica di Tolomeo*, e al GOVI stesso ne affidò la pubblicazione, che ora è condotta a termine ».

Il Presidente presenta ancora, a nome del Principe BONCOMPAGNI, i seguenti lavori: 1° Fascicoli di settembre, ottobre, novembre e dicembre 1884, e il fascicolo di gennaio 1885 del *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche;* 2° L'*Indice* delle materie contenute nel vol. XIV dello stesso *Bullettino;* 3° Un fasc. intitolato: *Correspondance de Réné François de Sluse*, publiée pour la première fois et précedée d'une introduction par M. C. LE PAIGE (estratto dallo stesso *Bullettino*); 4° Intorno alla *Bibliotheca mathematica* del Dott. Gustavo ENESTRÖM; Rapporto di B. BONCOMPAGNI; 5° *Sur un theorème de Goldbach*, Lettre de M. Gustave ENESTRÖM à M. B. BONCOMPAGNI.

Il Socio COSSA fa omaggio d'un suo lavoro già pubblicato dall'Accademia dei Lincei *Sulla vita e sui lavori scientifici di Quintino Sella.*

Il Socio BASSO presenta in omaggio all'Accademia un libro intitolato: *Manuale di Geografia fisica* di Ferdinando FABRETTI, Prof. a Perugia, e loda quest'opera per la sua utilità e per la buona compilazione.

Il Segretario annunzia la morte dei signori Edmondo BOISSIER, Corrispondente dell'Accademia nella Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale, e Enrico MILNE EDWARDS, Corrispondente nella Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Il Socio DORNA presenta per la solita pubblicazione parecchi lavori eseguiti all'Osservatorio astronomico dell'Università di Torino dall'Assistente Dott. Angelo CHARRIER; e legge un suo scritto intitolato: *Breve Notizia delle Osservazioni astronomiche e geodetiche state eseguite nel* 1885 *all'Osservatorio dell'Università di Torino nel Palazzo Madama per iniziativa ed a spese della Commissione del Grado.*

Il Socio SIACCI legge una Memoria del Prof. Ernesto PADOVA, dell'Università di Padova, *Sul moto di rotazione di un corpo rigido.*

Il Socio LESSONA, condeputato col Socio SALVADORI, riferisce sul merito scientifico di una Memoria del Prof. B. GRASSI, dell'Università di Catania, intitolata: *Morfologia delle Scolopendrelle, ecc.*, che fu sottoposta al giudizio dell'Accademia nell'adunanza del 21 giugno u. s.

Il Socio SPEZIA legge una sua Nota *Sulla flessibilità dell'Itacolumite.*

Il Socio BIZZOZERO legge una breve Memoria *Sulla storia naturale, e sul significato clinico-patologico delle così dette Anguillule intestinali e stercorali*, Osservazioni di Camillo GOLGI, Prof. di Patologia generale nella R. Università di Pavia e di Achille MONTI, studente di Medicina.

LETTURE

—

BREVE NOTIZIA

delle Osservazioni astronomiche e geodetiche eseguite nel 1885 *all'Osservatorio della Regia Università di Torino, nel Palazzo Madama, per iniziativa ed a spese della Commissione del Grado, del Socio Prof.* ALESSANDRO DORNA.

Grazie al Generale Ferrero, Presidente della Commissione del Grado, che fornì i fondi e gli strumenti principali; all'astronomo Schiaparelli, che somministrò gli strumenti mancanti ed il personale necessario (assumendo, d'accordo col Direttore dell'Osservatorio di Torino, la direzione delle operazioni), ed al Colonnello di Stato Maggiore De Stefanis, Direttore dell'Ufficio topografico, che ordinò immediatamente il collegamento dell'Osservatorio di Torino colla nuova gran rete di triangoli, mediante i tre punti di 1° ordine: Monte *Musinè*, Monte *Soglio* e Monte *Vesco*, incaricandone l'abile ingegnere dell'Ufficio topografico, Dottore De Berardinis, il quale confermò anche la posizione della mira di Cavoretto; sono lieto di poter dare all'Accademia la notizia che alle determinazioni di longitudine, latitudine ed azimut, fatte per l'Osservatorio, nei primi anni dopo che venne eretto da Plana a spese del Re Carlo Emanuele I, se ne aggiunsero quest'anno altre, eseguite con tutte le cautele richieste dai metodi e dagli strumenti odierni più precisi.

I tre operatori principali furono il Dottore Rayna, 3° astronomo di Milano, il Dottore Porro addetto all'Osservatorio di Milano, aspirante al posto di astronomo aggiunto all'Osservatorio di Torino, ed il prelodato Dottore De Berardinis. Questi potè già darmi notizia dei risultamenti da lui ottenuti, e mi

BASAMENTO

Scala 1:100

Spaccato alto

Pianta

BASAMENTO

Scala: 1:50

A

B

A e B. [illegible] di pietra e palestra indipendenti dalle [illegible] e dal pavimento, costruite per l'osservatore

[illegible]

BASAMENTO

[illegible] per la misura determinazione e di longitudine tra i due Osservatori di Torino e Milano

Scala 1:50

A. Cronografo alle 5 pile locali

B. Tavolella longitudine Oppolzer

C. Cronografo Morse, con sottostante pile

D. Fondo e intercalare

E. Avvisatore [illegible]

[illegible] della Pirez, [illegible] del Palazzo Madama, [illegible] del Direttore dell'Osservatorio

riservo di informarne l'Accademia, allorchè sarò in grado di aggiungervi anche i risultamenti degli altri Osservatori. Intanto ho l'onore di mostrare all'Accademia la forma che dovetti dare ad una parte del locale della specola, per rendere possibile in essa la nuova determinazione, certamente più esatta dell'antica, sottoponendole un disegno stato rilevato dalla Direzione dei restauri del Palazzo Madama, ultimata che fu la trasformazione fatta da me eseguire, a spese della Commissione del Grado e d'accordo col Direttore dell'Osservatorio di Milano, che mi informò delle condizioni di stabilità volute per l'esattezza delle osservazioni.

Torino, 15 Novembre 1885.

SUL

MOTO DI ROTAZIONE

DI UN CORPO RIGIDO.

Memoria del Prof. Ernesto Padova,
presentata dal Socio Maggiore F. Siacci.

Il problema della determinazione del moto di un corpo rigido, che gira attorno ad un punto fisso è stato fino ad ora, per quanto io sappia, completamente risoluto soltanto nel caso in cui le forze attive ammettano una risultante che passi pel punto fisso ed in quello in cui il corpo essendo pesante, la congiungente il punto fisso col baricentro sia asse principale d'inerzia ed i momenti relativi agli altri due assi principali siano uguali fra loro: queste ultime condizioni sono certamente soddisfatte se il corpo pesante è omogeneo di rivoluzione e gira attorno ad un punto del suo asse di simmetria.

Le equazioni del moto però si possono, con un cangiamento opportuno di variabili, integrare anche nel caso in cui il corpo sia soggetto ad una resistenza, che trasportata al punto fisso dia luogo ad una coppia proporzionale alla coppia di quantità di moto attuale e diretta pel verso opposto a questa; ed anche quando il corpo, trovandosi nelle condizioni indicate pel secondo dei casi già risoluti, subisce una resistenza analoga alla precedente, mentre il punto di sospensione scorre con una certa legge sulla retta che lo congiunge al baricentro. È la soluzione di questi due problemi che ora ho l'onore di sottoporre al giudizio di codesta illustre Accademia.

1. Siano A, B, C i momenti principali di inerzia di un corpo relativamente ad un punto O, origine di un sistema di assi coordinati, ortogonali e fisssi $O\xi\eta\zeta$, supponiamo il corpo in movimento e con p, q, r indichiamo le componenti della sua velocità

angolare, valutate attorno agli assi principali corrispondenti ad O e che indicheremo con $Oxyz$. Se ad un punto qualunque del corpo, ove trovasi la massa dm, è applicata una forza le cui componenti secondo Ox, Oy, Oz sono

$$-\lambda x' dm\ , \qquad -\lambda y' dm\ , \qquad -\lambda z' dm\ .$$

ove λ è una costante ed x', y', z' sono le derivate rapporto al tempo delle coordinate (e questo caso si presenta per es.: quando il corpo che si considera è una superficie rigida, omogenea, che si muove in un mezzo la cui resistenza è proporzionale alla velocità del mobile), trasportando nel punto O tutte queste forze avremo una coppia, le cui componenti attorno agli assi $Oxyz$ saranno

$$-\lambda Ap\,, \quad -\lambda Bq\,, \quad -\lambda Cr\,,$$

talchè le equazioni del moto in questo caso diverranno

$$(1)\ \ldots\ \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B-C)\,qr - \lambda Ap \\[2ex] B\dfrac{dq}{dt} = (C-A)\,rp - \lambda Bq \\[2ex] C\dfrac{dr}{dt} = (A-B)\,pq - \lambda Cr\ . \end{cases}$$

Moltiplichiamo queste equazioni ordinatamente per p, q, r, sommiamo ed integriamo, avremo

$$(2)\ \ldots\ldots \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = e^{-2\lambda t}.\,h\ ,$$

ove h è una costante arbitraria.

Analogamente moltiplicate per Ap, Bq, Cr e sommate, le (1) danno colla integrazione

$$(3)\ \ldots\ldots \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = e^{-2\lambda t}.\,l\ ,$$

ove l è una nuova costante arbitraria.

Dai due integrali primi (2) e (3) si possono dedurre alcune proprietà geometriche del moto che hanno una grande analogia con quelle notissime trovate dal Poinsot pel moto dei corpi non soggetti a forze. Si consideri infatti l'ellissoide rappresentato dalla equazione

$$(4)\ \ldots\ldots \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = e^{-2\lambda t}.\,h\ ,$$

i cui assi al crescere del tempo vanno continuamente diminuendo, e che si mantiene sempre omotetico all'ellissoide d'inerzia: le coordinate del punto in cui l'asse istantaneo di rotazione incontra l'ellissoide (4). corrispondente a quell'istante e che chiameremo il *polo* di rotazione, sono p, q, r, quindi si vede che il raggio polare dà la misura della velocità angolare risultante.

Il piano tangente all'ellissoide (4) nel polo ha per equazione

$$(5) \ldots\ldots \qquad Apx + Bqy + Crz = he^{-2\lambda t} .$$

e la sua distanza dal centro è data dalla equazione

$$\delta = e^{-\lambda t}\frac{h}{l} ,$$

la quale mostra che i piani tangenti nei successivi poli vanno continuamente avvicinandosi al centro; inoltre essi si mantengono paralleli fra loro, infatti se con α, β, γ si indicano gli angoli che la normale al piano (5) fa cogli assi fissi $O\xi\eta\zeta$, si ha

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : 1 = Ap\alpha_1 + Bq\alpha_2 + Cr\alpha_3 :$$
$$: Ap\beta_1 + Bq\beta_2 + Cr\beta_3 : Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 : le^{-\lambda t} ,$$

ove α_1 $\alpha_2 \ldots \gamma_3$ sono i coseni degli angoli che fanno fra loro i due sistemi di assi coordinati, e le quantità α, β, γ risultano costanti, poichè si ha

$$\frac{d\cos\alpha}{dt} = \frac{e^{\lambda t}}{l}\left[\frac{d}{dt}(Ap\alpha_1 + Bq\alpha_2 + Cr\alpha_2) + \lambda(Ap\alpha_2 + Bq\alpha_2 Cr\alpha_3)\right]$$
$$= \frac{e^{\lambda t}}{l}\Big\{\alpha_1\left|(B-C)qr - \lambda Ap\right| + \alpha_2\left|(C-A)pr - \lambda Bq\right|$$
$$+ \alpha_3\left|(A-B)pq - \lambda Cr\right| + Ap(\alpha_2 r - \alpha_3 q) + Bq(\alpha_3 p - \alpha_1 r)$$
$$+ Cr(\alpha_1 q - \alpha_2 p) + \lambda(Ap\alpha_1 + Bq\alpha_2 + Cr\alpha_3)\Big\} = 0 ,$$

ed analogamente

$$\frac{d\cos\beta}{dt} = \frac{d\cos\gamma}{dt} = 0 .$$

Chiameremo *piano invariabile* quello condotto per O parallelamente ai piani tangenti (5).

Se ora risolviamo le (2) e (3) rispetto a p^2, r^2 avremo

$$p^2 = \frac{e^{-2\lambda t}(l^2 - Ch) - q^2 B(B-C)}{A(A-C)} .$$

$$r^2 = \frac{e^{-2\lambda t}(Ah - l^2) - q^2 B(A-B)}{C(A-C)} ,$$

e col porre

$$p_1 = p e^{\lambda t} , \qquad q_1 = q e^{\lambda t} , \qquad r_1 = r e^{\lambda t}$$

avremo

$$p_1^2 = \frac{l^2 - Ch - q_1^2 B(B-C)}{A(A-C)} ,$$

$$r_1^2 = \frac{Ah - l^2 - q_1^2 B(A-B)}{C(A-C)} .$$

Ammetteremo, come fa JACOBI, che i sei binomi

$$A - C , \qquad B - C , \qquad A - B ,$$

$$Ah - l^2 , \qquad Bh - l^2 , \qquad l^2 - Ch$$

abbiano lo stesso segno, che cioè si prenda $A > B > C$ se è $Bh - l^2 > 0$ ed invece $A < B < C$ se è $Bh - l^2 < 0$. La r_1 conserverà allora sempre lo stesso segno, mentre la p_1 potrà annullarsi. Poniamo

$$q_1 = \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{B(B-C)}} \operatorname{sen} \chi = \sqrt{\frac{Ah - l^2}{B(A-B)}} \cdot k \operatorname{sen} \chi .$$

e quindi sarà

$$k = \sqrt{\frac{A-B}{B-C} \cdot \frac{l^2 - Ch}{Ah - l^2}} ,$$

$$p_1^2 = \frac{l^2 - Ch}{A(A-C)} \cos^2 \chi , \qquad r_1^2 = \frac{hA - l^2}{C(A-C)} \Delta^2 \chi$$

ove è

$$\Delta^2 \chi = 1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \chi .$$

E poichè quando χ va da $-\frac{\pi}{2}$ a 0, q_1 è negativo e p_1,

decresce e quando χ va da 0 a $\frac{\pi}{2}$, q_1 è positivo e p_1 cresce, così avremo

$$(6)\quad \begin{cases} p_1 = -\sqrt{\dfrac{l^2 - Ch}{A(A-C)}} \cdot \cos\chi\,, \quad q_1 = \sqrt{\dfrac{l^2 - Ch}{B(B-C)}}\,\mathrm{sen}\,\chi\,, \\ r_1 = \sqrt{\dfrac{Ah - l^2}{C(A-C)}} \cdot \Delta\chi\,. \end{cases}$$

La seconda delle (1) colla introduzione delle variabili p_1, q_1, r_1 in luogo delle p, q, r diviene

$$B\frac{dq_1}{dt} = (C-A)\,p_1 r_1\, e^{-\lambda t}\,,$$

e col porre $t_1 = e^{-\lambda t}$ si cangia nell'altra

$$-\lambda B\frac{dq_1}{dt_1} = (C-A)\,p_1 r_1\,,$$

la quale per le (6) diviene

$$-n\,dt_1 = \frac{d\chi}{\Delta\chi}$$

se si pone

$$n = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}\,;$$

ma se t_0 è il valore di t_1 pel quale si annulla χ e poniamo

$$u = n\,(t_0 - t_1)$$

sarà

$$\chi = \mathrm{am}\,u$$

$$(7)\ldots \begin{cases} p_1 = -\sqrt{\dfrac{l^2 - Ch}{A(A-C)}}\,\mathrm{cn}\,u\,, \quad q_1 = \sqrt{\dfrac{l^2 - Ch}{B(B-C)}}\,\mathrm{sn}\,u \\ r_1 = \sqrt{\dfrac{Ah - l^2}{C(A-C)}}\,\mathrm{dn}\,u\,. \end{cases}$$

Se per asse delle ζ prendiamo la normale al piano invariabile, i coseni γ_1, γ_2, γ_3 degli angoli ch'esso fa cogli assi x, y, z sono

$$\frac{Ap_1}{l}\,, \qquad \frac{Bq_1}{l}\,, \qquad \frac{Cr_1}{l}\,,$$

e ricordando che dalle formule di EULER si ha

$$\gamma_1 = -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta\,, \qquad \gamma_2 = -\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi\,, \qquad \gamma_3 = \cos\vartheta\,,$$

ove ϑ è l'angolo degli assi $O\zeta$, Oz e φ l'angolo che l'asse delle x fa colla intersezione del piano xy col piano invariabile, si potranno dalle (7) avere le espressioni di ϑ e φ in funzione di u. Pel calcolo dell'angolo ψ che l'asse $O\xi$ fa colla intersezione dei piani Oxy, $O\xi\eta$ ricordiamo che dalle stesse formule di EULER si ha

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\alpha_3}{\beta_3}\,,$$

donde si ottiene

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p\gamma_1 + q\gamma_2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} = \frac{Ap_1^2 + Bq_1^2}{A^2p_1^2 + B^2q_1^2}\, l\, e^{-\lambda t}\,,$$

ossia

$$-\lambda\frac{d\psi}{dt_1} = l\,\frac{h - Cr_1^2}{l^2 - C^2r_1^2}\,,$$

la quale, in forza della terza delle (7), si trasforma nell'altra

$$d\psi = \frac{l}{n\lambda}\cdot\frac{B - C + (A - B)\operatorname{sn}^2 u}{A(B - C) + C(A - B)\operatorname{sn}^2 u}\,du\,.$$

Integrando questa equazione si ha nel secondo membro un termine lineare in u ed uno periodico, quindi le variazioni periodiche della linea dei nodi, che nel problema del moto di un corpo libero avvengono, come ha mostrato JACOBI, rispetto ad un asse che gira uniformemente nel piano invariabile, in questo caso avvengono attorno ad un asse, che nel piano invariabile gira con una velocità proporzionale ad $e^{-\lambda t}$.

Gli angoli ϑ, φ, ψ sono così determinati in funzione del tempo e danno la posizione del corpo in ogni istante.

2. Consideriamo adesso un corpo di rivoluzione omogeneo, pesante, che gira attorno ad un punto del suo asse di simmetria e supponiamo che durante il moto incontri una resistenza analoga a quella considerata nel problema precedente ed il punto di sospensione scorra sull'asse di simmetria in modo che la sua distanza s dal baricentro soddisfaccia la condizione

$$s\,e^{2\lambda t} = s_1 = \text{cost.}$$

Supposto verticale l'asse delle ζ e che l'asse delle z coincida coll'asse di simmetria, le equazioni del moto saranno

$$A\frac{dp}{dt}=-\lambda Ap+(A-C)qr-Ps\gamma_2\,,$$

$$A\frac{dq}{dt}=-\lambda Aq+(C-A)pr+Ps\gamma_1\,,$$

$$C\frac{dr}{dt}=-\lambda Cr\,.$$

ove P indica il peso del corpo.

Poniamo come nel problema precedente

$$p_1=pe^{\lambda t}\,,\quad q_1=qe^{\lambda t}\,,\quad r_1=re^{\lambda t}\,,\quad t_1=e^{-\lambda t}\,,$$

e moltiplichiamo le equazioni del moto per $e^{2\lambda t}$, avremo

$$(8)\ \ldots\ldots\quad \begin{cases} -\lambda A\dfrac{dp_1}{dt_1}=(A-C)q_1r_1-Ps_1\gamma_2\,,\\[2ex] -\lambda A\dfrac{dq_1}{dt_1}=(C-A)p_1r_1+Ps_1\gamma_1\,,\\[2ex] -\lambda C\dfrac{dr_1}{dt_1}=0\,, \end{cases}$$

le quali hanno per integrali primi le equazioni

$$(9)\ \ldots\ldots\quad \begin{cases} \dfrac{A}{2}(p_1^2+q_1^2)=Ps_1\gamma_3+h\lambda^2\,,\\[2ex] A(p_1\gamma_1+p_2\gamma_2)+Cr_1\gamma_3=l\lambda\,,\\[2ex] r_1=n\lambda\,, \end{cases}$$

ove $h\lambda^2$, $l\lambda$, $n\lambda$ sono costanti arbitrarie.

Dalle formole di Euler si deducono, come è noto, le relazioni

$$r=\frac{d\varphi}{dt}-\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt}\,,$$

$$p\gamma_1+q\gamma_2=-\operatorname{sen}^2\vartheta\frac{d\psi}{dt}\,,$$

$$p^2+q^2=\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2+\operatorname{sen}^2\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

e da queste coll'introdurre le nuove variabili p_1, q_1, r_1, t_1 abbiamo

$$-\frac{r_1}{\lambda}=\frac{d\varphi}{dt_1}-\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt_1},$$

$$p_1\gamma_1+q_1\gamma_2=\lambda\,\mathrm{sen}^2\vartheta\frac{d\psi}{dt_1},$$

$$p_1^2+q_1^2=\lambda^2\left(\frac{d\vartheta}{dt_1}\right)^2+\lambda^2\,\mathrm{sen}^2\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt_1}\right)^2,$$

quindi, col porre per brevità $\gamma=\frac{s_1}{\lambda^2}$, le (9) daranno

$$(10)\ldots\begin{cases}\frac{A}{2}\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt_1}\right)^2+\mathrm{sen}^2\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt_1}\right)^2\right]=P\gamma\cos\vartheta+h,\\ A\,\mathrm{sen}^2\vartheta\frac{d\psi}{dt_1}+Cn\cos\vartheta=l,\\ \frac{d\varphi}{dt_1}=-n+\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt_1}.\end{cases}$$

Se per brevità si scrive

$$R=(2AP\gamma\cos\vartheta+Ah)\,\mathrm{sen}^2\vartheta-(Cn\cos\vartheta-l)^2$$

si avrà

$$A\,\mathrm{sen}\,\vartheta\frac{d\vartheta}{dt_1}=\pm\sqrt{R},$$

e se vogliamo che $\mathrm{sen}\,\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$ sia positivo, dovremo prendere il segno inferiore nel secondo membro, talchè sarà

$$dt_1=-\frac{A\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{R}},$$

$$d\psi=\frac{Cn\cos\vartheta-l}{\mathrm{sen}\,\vartheta\sqrt{R}}d\vartheta,$$

$$d\varphi=\frac{n(C-A)}{A}dt_1+\frac{Cn-l\cos\vartheta}{\mathrm{sen}\,\vartheta\sqrt{R}}d\vartheta.$$

ed integrando, avremo

$$t_0 - t_1 = \int \frac{A \operatorname{sen} \vartheta}{\sqrt{R}} d\vartheta ,$$

$$\psi - \psi_0 = \int \frac{C n \cos \vartheta - l}{\operatorname{sen} \vartheta \sqrt{R}} d\vartheta .$$

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{n(A-C)}{A}(t_0 - t_1) + \int \frac{C n - l \cos \vartheta}{\operatorname{sen} \vartheta \sqrt{R}} d\vartheta .$$

Gli integrali che qui si presentano sono quegli stessi che sono stati trasformati dal LOTTNER (*) e col porre

$$u = (t_0 - t_1) m ,$$

ove m è una costante che dipende da quelle del problema, egli ha trovato

$$\cos \vartheta = \frac{-1}{H_1\big(i(a_1+a_2)\big) H_1\big(i(a_1-a_2)\big) \Theta^2(u)}$$

$$\left\{ H^2(i a_1) \Theta_1(u + i a_2) \Theta_1(u - i a_2) + H_1^2(i a_2) \Theta(u + i a_1) \Theta(u - i a_1) \right\} ,$$

$$\psi - \psi_0 = u \left\{ \frac{C n \alpha_1 - l}{1 - \alpha_1^2} \cdot \frac{1}{m A} - \frac{\partial \log \Theta(i a_1)}{\partial a_1} - \frac{\partial \log \Theta_1(i a_2)}{\partial a_2} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u - i a_1) \Theta_1(u - i a_2)}{\Theta(u + i a_1) \Theta_1(u + i a_2)} ,$$

$$\varphi - \varphi_0 = u \left\{ \frac{n(A-C)}{m A} + \frac{C n - l \alpha_1}{(1 - \alpha_1^2) m A} - \frac{\partial \log \Theta(i a_1)}{\partial a_1} + \frac{\partial \log \Theta_1(i a_2)}{\partial a_2} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u - i a_1) \Theta_1(u + i a_2)}{\Theta(u + i a_1) \Theta_1(u - i a_2)} ;$$

le a_1, a_2, α_1 sono costanti che dipendono dai dati del problema.

(*) C. LOTTNER, *Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punct rotirenden Revolutions-Körpers auf die elliptischen Transcendentem.* Journal f. d. Math. Vol. L, pag. 111.

Gli angoli φ e ψ saranno espressi per mezzo di sole funzioni periodiche del tempo se agli assi $\xi\eta$ nel piano orizzontale ed agli assi xy nel piano dell'equatore si daranno due movimenti con velocità angolari proporzionali ad $e^{-\lambda t}$.

Padova, Giugno 1885.

RELAZIONE

del Socio Lessona, *condeputato col Socio* Salvadori *ad esaminare la Memoria del Prof.* B. Grassi, *intitolata:* ***I progenitori degli insetti e dei miriapodi — Morfologia delle Scolopendrelle.***

Il Professore B. Grassi è conosciuto e lodato per molte e segnalate pubblicazioni.

Una serie di queste si riferisce al parassitismo, e tratta di parassiti di varie classi.

Fra le pubblicazioni del Professore Grassi vuol essere segnalato un lavoro anatomico sulla anatomia dei Tisanuri, e vuol essere in modo al tutto speciale segnalata la pubblicazione sulla anatomia e sistematica dei chilognati, con aggiunte embriologiche.

Il Professore Grassi è maestro nell'arte d'investigare la struttura degli animali che viene studiando, e ha quelle qualità del vero naturalista che fanno riconoscere la affinità e i rapporti.

Il lavoro che qui si presenta ora è di molta importanza. L'autore si propone di studiare l'origine dei miriapodi e degli insetti, e per ciò vuol fare tener dietro a questo un altro lavoro sugli atteri.

Comincia questa Memoria con cenni sistematici sulle Scolopendrelle. Vengono esposti i caratteri essenziali delle tre specie sole ammesse dal Letzel, e di una specie nuova scoperta dall'autore, che ha trovato le quattro specie in Italia.

Alcuni cenni corologici fanno vedere come il tipo delle Scolopendrelle sia notevolissimo per la sua grande estensione geografica e il numero piccolissimo delle specie che lo compongono, ciò che, nota l'autore, suol essere tratto caratteristico delle specie filogeneticamente primitive.

Lo studio anatomico delle Scolopendrelle è condotto con molta

diligenza e molta maestria. L'ordine della parte anatomica è il seguente: *a*) cuticola e ipoderma-endoscheletro; — *b*) sistema nerveo; — *c*) organi di senso; — *d*) sistema respiratorio; — *e*) sistema digerente; — *f*) corpo adiposo; — *g*) vaso dorsale e vaso sopraspinale; — *h*) ghiandole sericee; — *i*) vescicole ventrali (segmentali); — *l*) organi sessuali; — *m*) arti.

Lo studio minuto anatomico ed istologico di tutte queste parti è illustrato da settantasette figure in tre tavole.

Dopo di avere notato la incertezza del posto sistematico delle Scolopendrelle, l'autore paragona successivamente questi generi coi pauropodi, coi protosingnati, cogli archipolipodi, coi chilopodi, coi diplopodi.

Rispetto ai pauropodi, egli nota tali affinità fra questi e il genere studiato, che ne viene indotto a raccogliere in un unico ordine i sinfili (Scolopendrelle) e i pauropodi.

Nota molte somiglianze fra le Scolopendrelle e i protosingnati (genere Palaeocampa), che sono miriapodi siluriani.

Anche maggiori affinità egli trova cogli archipolipodi, miriapodi carboniferi.

Conchiude con queste parole: « I sinfili (Scolopendrelle) per certi caratteri si avvicinano agli archipolipodi, per certi altri ai diplopodi, per certi altri ai protosingnati, per altri infine ai chilopodi. Essi hanno parentele con ciascuno di questi ordini, ma, contrappesando le or citate somiglianze. . . . . ne risulta che essi non si possono incorporare con nissuno degli or nominati ordini. Però i pauropodi devono forse aggregarsi alle Scolopendrelle. . . . . ».

L'autore paragona poi le Scolopendrelle col *Peripatus*, e ne desume che « le due forme, in confronto, non possono certamente considerarsi legate da una parentela molto prossima ».

Infine, l'autore mette a confronto le Scolopendrelle cogli atteri e coi miriapodi (*campodex*, *japyx*, *machilis*, *nicoletia*).

Egli conchiude. . . . . « le Scolopendrelle sono forme vivamente interessanti; esse hanno intimi rapporti cogli atteri e coi miriapodi. La loro precisa posizione nel sistema verrà da me definita dopo che saranno rese di pubblica ragione le mie ricerche sugli atteri ».

La Memoria del Professore Grassi porta molta luce intorno a un gruppo di animali poco conosciuti finora e importanti pei loro rapporti.

Questi rapporti l'autore seppe ricercare e dichiarare con molto acume, come seppe dar opera maestrevolmente alle ricerche anatomiche e istologiche, per cui gli infrascritti giudicano degnissimo di essere accolto il lavoro del Professore Grassi per la pubblicazione nelle *Memorie* dell'Accademia.

TOMMASO SALVADORI.

MICHELE LESSONA, *Relatore.*

La Classe, udita la lettura del lavoro del GRASSI, ne approva la pubblicazione nel volume delle *Memorie* dell'Accademia.

SULLA FLESSIBILITÀ DELL' ITACOLUMITE.

Nota del Socio Prof. G. Spezia

La flessibilità dell'Itacolumite fu già studiata da parecchi litologi e la causa di tale particolare proprietà, secondo l'opinione più generale che emerge dalle osservazioni bibliografiche, pare sia dovuta alla presenza di esili lamelle o di mica o di clorite o di talco, le quali intrecciandosi od anche avvolgendo i granuli di quarzo rendono la massa leggermente flessibile.

L'occasione di avere ricevuto alcuni esemplari d'Itacolumite della Carolina del Nord, nei quali il minerale flessibile (così chiamerò per brevità la mica, il talco e la clorite) è scarso ed in piccolissime lamelle che non superano la lunghezza di un millimetro, m'indusse ad esaminare se realmente questa proprietà debba sempre attribuirsi alla presenza di un minerale flessibile.

E le mie osservazioni mi convinsero che la flessibilità può esistere anche se la roccia è costituita assolutamente da soli granuli di quarzo purchè questi abbiano una forma ed una disposizione adatte.

Gli esemplari da me studiati sono tagliati in lunghi prismi a base rettangolare, e si osserva una flessibilità omogenea per varie direzioni; e tenendo il prisma da un'estremità e scotendolo, si sente il rumore caratteristico dell'urtarsi delle particelle che lo compongono, urto che naturalmente stabilisce una certa mobilità di esse.

Fatte alcune sezioni per l'esame al microscopio dei granuli quarzosi, trovai che la forma e la mutua disposizione di essi possono da sole spiegare meccanicamente la causa della flessibilità.

Infatti, come risulta dalla figura 1, che rappresenta una sezione con 20 diametri d'ingrandimento, la linea di contorno di ciascun granulo segue perfettamente quella dei vicini per qualunque sinuosità, ossia ad ogni prominenza di un granulo corrisponde esattamente il vano di quello adiacente.

Si noti poi che tale aspetto si presenta per qualunque direzione si tagli la roccia; perciò appare che i granuli per la loro forma e disposizione costituiscono un intreccio di articolazioni, il quale tenendoli uniti permette loro, entro certi limiti, un movimento che dà alla massa intiera la flessibilità.

Lo stesso fatto si osserva nell'Itacolumite di Mariaña (Brasile), la quale è più macromera di quella della Carolina. E la figura 2 rappresenta l'immagine ingrandita di 10 diametri della superficie levigata di un pezzo di Itacolumite stato previamente imbibito di balsamo e ceralacca rossa.

A me pare abbastanza evidente che il detto intreccio di granuli capaci di un certo movimento possa da solo spiegare la flessibilità anche senza la presenza di un minerale flessibile.

Ma altre considerazioni sono da aggiungersi che concordano colla deduzione fatta dall'osservazione sulla struttura.

Nell'Itacolumite della Carolina il minerale flessibile è scarso ed in lamelle così piane e piccole che la sua presenza non potrebbe assolutamente spiegare la capillarità intergranulare della roccia colla tenacità di essa.

Infatti oltre la flessibilità uniforme, l'Itacolumite da me studiata è anche assai porosa, il qual carattere è contrario all'esistenza fra i granuli di quarzo di un materiale compatto, il quale sia flessibile ed in pari tempo offra una certa resistenza allo staccarsi dei grani fra loro. E se si vuol supporre che detto materiale flessibile sia anche poroso per la facile sua sfaldatura, diminuirà certamente la sua coesione e perciò la tenacità della roccia; perchè nelle roccie di eguali componenti minerali, si può ammettere che la porosità sia inversamente proporzionale alla tenacità quando questa dipenda esclusivamente dall'adesione o dei soli granuli di minerale fra loro o del cemento ai granuli che lo rinserrano.

Ora nell'Itacolumite (intendo sempre quella da me studiata) la porosità e la tenacità sono in tale rapporto che, a mio avviso, i granuli non si possono ritenere uniti per semplice adesione.

La porosità è dimostrata sia dalla grande facilità con cui s'infiltra fra i granuli il balsamo di Canadà il quale indurendosi toglie la flessibilità alla roccia, sia dal pronto assorbimento di ogni liquido.

Da una esperienza da me fatta con acqua distillata ottenni che la quantità assorbita da un prisma di grammi 186,444 di peso, fu di grammi 5,825. Il volume del prisma imbibito di acqua lo trovai di cc. 73,5; del quale naturalmente cc. 5,825, ossia il peso dell'acqua assorbita, rappresentavano il volume complessivo degli spazi intergranulari ossia la porosità, ed il resto di cc. 67,675 rappresentavano il volume complessivo dei granuli quarzosi e delle lamelle di minerale flessibile.

Ora tale porosità mi pare considerevole in rapporto alla tenacità.

Questa io la sperimentai sottoponendo un prisma della roccia ad uno sforzo di trazione con direzione parallela al piano di sfaldatura delle lamelle di materiale flessibile ed alla maggiore loro lunghezza, la quale, come già dissi, è di circa un millimetro. Ed il peso necessario per ottenere la rottura fu di chilogrammi 29,66 per una sezione di cq. 6,29.

Ora mi sembra che, tenendo conto della flessibilità e della porosità osservate nell'Itacolumite della Carolina, la presenza del minerale flessibile in piccole lamelle piane e poco abbondanti non potrebbe spiegare la tenacità trovata; la quale rimane invece dimostrata se si attribuisce la resistenza alla separazione dei granuli, all'intreccio di essi quale appare nell'esame microscopico. Perchè è naturale che in questo caso entrerebbe come causa sufficiente della tenacità della roccia la resistenza che oppone il quarzo alla rottura per flessione e trazione, perchè dovrebbero rompersi le prominenze le quali s'internano reciprocamente fra granuli attigui formando le articolazioni.

Quindi ammettendo che i granuli per la loro forma e disposizione possano dare tenacità alla roccia senza esservi fra loro la vera adesione, ma solo per essere collegati nell'intreccio, nulla osta che siano anche suscettibili di un piccolo movimento individuale il quale darebbe alla massa complessiva la flessibilità, la quale non avrebbe in conseguenza bisogno di un minerale flessibile per esistere.

Inoltre la flessibilità così originata potrebbe essere omogenea secondo varie direzioni, come avviene nei prismi d'Itacolumite da

me esaminata, e non si confonderebbe colla flessibilità laminare, che si può constatare nelle lastre sottili di alcuni micaschisti ed anche di gneiss molto micacei, nella quale l'arco di flessione si trova ben pronunciato solamente in un piano normale a quello di schistosità, ossia al piano delle lamelle del minerale flessibile.

Tale flessibilità laminare dipenderebbe dall'elasticità delle lamelle del minerale flessibile fortemente aderenti ai granuli dei minerali componenti la roccia; mentre la flessibilità per intreccio dipenderebbe dal movimento dei granuli collegati fra loro come nella flessibilità di una catena.

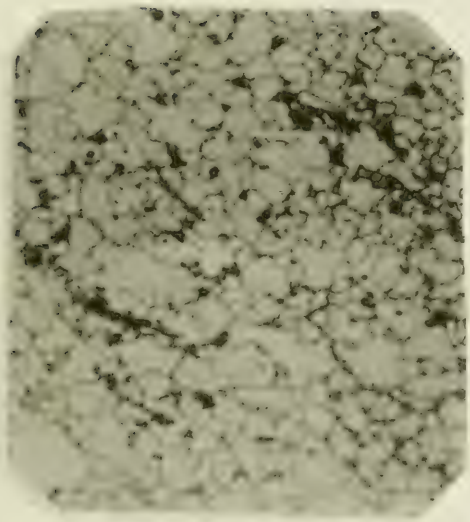
Io credo sarebbe utile che qualcuno, fornito del materiale necessario, facesse uno studio comparativo sulle varie Itacolumiti più o meno ricche di minerale flessibile; perchè, a mio parere, ne avrebbero vantaggio anche le osservazioni geologiche riguardo il modo di formazione di tale roccia.

E se l'Itacolumite flessibile si trova, secondo l'osservazione di Orville A. Derby (1), in banchi disseminati nell'Itacolumite non flessibile, sarebbe il confronto delle relative strutture assai importante, massime se, stando al parere del detto osservatore, devesi ritenere l'Itacolumite flessibile come l'alterazione prodotta dalle acque dell'Itacolumite rigida. E la struttura ad intreccio spiegherebbe meglio il mantenersi della tenacità in una roccia che per alterazione passa dallo stato rigido a quello flessibile. Perchè si potrebbe facilmente supporre che nell'Itacolumite non flessibile il movimento dei granuli sia impedito dall'esistenza negli spazi intergranulari di un cemento il quale, corroso poi dalle acque, renderebbe libero il muoversi dei granuli lasciandoli tuttavia collegati fra loro e l'Itacolumite acquisterebbe la flessibilità pur mantenendo una certa tenacità.

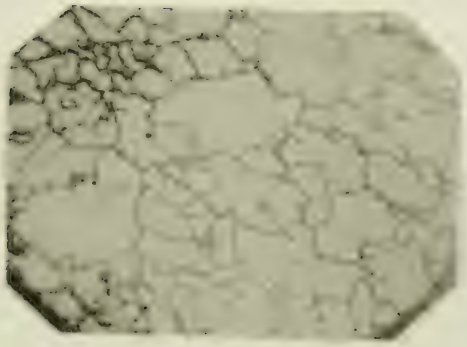
---

(1) *On the Flexibility of Itacolumite.* - The American Journal of science Vol. XXVIII, pag. 203.

1



2



Torino, Fototip. Doyen.

SULLA

STORIA NATURALE

E SUL

SIGNIFICATO CLINICO-PATOLOGICO

DELLE COSÌ DETTE ANGUILLULE INTESTINALI E STERCORALI.

Osservazioni del Dott. Prof. Camillo Golgi *e di* Achille Monti,
presentate dal Socio G. Bizzozero

La *dimorfobiosi*, o possibilità di presentare due forme di vita, la vita libera e la vita parasitaria, fino a questi ultimi anni non era stata con certezza dimostrata che per l'ascaris nigrovenosa delle rane e per la Leptodera appendiculata delle limacee.

Le nostre ricerche ne hanno permesso di dimostrare che tale fenomeno biologico è presentato anche da un parasita dell'uomo, e — perchè forme molto affini (forse varietà) di questo parasita sembrano ospiti di molti mammiferi — ne hanno dato di concludere che la dimorfobiosi, questo fenomeno tanto importante per la dimostrazione della filogenia dei parasiti, è molto diffusa.

La specie che fu oggetto del nostro studio è l'anguilla intestinale di Normand e Bavay, nematode affine agli strongili scoperto nell'intestino tenue di soldati reduci dalla Cocincina e ritenuto dagli scopritori ben distinto dall'Anguillula stercorale, forma molto affine alle rabditi della terra, pure descritta da Normand e Bavay, trovata nelle feci degli ammalati stessi.

Ma il Grassi studiando l'Anguillula intestinale e le sue larve, riconosciuta la somiglianza di queste colle figure che Normand-Bavay e Perroncito danno delle larve di Anguillula stercorale fu indotto a supporre che l'Anguillula intestinale fosse dimorfobiotica e che l'Anguillula stercorale ne fosse la forma libera.

Alla stessa conclusione giunse il Leuckart studiando le larve trovate nelle feci sviluppantisi nelle colture in Anguillule stercorali perfette.

Invece il Perroncito dai suoi studi concluse che l'Anguillula intestinale e l'Anguillula stercorale fossero due specie distinte di parasiti: egli credette di avere riconosciuto le uova, le larve, le forme perfette di entrambe, di avere insomma completamente dimostrato il ciclo di sviluppo delle due forme, alla prima delle quali diede il nome *Strongilus papillosus*, alla seconda quello di *Pseudorhabditis stercoralis*.

L'importante questione era insoluta quando alcuni casi di infezione anguillulare verificatisi nel comparto clinico annesso all'Istituto di patologia generale in Pavia ne permisero di intraprendere alcune ricerche sullo sviluppo, sulla sede, sul valore patogenico delle Anguillule.

L'esame delle feci di alcuni ammalati ne mostrò le caratteristiche larve rabditiformi che il Grassi ed i Parona riferirono all'Anguillula intestinale e che il Perroncito credette esclusive dell'Anguillula stercorale (vedi fig. 3, 4).

L'esame dell'intestino all'autopsia di due ammalati ne mostrò che dal retto al duodeno abbondavano le larve trovate nelle feci e che — mentre mancavano affatto quelle uova, che il Perroncito attribuì all'Anguillula intestinale, mentre le più attente ricerche provarono l'assenza dell'Anguillula stercorale adulta — nel muco del duodeno esistevano numerose le Anguillule intestinali colle loro caratteristiche uova, quali già furono bene descritte da Grassi e Parona (fig. 1).

Da ciò si dovette concludere che le larve osservate nelle feci durante la vita dell'ospite erano figlie di Anguillule intestinali. La coltura di queste larve a 20-22° *C.*, fatta colle maggiori cautele atte ad escludere il possibile inganno derivante da una invasione di nematodi liberi, ne dimostrò il graduale accrescimento (fig. 3, 4, 5) e infine dopo tre giorni lo sviluppo di esse in Anguillule stercorali adulte (fig. 6) quali già Normand-Bavay, Perroncito, Leuckart descrissero.

La questione era risolta: noi potevamo affermare con assoluta certezza che *l'Anguillula stercorale non è una specie distinta, essa è la forma libera di un'unica specie dimorfobiotica, di cui l'Anguillula intestinale è la forma parasitica.* — L'Anguillula stercorale dunque non è un parasita dell'intestino

umano, ma è un nematode libero che si sviluppa dai rampolli di un parasita portati all'esterno, e produce larve suscettibili di riprendere la tipica forma del parasita se nuovamente portate nell'intestino dell'uomo.

Nella previsione di questo fatto il Leuckart aveva proposto per la supposta unica specie il nome *Rhabdonema strongyloides*, nome che indica l'aspetto delle due forme, la somiglianza di esse con l'ascaris nigrovenosa (*Rhabdonema nigrovenosum*) e l'affinità della forma parasita con gli strongilidi.

La comparazione delle due forme sessuate (la libera e la parasita) dimostra la loro differente posizione sistematica (vedi fig. 1, 6): anche le uova appaiono notevolmente diverse, essendo quelle della forma parasita (Anguillula intestinale) lunghe 65-70 μ, larghe 30-39 μ, e spesso unite in catene per un peduncolo o tubetto ialino (fig. 2), mentre quelle della forma libera (Anguillula stercorale) sono lunghe 48-50 μ, larghe 38-40 μ (fig. 7). Le uova della forma libera talora sono emesse, talora si sviluppano nel corpo della madre. Le larve che ne derivano hanno aspetto rabditiforme come le larve figlie di Anguillula intestinale, ma dopo 24 ore di accrescimento appaiono trasformate da rabditiformi in filariformi e spesso incapsulate dentro una chiara guaina formata dalla cuticola staccatasi (fig. 8).

Qualche volta ne parve che le larve figlie di Anguillula intestinale — in rapporto forse alle condizioni di temperatura e di nutrizione — si trasformassero direttamente da rabditiformi in filariformi *senza dare la generazione libera.*

Le uova della forma parasita si sviluppano nel corpo dell'ospite e nelle feci si trovano solo le larve rabditiformi. Come mai le uova deposte dalla Anguillula intestinale fossero — in condizioni normali — trascinate col contenuto intestinale lo abbiamo compreso dopo le ricerche microscopiche intorno alla sede ed ai rapporti del parasita nell'intestino. Le numerose sezioni del duodeno ne mostrarono molte Anguillule intestinali adulte colla parte del corpo corrispondente all'apertura sessuale ripiegata ed introdotta nel lume delle ghiandole del Lieberkühn, frequentissimi gruppi di 2-6 uova disposti nei fondi ciechi e infine non rare larve occupanti i dotti delle ghiandole stesse. Ne fu obbiettato che questa sede insolita del parasita e delle sue uova fosse un fatto postmortale. Ciò appariva già poco probabile perchè le osservazioni riferivansi a pezzi tolti dal cadavere otto ore dopo

la morte. Ogni dubbio in proposito ne fu tolto per l'esame delle sezioni di duodeno preso da una donnola ancora viva e ospitante numerosissime Anguillule. I risultati di quell'esame hanno confermato le nostre osservazioni già fatte sull'intestino dell'uomo e ne hanno convinto che le Anguillule depongono le loro uova nelle ghiandole del Lieberkühn ad ospite ancora vivente e che ivi le uova si sviluppano come in un nido.

Questa sede del parasita richiamò la nostra attenzione sulla sua influenza morbosa già studiata clinicamente da altri, ritenuta gravissima dal Normand (che credette l'Anguillula fosse causa della diarrea endemica di Cocincina) e nulla dal Grassi (che dichiarò l'Anguillula un innocuo commensale). L'esame delle sezioni del duodeno ne mostrò una tumefazione dei follicoli solitari e un'infiltrazione diffusa di leucociti tra la *muscolaris mucosae* e il fondo cieco delle ghiandole (vedi fig. 9): tuttavia queste alterazioni possono essere riferite ad uno stato morboso da altra causa, mentre ne parve che più direttamente accennasse ad un'azione esercitata dal verme la distruzione dell'epitelio e i fatti di rigenerazione del medesimo manifestantisi per la scissione indiretta dei nuclei, verificati con maggiore abbondanza nelle ghiandole in cui il parasita aveva deposto le uova.

Se l'Anguillula ha una qualunque influenza morbosa non sarà inutile per la pratica richiamare l'attenzione sul modo di riconoscere la presenza del parasita nell'intestino. La diagnosi di infezione anguillulare deve fondarsi sulla presenza delle larve nelle feci: solo dopo somministrato un drastico si trovarono nelle feci anche le uova, le quali però noi giudicammo sicuramente riconoscibili in confronto di quelle d'anchilostoma e per le dimensioni e per la forma allungata e perchè contenenti *embrioni completamente sviluppati.*

SPIEGAZIONI DELLE FIGURE

Figura 1. Aspetto dell'Anguillula intestinale disegnata otto ore dopo la morte dell'ospite. Oc. 3. Obb. 7, tubo chiuso. Hartnack.

Id. 2. Diversi modi di presentarsi delle uova di Anguillula intestinale otto ore dopo la morte dell'ospite. Oc. 3. Ob. 8. Id.

Id. 3. Larva rabditiforme presa dall'intestino dell'uomo. Id.

Id. 4 e 5. Larva rabditiforme presa dalle colture. Id.

Id. 6. Anguillula stercorale adulta ♀. Oc. 3. Ob. 7. Id.

Id. 7. Uova di Anguillula stercorale. Oc. 3. Ob. 8. Id.

Id. 8. Larva filariforme derivata da una larva figlia di Anguillula stercorale. Oc. 3. Ob. 8. Id.

Id. 9. Sezione della mucosa del duodeno dimostrante la sede del parasita, l'infiltrazione leucocitica tra la *muscolaris mucosae* e l'epitelio delle ghiandole, e la cariocinesi di alcuni elementi di quest'ultimo. Oc. 3. Ob. 7. Id.

Id. 10. Larve ed uova nelle feci dopo un drastico. Oc. 3. Ob. 5. Id.

Id. 11. Frammenti di Anguillula che presenta un distacco della cuticola in vicinanza dell'apertura sessuale (probabile effetto di imbibizione cadaverica).

Lavori del Dott. Angelo CHARRIER, Assistente all'Osservatorio astronomico della R. Università di Torino, presentati dal Socio Prof. ALESSANDRO DORNA per la solita annessione agli *Atti*.

1° *Effemeridi del Sole, della Luna e dei principali Pianeti calcolate per Torino in tempo medio civile di Roma per l'anno* 1886;

2° *Osservazioni meteorologiche dei mesi di Maggio, Giugno, Luglio, Agosto, Settembre ed Ottobre* 1885;

3° *Diagrammi di dette Osservazioni per ciascun mese;*

4° *Riassunti mensili di dette Osservazioni.*

— SOLE —

Gennaio

Giorno del Mese	Tempo medio di Roma: Nascere		Passaggio al meridiano	Tramontare		Declinazione a mezzodì vero	Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h m s	h	m		h	m	s
1	8	0	0 22 52·16	4	46	22° 59′ 30″7A	18	25	6·54
2	8	0	23 20·36	4	47	22 54 12·9	18	29	3·09
3	8	0	23 48·22	4	48	22 48 27.7	18	32	59·65
4	8	0	24 15.67	4	48	22 42 15 3	18	36	56·21
5	8	0	24 42·72	4	49	22 35 35·8	18	40	53·77
6	8	0	25 9·31	4	50	22 28 29·5	18	44	49·33
7	8	0	25 35·43	4	52	22 20 56·7	18	48	45·89
8	8	0	26 1·02	4	53	22 12 57·5	18	52	42·45
9	7	59	26 26·07	4	54	22 4 32·3	18	56	39·00
10	7	59	26 50·57	4	55	21 55 41·1	19	0	35·55
11	7	58	27 14·46	4	57	21 46 24·3	19	4	32·10
12	7	58	27 37·74	4	58	21 36 42·2	19	8	28·65
13	7	57	28 0 37	4	59	21 26 34·9	19	12	25·21
14	7	57	28 22·33	5	0	21 16 2 9	19	16	21·76
15	7	57	28 43·61	5	1	21 5 6·3	19	20	18·31
16	7	56	29 4·19	5	3	20 53 45·7	19	24	14 87
17	7	55	29 24·06	5	4	20 42 1·3	19	28	11·43
18	7	54	29 43·19	5	6	20 29 53·2	19	32	8·00
19	7	54	30 1·59	5	7	20 17 24·0	19	36	4·56
20	7	53	30 19·23	5	9	20 4 28·0	19	40	1·12
21	7	52	30 36·12	5	10	19 51 11·4	19	43	57·68
22	7	52	30 52·26	5	11	19 37 32·7	19	47	54·23
23	7	51	31 7·62	5	12	19 23 32·2	19	51	50·79
24	7	50	31 22·21	5	14	19 9 10·1	19	55	47·34
25	7	49	31 36·02	5	15	18 54 26·9	19	59	43·89
26	7	48	31 49·05	5	16	18 39 23·0	20	3	40·44
27	7	47	32 1·29	5	18	18 23 58·7	20	7	36 99
28	7	46	32 12·74	5	19	18 8 14·4	20	11	33·55
29	7	45	32 23·39	5	20	17 52 10·6	20	15	30·10
30	7	44	32 33·24	5	22	17 35 47 6	20	19	26·66
31	7	43	32 42·28	5	23	17 19 5·7	20	23	23·22

— SOLE —

Febbraio

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		Passaggio al meridiano			Tramontare		DECLINAZIONE a mezzodì vero			TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h	m	s	h	m				h	m	s
1	7	42	0	32	50·51	5	25	17°	2′	5″7 A	20	27	19·78
2	7	41		32	57·93	5	26	16	44	47·7	20	31	16·34
3	7	40		33	4·52	5	27	16	27	12·1	20	35	13·89
4	7	38		33	10·30	5	29	16	9	19·5	20	39	9·45
5	7	37		33	15·28	5	30	15	51	10·1	20	43	6·00
6	7	35		33	19·43	5	32	15	32	44·6	20	47	2·55
7	7	34		33	22·78	5	33	15	14	3·2	20	50	59·10
8	7	33		33	25·30	5	34	14	55	6·4	20	54	55·65
9	7	32		33	27·03	5	36	14	35	54·6	20	58	52·20
10	7	30		33	27·95	5	38	14	16	28·4	21	2	48·75
11	7	28		33	28·07	5	39	13	56	47·9	21	6	45·30
12	7	27		33	27·42	5	40	13	36	53·6	21	10	41·85
13	7	26		33	25·99	5	42	13	16	46·2	21	14	38·41
14	7	24		33	23·78	5	43	12	56	25·8	21	18	34·97
15	7	23		33	20·82	5	45	12	35	53·0	21	22	31·53
16	7	21		33	17·13	5	46	12	15	8·2	21	26	28·09
17	7	19		33	12·70	5	47	11	54	11·8	21	30	24·65
18	7	18		33	7·58	5	49	11	33	4·1	21	34	21·20
19	7	16		33	1·77	5	51	11	11	45·6	21	38	17·75
20	7	15		32	55·29	5	52	10	50	16·6	21	42	14·30
21	7	13		32	48·16	5	54	10	28	37·5	21	46	10·85
22	7	11		32	40·42	5	55	10	6	48·6	21	50	7·39
23	7	10		32	23·05	5	56	9	44	50·6	21	54	3·94
24	7	8		32	23·10	5	58	9	22	43·5	21	58	0·50
25	7	6		32	13·58	5	59	9	0	27·9	22	1	57·05
26	7	4		32	3·50	6	1	8	38	4·3	22	5	53·61
27	7	2		31	52·87	6	2	8	15	33·0	22	9	50·16
28	7	1		31	11·72	6	3	7	52	54·4	22	13	46·72

— SOLE —

Marzo

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere	Passaggio al meridiano	Tramontare	DECLINAZIONE a mezzodì vero	TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma
	h m	h m s	h m		h m s
1	6 59	0 31 30·07	6 5	7° 30′ 8″9A	22 17 43·28
2	6 57	31 17·91	6 6	7 7 16·9	22 21 39·83
3	6 55	31 5·29	6 8	6 43 18·9	22 25 36·38
4	6 54	30 52·20	6 9	6 21 15·1	22 29 32·93
5	6 52	30 38·67	6 10	5 58 6·2	22 33 29·48
6	6 50	30 24·72	6 11	5 35 52·3	22 37 26·03
7	6 48	30 10·35	6 13	5 11 33·9	22 41 22·57
8	6 46	29 55·57	6 15	4 48 11.6	22 45 19·12
9	6 44	29 40.43	6 16	4 24 45·5	22 49 15·67
10	6 43	29 24·91	6 17	4 1 16·2	22 53 12·22
11	6 41	29 9·06	6 18	3 37 43·9	22 57 8·77
12	6 39	28 52·87	6 20	3 14 9·2	23 1 5·33
13	6 37	28 36·38	6 21	2 50 32·3	23 5 1·88
14	6 35	28 19·58	6 23	2 26 53·6	23 8 58.44
15	6 34	28 2·54	6 24	2 3 13·6	23 12 55·00
16	6 32	27 45·23	6 25	1 39 32·6	23 16 51·55
17	6 30	27 27·69	6 26	1 15 51·0	23 20 48·11
18	6 27	27 9·96	6 28	0 52 9·2	23 24 44·66
19	6 25	26 52·05	6 29	0 28 27·3	23 28 41·21
20	6 24	26 33·99	6 30	0 4 45·9A	23 32 37·75
21	6 22	26 15·79	6 31	0 18 54·7B	23 36 34·30
22	6 20	25 57·50	6 33	0 42 34·2	23 40 30·85
23	6 18	25 39·13	6 34	0 6 12·5	23 44 27·40
24	6 16	25 20·71	6 36	1 29 48·9	23 48 23·95
25	6 15	25 2·26	6 36	1 53 23·4	23 52 20·51
26	6 13	24 43·80	6 38	2 16 55·3	23 56 17 06
27	6 11	24 25·35	6 39	2 40 24·5	0 0 13·62
28	6 8	24 6·94	6 41	3 3 50·5	0 4 10·17
29	6 6	23 48·57	6 42	3 27 13·0	0 8 6·73
30	6 5	23 30·27	6 43	3 50 31·6	0 12 3·28
31	6 3	23 12 06	6 44	4 13 46·1	0 15 59·83

— SOLE —

Aprile

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		Passaggio al meridiano	Tramontare		DECLINAZIONE a mezzodì vero	TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h m s	h	m		h	m	s
1	6	1	0 22 53·95	6	45	4° 36′ 58″0B	0	19	56·38
2	5	59	22 35 97	6	47	5 0 0·9	0	23	52 93
3	5	58	22 18·11	6	48	5 23 0·6	0	27	49·47
4	5	56	22 0·42	6	49	5 45 54·6	0	31	46·02
5	5	54	21 42·89	6	51	6 8 42·7	0	35	42·57
6	5	52	21 25·55	6	52	6 31 24·4	0	39	39·12
7	5	51	21 8·39	6	53	6 53 59·4	0	43	35·67
8	5	49	20 51·46	6	54	6 16 27·3	0	47	32 22
9	5	47	20 34·76	6	56	7 38 47·8	0	51	28·78
10	5	45	20 18·28	6	56	8 1 0.5	0	55	25·34
11	5	43	20 2·07	6	58	8 23 5·2	0	59	21·90
12	5	41	19 46·12	6	59	8 45 1·4	1	3	18·46
13	5	39	19 30·47	7	1	9 6 48·6	1	7	15·01
14	5	38	19 15·13	7	2	9 28 26·8	1	11	11·56
15	5	36	19 0·09	7	3	9 49 55·4	1	15	8·11
16	5	35	18 45·41	7	4	10 11 14·2	1	19	4·66
17	5	33	18 31·08	7	6	10 32 23·0	1	23	1·21
18	5	31	18 17·13	7	7	10 53 21·3	1	26	57·76
19	5	30	18 3·59	7	8	11 14 8·7	1	30	54·31
20	5	28	17 50·46	7	9	11 34 45·3	1	34	50·86
21	5	26	17 37·77	7	10	11 55 10·4	1	38	47·42
22	5	24	17 25·52	7	12	12 15 23·8	1	42	43·97
23	5	22	17 13·73	7	13	12 35 25·3	1	46	40·53
24	5	21	17 2·43	7	14	12 55 11·5	1	50	37 09
25	5	19	16 51·63	7	15	13 14 51·0	1	54	33·65
26	5	18	16 41·32	7	17	13 34 14·6	1	58	30·20
27	5	16	16 31·52	7	18	13 53 24·9	2	2	26·76
28	5	14	16 22·25	7	20	14 12 21·5	2	6	23·31
29	5	13	16 13·52	7	21	14 31 4·2	2	10	19·86
30	5	12	16 5·31	7	22	14 49 32·7	2	14	16·40

— SOLE —

Maggio

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		DECLINAZIONE a mezzodì vero	TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h	m s	h	m		h	m	s
1	5	10	0	15 57·65	7	23	15° 7′ 46″6B	2	18	12·95
2	5	8		15 50·55	7	25	15 25 45·1	2	22	9·50
3	5	6		15 44·00	7	26	15 43 29·3	2	26	6·05
4	5	5		15 37·99	7	27	16 0 57·5	2	30	2·61
5	5	4		15 32·55	7	28	16 18 9·8	2	33	59·16
6	5	3		15 27·66	7	29	16 35 5·9	2	37	55·72
7	5	1		15 23·33	7	31	16 51 45·5	2	41	52·38
8	5	0		15 19·55	7	32	17 8 8·2	2	45	48·84
9	4	59		15 16·32	7	33	17 24 13·8	2	49	45·40
10	4	58		15 13·66	7	34	17 40 1·9	2	53	41·96
11	4	56		15 11·54	7	35	17 55 32·3	2	57	38·52
12	4	55		15 9·97	7	37	18 10 44·6	3	1	35·07
13	4	53		15 8·96	7	38	18 25 38·4	3	5	31·62
14	4	52		15 8·51	7	39	18 40 13·7	3	9	28·17
15	4	51		15 8·60	7	40	18 54 30·0	3	13	24·72
16	4	50		15 9·27	7	41	19 8 27·1	3	17	21·27
17	4	49		15 10·49	7	42	19 22 4·8	3	20	17·83
18	4	48		15 12·27	7	43	19 35 22·9	3	25	14·38
19	4	47		15 14.60	7	45	19 48 21·0	3	29	10·94
20	4	46		15 17·49	7	45	20 0 58·8	3	33	7·50
21	4	45		15 20·93	7	46	20 13 16·3	3	37	4·06
22	4	44		15 24·92	7	48	20 25 13·1	3	41	0·62
23	4	43		15 29·45	7	49	20 36 49·0	3	44	57·18
24	4	42		15 34·52	7	50	20 48 3·7	3	48	53·74
25	4	42		15 40·10	7	50	20 58 57·1	3	52	50·29
26	4	41		15 46·21	7	51	21 9 28·9	3	56	46·84
27	4	40		15 52·82	7	52	21 19 38·8	4	0	43·39
28	4	39		15 59·91	7	53	21 29 26·6	4	4	39·95
29	4	38		16 7·49	7	54	21 38 52·3	4	8	36·50
30	4	38		16 15·53	7	55	21 47 55·4	4	12	33·05
31	4	38		16 24·01	7	56	21 56 35·8	4	16	29·60

— SOLE —

Giugno

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere	Passaggio al meridiano	Tramontare	DECLINAZIONE a mezzodì vero	TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma
	h m	h m s	h m		h m s
1	4 37	0 16 32·82	7 56	22° 4′ 53″5 B	4 20 26.16
2	4 36	16 42·24	7 57	22 12 48·0	4 24 22·72
3	4 36	16 51·93	7 58	22 20 19·5	4 28 19·28
4	4 35	17 1·99	7 59	22 27 27·5	4 32 15·74
5	4 35	17 12·38	8 0	22 34 12·0	4 36 12·41
6	4 34	17 23·09	8 1	22 40 32·8	4 40 8·97
7	4 34	17 34·09	8 2	22 46 29·8	4 44 5·53
8	4 34	17 45·36	8 2	22 52 2·8	4 48 2·08
9	4 34	17 56·88	8 2	22 57 11·6	4 51 58·63
10	4 34	18 8·61	8 3	23 1 56·2	4 55 55·19
11	4 33	18 20·56	8 4	23 6 16·7	4 59 51·74
12	4 33	18 32·70	8 4	23 10 12·2	5 3 48·29
13	4 33	18 45·00	8 5	23 13 43·4	5 7 44·85
14	4 33	18 57·44	8 5	23 16 50·1	5 11 41·40
15	4 33	19 10·02	8 6	23 19 32·2	5 15 37·96
16	4 33	19 22·71	8 6	23 21 49·5	5 19 34·51
17	4 33	19 35·50	8 7	23 23 42.2	5 23 31·09
18	4 33	19 48·35	8 7	23 25 10·2	5 27 27·65
19	4 34	20 1·26	8 7	23 26 13·4	5 31 24·21
20	4 34	20 14·20	8 7	23 26 51·7	5 35 20·77
21	4 34	20 27·15	8 7	23 27 5·2	5 39 17·32
22	4 34	20 40·09	8 8	23 26 54·0	5 43 13·88
23	4 34	20 53·00	8 8	23 26 17·8	5 47 10·43
24	4 34	21 5·85	8 8	23 25 17·0	5 51 6·98
25	4 34	21 18·62	8 8	23 23 51·5	5 55 3·53
26	4 35	21 31·29	8 8	23 22 1·1	5 59 0·08
27	4 35	21 43·84	8 8	23 19 46·1	6 2 56·64
28	4 36	21 56·25	8 8	23 17 6·6	6 6 53·19
29	4 36	22 8·48	8 8	23 14 1·4	6 10 49·75
30	4 37	22 20·51	8 8	23 10 34·0	6 14 46·31

— SOLE —

Luglio

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		DECLINAZIONE a mezzodì vero	TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h	m s	h	m		h	m	s
1	4	37	0	22 32·22	8	8	23° 6′ 41″1 B	6	18	32·88
2	4	37		22 43·87	8	8	23 2 24·1	6	22	39·44
3	4	38		22 55·14	8	8	22 57 42·9	6	26	36·00
4	4	38		23 6·12	8	8	22 52 37·7	6	30	32·56
5	4	39		23 16·75	8	7	22 47 8·7	6	34	29·12
6	4	40		23 27·03	8	7	22 41 15·9	6	38	25·67
7	4	40		23 36·93	8	6	22 34 59·5	6	42	22·22
8	4	41		23 46·44	8	6	22 28 19·4	6	46	18·78
9	4	42		23 55·51	8	5	22 21 16·4	6	50	15·33
10	4	43		24 4·19	8	5	22 13 50·0	6	54	11·88
11	4	44		24 12·40	8	4	22 6 0·7	6	58	8·44
12	4	45		24 20·15	8	4	21 57 48·6	7	2	5·00
13	4	45		24 27·44	8	3	21 49 14·0	7	6	1·56
14	4	46		24 34·23	8	3	21 40 17·0	7	9	58·12
15	4	47		24 40·54	8	2	21 30 57·7	7	13	54.68
16	4	48		24 46·34	8	1	21 21 16·5	7	17	51·24
17	4	49		24 51·63	8	0	21 11 13·5	7	21	47·80
18	4	50		24 56·39	7	59	21 0 49·1	7	25	44·35
19	4	51		25 0·64	7	58	20 50 2·3	7	29	40·91
20	4	52		25 4·34	7	57	20 38 56·3	7	33	37·46
21	4	53		25 7·51	7	56	20 27 28·5	7	37	34·01
22	4	54		25 10·13	7	56	20 15 40·0	7	41	30·56
23	4	55		25 12·18	7	55	20 3 31·1	7	45	27·11
24	4	56		25 13·69	7	54	19 51 2·0	7	49	23·66
25	4	57		25 14·62	7	52	19 38 13·1	7	53	20·22
26	4	59		25 14·99	7	51	19 25 4·5	7	57	16·77
27	4	59		25 14·79	7	51	19 11 36·6	8	1	13·33
28	5	0		25 14·01	7	49	18 57 49·6	8	5	9·89
29	5	1		25 12 63	7	48	18 43 43·8	8	9	6·45
30	5	3		25 10·66	7	47	18 29 19·5	8	13	3·02
31	5	4		25 8·09	7	45	18 14 37·1	8	16	59·57

— SOLE —

Agosto

Giorno del Mese	Tempo medio di Roma: Nascere		Passaggio al meridiano			Tramontare		Declinazione a mezzodì vero	Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h	m	s	h	m		h	m	s
1	5	4	0	25	4·92	7	45	17°, 59′ 36″7 B	8	20	56·13
2	5	6		25	1·14	7	43	17 44 18·7	8	24	52·68
3	5	7		24	56·74	7	42	17 28 43·4	8	28	47·23
4	5	8		24	51·72	7	40	17 12 51·2	8	33	45·78
5	5	10		24	46·08	7	39	16 56 42·2	8	36	42·33
6	5	11		24	39·82	7	38	16 40 16·8	8	40	38·89
7	5	11		24	32·96	7	37	16 23 35·2	8	44	35·44
8	5	13		24	25·48	7	35	16 6 37·9	8	48	32·00
9	5	14		24	17·40	7	33	15 49 25·0	8	52	28·56
10	5	16		24	8·73	7	32	15 31 57·0	8	56	25·11
11	5	17		23	59·48	7	30	15 14 14·1	9	0	21·67
12	5	17		23	49·66	7	29	14 56 16·6	9	4	18·23
13	5	19		23	39·28	7	28	14 38 4·8	9	9	14·78
14	5	20		23	28·34	7	26	14 19 39·2	9	12	11·34
15	5	21		23	16·85	7	24	14 8 59·8	9	16	7·89
16	5	22		23	4·86	7	22	13 42 7·1	9	20	4·44
17	5	23		22	52·34	7	21	13 23 1·1	9	24	0·99
18	5	25		22	39·33	7	20	13 3 42·5	9	27	57·54
19	5	26		22	25·83	7	18	12 44 11·4	9	31	54·08
20	5	28		22	11·86	7	16	12 24 28·1	9	35	50·63
21	5	29		21	57·44	7	14	12 4 32·9	9	39	47·18
22	5	29		21	42·57	7	13	11 44 26·1	9	43	43·74
23	5	31		21	27·28	7	11	11 24 8·2	9	47	40·29
24	5	32		21	11·57	7	9	11 3 39·3	9	51	36·85
25	5	34		20	55·46	7	7	10 42 59·7	9	55	33·41
26	5	35		20	38·97	7	5	10 22 9·9	9	59	29·97
27	5	36		20	22·09	7	4	10 1 10·1	10	3	26·53
28	5	37		20	4·87	7	2	9 45 0·9	10	7	22·08
29	5	38		19	47·27	7	0	9 18 42·2	10	11	19·63
30	5	40		19	29·34	6	58	8 57 14·7	10	15	16·18
31	5	41		19	11·08	6	57	8 35 38·6	10	19	12·73

— SOLE —

Settembre

Giorno del Mese	Tempo medio di Roma: Nascere	Passaggio al meridiano	Tramontare	Declinazione a mezzodì vero	Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma
	h m	h m s	h m		h m s
1	5 42	0 18 52·49	6 55	8° 13′ 54″3 B	10 23 9·28
2	5 43	18 33·59	6 53	7 52 2·0	10 27 5·83
3	5 44	18 14·41	6 51	7 30 2·2	10 31 2·38
4	5 46	17 54·94	6 49	7 7 55·0	10 34 58·93
5	5 47	17 35·21	6 48	6 45 41·0	10 38 55·49
6	5 48	17 15·25	6 46	6 23 20·5	10 42 52·05
7	5 49	16 55·05	6 44	6 0 53·7	10 46 48·60
8	5 51	16 34·66	6 42	5 38 20·9	10 50 45·17
9	5 52	16 14·09	6 40	5 15 42·5	10 54 41·72
10	5 52	15 53·35	6 39	4 52 58·9	10 58 38·27
11	5 54	15 32·47	6 36	4 30 10·4	11 2 34·82
12	5 55	15 11·47	6 34	4 7 17·2	11 6 31·36
13	5 56	14 50·39	6 33	3 44 19·6	11 10 27·91
14	5 57	14 29·22	6 31	3 21 18·1	11 14 24·46
15	5 58	14 8·01	6 29	2 58 12·8	11 18 21·00
16	6 0	13 46.77	6 27	2 34 44·1	11 22 17·55
17	6 0	13 25.53	6 26	2 11 52·3	11 26 14·10
18	6 2	13 4·29	6 24	1 48 37·8	11 30 10·65
19	6 3	12 43·12	6 21	1 25 20·8	11 34 7·21
20	6 5	12 22·00	6 19	1 2 1·6	11 37 3·76
21	6 5	12 0·97	6 18	0 38 40·7	11 42 0·32
22	6 6	11 40·05	6 16	0 15 18·4 B	11 45 56·88
23	6 8	11 19·25	6 14	0 8 5·1 A	11 49 53·44
24	6 9	10 58·60	6 12	0 31 29·4	11 53 49·99
25	6 10	10 38·11	6 10	0 54 54·0	11 56 6·54
26	6 11	10 17·81	6 8	1 18 18·5	12 1 43·09
27	6 13	9 57·70	6 6	1 41 43·0	12 5 39·64
28	6 14	9 37·80	6 4	2 5 6·6	12 9 36·18
29	6 16	9 18·04	6 2	2 28 29·4	12 13 32·73
30	6 17	8 58·62	6 0	2 51 50·5	12 17 29·28

— SOLE —

Ottobre

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere	Passaggio al meridiano	Tramontare	DECLINAZIONE a mezzodì vero	TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma
	h m	h m s	h m		h m s
1	6 18	0 8 39·55	5 59	3° 15′ 19″9A	12 21 25·83
2	6 19	8 20·67	5 57	3 38 27·2	12 25 22·39
3	6 20	8 2·07	5 55	4 1 42·0	12 29 18·95
4	6 22	7 43·80	5 53	4 24 53·7	12 33 15·50
5	6 23	7 25·87	5 51	4 48 2·3	12 37 12·06
6	6 24	7 8 28	5 50	5 11 7·1	12 41 8·62
7	6 25	6 51·06	5 48	5 34 8·1	12 45 5·17
8	6 27	6 34·26	5 45	5 57 4·6	12 49 1·72
9	6 28	6 17·87	5 43	6 19 56·3	12 52 58·27
10	6 29	6 1·91	5 42	6 42 43·0	12 56 54·81
11	6 30	5 46·43	5 40	7 5 24·2	13 0 51·36
12	6 32	5 31·42	5 38	7 27 59·7	13 4 47·91
13	6 34	5 16·92	5 36	7 50 29·0	13 8 44·46
14	6 34	5 2·95	5 35	8 12 51·7	13 12 41·00
15	6 36	4 49·53	5 33	8 35 7·6	13 16 37·55
16	6 37	4 36·68	5 31	8 57 16·3	13 20 34·11
17	6 38	4 24·42	5 30	9 19 17·3	13 24 30·67
18	6 39	4 12·78	5 29	9 41 14·4	13 28 27·23
19	6 41	4 1·76	5 27	10 2 55·2	13 32 24·79
20	6 42	3 51·39	5 25	10 24 31·1	13 36 20·34
21	6 44	3 41·70	5 23	10 45 58·0	13 40 16·90
22	6 45	3 32·68	5 22	11 7 15·4	13 44 13·45
23	6 46	3 24·43	5 20	11 28 22·8	13 48 10·00
24	6 48	3 16·75	5 18	11 49 19·9	13 52 6·55
25	6 49	3 9·86	5 17	12 10 6·2	13 56 3·10
26	6 51	3 3·70	5 16	12 30 41·4	13 59 59·65
27	6 51	2 58·27	5 17	12 51 5·1	14 3 56·20
28	6 53	2 53·60	5 12	13 11 16·8	14 7 52·75
29	6 55	2 49·68	5 10	13 31 16·1	14 11 49·31
30	6 56	2 46·52	5 9	13 51 2·5	14 15 45·87
31	6 58	2 44·12	5 8	14 10 35·6	14 19 42·43

— SOLE —

Novembre

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		Passaggio al meridiano			Tramontare		DECLINAZIONE a mezzodì vero	TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h	m	s	h	m		h	m	s
1	6	58	0	2	40·50	5	6	14° 29′ 55″1A	14	23	39·99
2	7	0		2	41·66	5	5	14 49 0·5	14	27	35·54
3	7	2		2	41·61	5	3	15 7 51·4	14	31	32·10
4	7	3		2	42·36	5	2	15 26 27·3	14	35	28·65
5	7	5		2	43·92	5	0	15 44 47·8	14	39	25·20
6	7	5		2	46·29	5	0	16 2 52·7	14	43	21·75
7	7	7		2	49·48	4	58	16 20 41·3	14	47	18·30
8	7	9		2	53·49	4	57	16 38 13·5	14	51	14·85
9	7	10		2	58·34	4	55	16 55 28 6	14	55	11·40
10	7	12		3	4·03	4	54	17 12 26·5	14	59	7·95
11	7	12		3	10·57	4	53	17 29 6·7	15	3	4·50
12	7	14		3	17·94	4	52	17 45 28·7	15	7	1·06
13	7	16		3	26·43	4	51	18 1 32·3	15	10	57·62
14	7	17		3	35·26	4	50	18 17 17·0	15	14	54·18
15	7	19		3	45·21	4	48	18 32 42·4	15	18	50·74
16	7	19		3	56·00	4	48	18 47 48·3	15	22	47·30
17	7	21		4	7·66	4	47	19 2 34·2	15	26	43·86
18	7	22		4	20·17	4	46	19 18 59·7	15	30	40·42
19	7	24		4	33·52	4	45	19 31 4·4	15	34	36·97
20	7	26		4	47·72	4	44	19 44 48·0	15	38	33·52
21	7	26		5	2·76	4	44	19 58 10·1	15	42	30·07
22	7	28		5	18·61	4	43	20 11 10·4	15	46	26·62
23	7	29		5	35·26	4	42	20 23 48·4	15	50	23·18
24	7	30		5	52·70	4	41	20 36 2·8	15	54	19·73
25	7	32		6	10·92	4	40	20 47 55·4	15	58	16·29
26	7	33		6	29·88	4	40	20 59 25·6	16	2	12·85
27	7	34		6	49·58	4	40	21 10 31·2	16	6	9·41
28	7	35		7	9·99	4	39	21 21 12·8	16	10	5·97
29	7	36		7	31·08	4	38	21 31 30·2	16	14	2.53
30	7	38		7	52·84	4	38	21 41 23·0	16	17	59·09

— SOLE —

Dicembre

Giorno del Mese	Tempo medio di Roma: Nascere		Passaggio al meridiano			Tramontare		Declinazione a mezzodì vero			Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h	m	s	h	m				h	m	s
1	7	39	0	8	15·14	4	37	21°	50	50″8A	16	21	55·65
2	7	40		8	38·27	4	37	21	59	53·5	16	25	52·20
3	7	42		9	1·89	4	36	22	8	30·7	16	29	48·76
4	7	43		9	26·10	4	36	22	16	42·1	16	33	45·33
5	7	44		9	50·84	4	36	22	24	27·6	16	37	41·86
6	7	44		10	16·12	4	36	22	31	46·7	16	41	38·41
7	7	45		10	41·89	4	36	22	38	39·3	16	45	34·96
8	7	46		11	8·15	4	36	22	45	5·4	16	49	31·52
9	7	48		11	34·85	4	36	22	51	4·5	16	53	28·07
10	7	49		12	1·97	4	35	22	56	36·6	16	57	24·63
11	7	50		12	29·51	4	35	23	1	41·4	17	1	21·20
12	7	50		12	57·41	4	35	23	6	18·9	17	5	17·76
13	7	51		13	25·67	4	35	23	10	28·8	17	9	14·32
14	7	52		13	54·24	4	35	23	14	11·0	17	13	10·88
15	7	52		14	23·11	4	36	23	17	25·4	17	17	7·44
16	7	53		14	52·25	4	37	23	20	11·9	17	21	4·00
17	7	54		14	21·61	4	37	23	22	30.5	17	25	0·55
18	7	54		15	51·18	4	37	23	24	20.8	17	28	57·10
19	7	55		16	20·93	4	38	23	25	43·0	17	32	53·66
20	7	56		16	50.80	4	38	23	26	36·9	17	36	50·21
21	7	56		17	20·77	4	39	23	27	2·6	17	40	46·77
22	7	57		17	50·81	4	39	23	27	0·1	17	44	43·32
23	7	57		18	20·87	4	40	23	26	29·2	17	48	39·89
24	7	57		18	50·91	4	40	23	25	29·9	17	52	36·45
25	7	58		19	20·91	4	41	23	24	2·6	17	56	33·01
26	7	58		19	50·80	4	42	23	22	6·6	18	0	29·57
27	7	58		20	20·55	4	42	23	19	43·2	18	4	26·13
28	7	59		20	50·14	4	43	23	16	51·2	18	8	22·69
29	8	0		21	19·53	4	43	23	13	31·3	18	12	19·25
30	8	0		21	48·67	4	44	23	9	43·4	18	16	15·80
31	8	0		22	17·53	4	45	23	5	27·6	18	20	12·35

— LUNA —

Gennaio

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere	Passaggio al meridiano	Tramontare	GIORNO della Luna
	h m	h m	h m	
1	4 10 Mattino	9 17 Mattino	2 21 Sera	26
2	5 8	10 5	3 0	27
3	6 4	10 53	3 44	28
4	6 55	11 42	4 31	29
5	7 41	0 30 Sera	5 23	1
6	8 22	1 17	6 17	2
7	8 58	2 3	7 13	3
8	9 31	2 47	8 11	4
9	10 1	3 31	9 9	5
10	10 29	4 8	10 8	6
11	10 58	4 52	11 8	7
12	11 25	5 42	———	8
13	11 54	6 28	0 10 Mattino	9
14	0 26 Sera	7 16	1 12	10
15	1 2	8 8	2 18	11
16	1 43	9 3	3 25	12
17	2 33	10 2	4 32	13
18	3 30	11 3	5 35	14
19	4 37	———	6 37	15
20	5 49	0 6 Mattino	7 31	16
21	7 4	1 7	8 18	17
22	8 20	2 6	9 0	18
23	9 34	3 3	9 36	19
24	10 45	3 56	10 11	20
25	11 55	4 47	10 42	21
26	———	5 37	11 15	22
27	1 6 Mattino	6 26	11 48	23
28	2 2	7 14	0 23	24
29	3 3	8 3	1 1	25
30	3 59	8 51	1 43	26
31	4 51	9 39	2 28	27

Luna nuova il 5 a 8^h 33^m di matt.
Primo quarto il 13 a 1 14 di sera.
Luna piena il 20 a 8 34 di matt.
Ultimo quarto l' 27 a 2 21 di matt.

Febbraio

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere	Passaggio al meridiano	Tramontare	GIORNO della Luna
	h m	h m	h m	
1	5 39 Mattino	10 27 Mattino	3 19 Sera	28
2	6 21	11 14	4 11	29
3	7 0	0 0	5 8	30
4	7 34	0 45 Sera	6 4	1
5	8 5	1 29	7 2	2
6	8 34	2 13	8 1	3
7	9 2	2 56	9 1	4
8	9 28	3 40	10 1	5
9	9 57	4 25	11 2	6
10	10 28	5 11	———	7
11	11 1	6 0	0 6 Mattino	8
12	11 38	6 51	1 10	9
13	0 22 Sera	7 46	2 14	10
14	1 14	8 44	3 17	11
15	2 14	9 45	4 19	12
16	3 21	10 45	5 15	13
17	4 34	11 45	6 4	14
18	5 49	———	6 49	15
19	7 5	0 44 Mattino	7 29	16
20	8 20	1 40	8 5	17
21	9 34	2 34	8 39	18
22	10 43	3 27	9 12	19
23	11 49	4 18	9 47	20
24	———	5 8	10 22	21
25	0 52 Mattino	5 57	11 0	22
26	1 52	6 47	11 41	23
27	2 46	7 35	0 26	24
28	3 35	8 23	1 15	25

Luna nuova il 4 a 4^h 4^m di matt
Primo quarto il 12 a 3 36 di matt.
Luna piena il 18 a 7 4 di sera
Ultimo quarto il 25 a 6 1 di sera.

— LUNA —

Marzo

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	4	19	9	11	2	6	26
2	4	59	9	57	3	0	27
3	5	35	10	43	3	57	28
4	6	7	11	27	4	55	29
5	6	37	0	11	5	54	30
6	7	5	0	55	6	54	1
7	7	33	1	39	7	55	2
8	8	2	2	23	8	56	3
9	8	30	3	9	9	59	4
10	9	2	3	57	11	1	5
11	9	38	4	47	———		6
12	10	19	5	40	0	4	7
13	11	6	6	35	1	8	8
14	0	1	7	32	2	8	9
15	1	2	8	30	3	3	10
16	2	11	9	28	3	54	11
17	3	23	10	26	4	40	12
18	4	38	11	22	5	21	13
19	5	52	———		5	59	14
20	7	7	0	17	6	33	15
21	8	19	1	11	7	7	16
22	9	29	2	3	7	42	17
23	10	36	2	55	8	17	18
24	11	39	3	47	8	54	19
25	———		4	38	9	35	20
26	0	37	5	28	10	10	21
27	1	29	6	17	11	7	22
28	2	16	7	4	11	59	23
29	2	58	7	53	0	53	24
30	3	24	8	38	1	48	25
31	4	2	9	23	2	46	26

Luna nuova il 5 a 10^h 54^m di sera.
Primo quarto il 13 a 2 7 di sera.
Luna piena il 20 a 5 26 di matt.
Ultimo quarto il 27 a 11 34 di matt.

Aprile

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	4	39	10	7	3	45	27
2	5	7	10	51	4	45	28
3	5	35	11	35	5	45	29
4	6	4	0	20	6	47	30
5	6	33	1	6	7	50	1
6	7	5	1	54	8	55	2
7	7	39	2	44	9	59	3
8	8	19	3	36	11	3	4
9	9	3	4	31	———		5
10	9	55	5	27	0	3	6
11	10	54	6	23	1	4	7
12	11	58	7	20	1	51	8
13	1	7	8	16	2	36	9
14	2	19	9	11	3	18	10
15	3	31	10	5	3	55	11
16	4	44	10	57	4	29	12
17	5	57	11	50	5	3	13
18	7	8	———		5	37	14
19	8	16	0	42	6	10	15
20	9	22	1	34	6	47	16
21	10	24	2	26	7	26	17
22	11	20	3	17	8	11	18
23	———		4	8	8	57	19
24	0	10	4	58	9	48	20
25	0	54	5	46	10	42	21
26	1	33	6	33	11	38	22
27	2	8	7	18	0	35	23
28	2	40	8	2	1	33	24
29	3	9	8	46	2	32	25
30	3	37	9	30	3	32	26

Luna nuova il 4 a 3^h 20^m di sera.
Primo quarto il 11 a 9 33 di sera.
Luna piena il 18 a 3 48 di sera.
Ultimo quarto l' 26 a 6 5 di matt.

— LUNA —

Maggio

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	4	5	10	14	4	34	27
2	4	33	11	0	5	37	28
3	5	2	11	47	6	42	29
4	5	38	0	37	7	48	1
5	6	16	1	30	8	54	2
6	7	0	2	25	9	57	3
7	7	50	3	22	11	56	4
8	8	47	4	19	11	49	5
9	9	50	5	16	———		6
10	10	88	6	12	0	38	7
11	0	8	7	6	1	19	8
12	1	18	7	59	1	56	9
13	2	30	8	51	2	31	10
14	3	40	9	41	3	4	11
15	4	50	10	32	3	36	12
16	5	58	11	23	4	8	13
17	7	5	———		4	43	14
18	8	9	0	15	5	21	15
19	9	8	1	6	6	2	16
20	10	2	1	58	6	48	17
21	10	50	2	49	7	37	18
22	11	31	3	38	8	31	19
23	———		4	26	9	26	20
24	0	8	5	12	10	23	21
25	0	41	5	57	11	21	22
26	1	10	6	41	0	19	23
27	1	38	7	24	1	19	24
28	2	6	8	7	2	19	25
29	2	33	8	52	3	22	26
30	3	2	9	38	4	25	27
31	3	35	10	27	5	31	28

Luna nuova il 4 a 4^h 32^m di matt.
Primo quarto l' 11 a 3 10 di matt.
Luna piena il 18 a 2 36 di matt.
Ultimo quarto il 26 a 0 25 di matt.

Giugno

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	4	10	11	18	6	37	29
2	4	52	0	14	7	44	30
3	5	41	1	11	8	47	1
4	6	36	2	10	9	44	2
5	7	40	3	9	10	36	3
6	8	47	4	7	11	20	4
7	9	58	5	3	12	0	5
8	11	9	5	57	———		6
9	0	20	6	48	0	35	7
10	1	31	7	39	1	8	8
11	2	39	8	28	1	46	9
12	3	47	9	18	2	11	10
13	4	54	10	8	2	44	11
14	5	58	10	59	3	19	12
15	6	58	11	50	3	58	13
16	7	53	———		4	41	14
17	8	44	0	41	5	29	15
18	9	28	1	31	6	20	16
19	10	8	2	19	7	15	17
20	10	42	3	7	8	12	18
21	11	13	3	52	9	9	19
22	11	41	4	36	10	8	20
23	———		5	19	11	6	21
24	0	9	6	2	0	5	22
25	0	35	6	45	1	6	23
26	1	3	7	30	2	8	24
27	1	33	8	17	3	12	25
28	2	6	9	6	4	17	26
29	2	54	9	59	5	23	27
30	3	29	10	55	6	29	28

Luna nuova il 2 a 2^h 45^m di sera.
Primo quarto il 9 a 8 16 di matt.
Luna piena il 16 a 2 28 di sera.
Ultimo quarto il 24 a 5 24 di sera.

— LUNA —

Luglio

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	4	21	11	55	7	31	29
2	5	22	0	55	8	26	1
3	6	29	1	56	9	16	2
4	7	41	2	54	9	58	3
5	8	55	3	50	10	37	4
6	10	8	4	44	11	11	5
7	11	21	5	36	11	44	6
8	0	31	6	26	—	—	7
9	1	39	7	16	0	15	8
10	2	46	8	6	0	47	9
11	3	50	8	55	1	21	10
12	4	51	9	46	1	58	11
13	5	48	10	36	2	40	12
14	6	39	11	26	3	25	13
15	7	26	—	—	4	14	14
16	8	7	0	15	5	8	15
17	8	43	1	2	6	3	16
18	9	15	1	48	7	1	17
19	9	44	2	23	7	59	18
20	10	12	2	16	8	56	19
21	10	39	3	59	9	55	20
22	11	5	4	42	10	55	21
23	11	34	5	25	11	55	22
24	—	—	6	10	0	57	23
25	0	5	6	58	2	0	24
26	0	39	7	46	3	4	25
27	1	17	8	48	4	9	26
28	2	7	9	37	5	12	27
29	3	2	10	36	6	11	28
30	4	7	11	37	7	4	29
31	5	17	0	38	7	51	1

Luna nuova il 1° a 10h 56m di sera.
Primo quarto l' 8 a 2 8 di matt.
Luna piena il 16 a 3 58 di matt
Ultimo quarto il 24 a 8 11 di matt.
Luna nuova l' 31 a 6 15 di matt.

Agosto

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	6	32	1	37	8	33	2
2	7	48	2	34	9	10	3
3	9	3	3	28	9	42	4
4	10	17	4	21	10	17	5
5	11	28	5	12	10	50	6
6	0	37	6	3	11	23	7
7	1	42	6	53	0	0	8
8	2	44	7	43	—	—	9
9	3	43	8	33	0	39	10
10	4	36	9	23	1	23	11
11	5	24	10	11	2	11	12
12	6	6	10	59	3	3	13
13	6	44	11	46	3	57	14
14	7	18	—	—	4	53	15
15	7	48	0	32	5	51	16
16	8	16	1	15	6	49	17
17	8	43	1	57	7	48	18
18	9	9	2	40	8	47	19
19	9	37	3	23	9	46	20
20	10	6	4	6	10	47	21
21	10	38	4	52	11	49	22
22	11	14	5	39	0	50	23
23	11	57	6	29	1	53	24
24	—	—	7	23	2	55	25
25	0	48	8	19	3	55	26
26	1	45	9	18	4	49	27
27	2	52	10	18	5	39	28
28	4	4	11	18	6	23	29
29	5	20	0	16	7	3	30
30	6	37	1	13	7	39	1
31	7	54	2	8	8	14	2

Primo quarto il 6 a 9h 56m di sera.
Luna piena il 14 a 7 13 di sera
Ultimo quarto il 22 a 8 31 di sera
Luna nuova il 29 a 1 44 di sera.

— LUNA —

Settembre

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	9	Mattino 9	3	Sera 2	8	Sera 48	3
2	10	21	3	54	9	22	4
3	11	30	4	46	9	59	5
4	0	Sera 35	5	38	10	38	6
5	1	36	6	29	11	21	7
6	2	32	7	19	———		8
7	3	21	8	8	0	Mattino 7	9
8	4	5	8	56	0	58	10
9	4	44	9	43	1	51	11
10	5	19	10	29	2	48	12
11	5	50	11	13	3	46	13
12	6	19	11	56	4	43	14
13	6	46	———		5	42	15
14	7	14	0	Mattino 39	6	41	16
15	7	40	1	22	7	40	17
16	8	9	2	5	8	40	18
17	8	40	2	50	9	41	19
18	9	14	3	36	10	43	20
19	9	54	4	25	11	44	21
20	10	40	5	16	0	Sera 46	22
21	11	33	6	10	1	44	23
22	———		7	5	2	39	24
23	0	Mattino 34	8	3	3	29	25
24	1	42	9	1	4	14	26
25	2	53	9	58	4	55	27
26	4	8	10	55	5	32	28
27	5	25	11	51	6	7	29
28	6	41	0	Sera 46	6	41	1
29	7	56	1	40	7	17	2
30	9	9	2	34	7	53	3

Primo quarto il 5 a 8^h 45^m di matt.
Luna piena il 13 a 11 40 di matt.
Ultimo quarto il 21 a 6 45 di matt.
Luna nuova il 27 a 10 8 di sera.

Ottobre

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	10	Matt 19	3	Sera 27	8	Sera 33	4
2	11	24	4	20	9	14	5
3	0	Sera 23	5	12	10	1	6
4	1	16	6	3	10	51	7
5	2	3	6	52	11	45	8
6	2	44	7	40	———		9
7	3	21	8	26	1	Mattino 40	10
8	3	42	9	10	1	37	11
9	4	22	9	54	2	25	12
10	4	50	10	36	3	26	13
11	5	17	11	19	4	32	14
12	5	43	———		5	32	15
13	6	12	0	Mattino 3	6	33	16
14	6	42	0	48	7	34	17
15	7	15	1	34	8	35	18
16	7	53	2	22	9	39	19
17	8	36	3	13	10	40	20
18	9	27	4	5	11	40	21
19	10	24	5	0	0	Sera 35	22
20	11	28	5	56	1	26	23
21	———		6	51	2	10	24
22	0	36	7	47	2	52	25
23	1	47	8	42	3	28	26
24	3	0	9	36	4	3	27
25	4	16	10	30	4	37	28
26	5	39	11	24	5	11	29
27	6	44	0	Sera 18	5	46	1
28	7	54	1	12	6	24	2
29	9	5	2	6	7	5	3
30	10	8	3	0	7	51	4
31	11	7	3	53	8	41	5

Primo quarto il 4 a 11^h 23^m di sera.
Luna piena il 13 a 4 13 di matt.
Ultimo quarto il 20 a 3 30 di sera.
Luna nuova il 27 a 8 5 di matt.

— LUNA —

Novembre

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	11	M. 57	4	Sera 44	9	Sera 33	6
2	0	Sera 42	5	33	10	29	7
3	1	21	6	20	11	26	8
4	1	54	7	6	—	—	9
5	2	24	7	50	0	Mattino 25	10
6	2	53	8	33	1	24	11
7	3	20	9	15	2	22	12
8	3	46	9	58	3	21	13
9	4	14	10	43	4	21	14
10	4	43	11	29	5	23	15
11	5	15	—	—	6	26	16
12	5	51	0	Mattino 17	7	30	17
13	6	34	1	8	8	33	18
14	7	22	2	1	9	34	19
15	8	20	2	56	10	32	20
16	9	19	3	52	11	24	21
17	10	27	4	48	0	Sera 9	22
18	11	36	5	43	0	53	23
19	—	—	6	37	1	30	24
20	0	Mattino 43	7	30	2	4	25
21	1	59	8	22	2	37	26
22	3	11	9	14	3	9	27
23	4	23	10	6	3	42	28
24	5	34	10	59	4	18	29
25	6	35	11	52	4	56	30
26	7	51	0	Sera 46	5	40	1
27	8	53	1	40	6	28	2
28	9	48	2	33	7	20	3
29	10	37	3	24	8	16	4
30	11	18	4	13	9	13	5

Primo quarto il 3 a 5^h 55^m di sera.
Luna piena il 11 a 7 56 di sera.
Ultimo quarto il 18 a 11 30 di sera.
Luna nuova il 25 a 8 8 di sera.

Dicembre

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	11	M. 56	4	Sera 59	10	Sera 12	6
2	0	Sera 26	5	44	11	11	7
3	0	55	6	28	—	—	8
4	1	22	7	10	0	Mattino 9	9
5	1	48	7	53	1	8	10
6	2	15	8	36	2	7	11
7	2	43	9	21	3	8	12
8	3	13	10	8	4	11	13
9	3	48	10	58	5	14	14
10	4	28	11	51	6	19	15
11	5	14	—	—	7	22	16
12	6	9	0	Mattino 46	8	23	17
13	7	9	1	44	9	20	18
14	8	16	2	41	10	10	19
15	9	26	3	38	10	54	20
16	10	38	4	34	11	33	21
17	11	50	5	27	0	Sera 8	22
18	—	—	6	19	0	41	23
19	1	Mattino 0	7	10	1	12	24
20	2	11	8	1	1	44	25
21	3	21	8	52	2	17	26
22	4	30	9	43	2	53	27
23	5	37	10	36	3	33	28
24	6	39	11	29	4	18	29
25	7	37	0	Sera 22	5	9	1
26	8	28	1	14	6	2	2
27	9	14	2	4	6	59	3
28	9	53	2	52	7	58	4
29	10	26	3	38	8	58	5
30	10	56	4	22	9	56	6
31	11	25	5	5	10	55	7

Primo quarto il 3 a 3^h 15^m di sera.
Luna piena il 11 a 10 19 di matt.
Ultimo quarto il 18 a 11 29 di matt.
Luna nuova il 25 a 10 44 di matt.

ECCLISSI

(1886)

---

5 *Marzo.* Ecclisse annulare di Sole invisibile a Torino.

29 *Agosto.* Ecclisse totale di Sole invisibile a Torino.

EFFEMERIDI

DI

Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno

1886.

PI

TEMPO MEDIO DI ROMA	MERCURIO						VENERE					
	Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare	
	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m
1 Gennaio	6	16	10	51	3	26	10	22	3	28	8	37
11 »	6	22	10	47	3	14	9	48	3	12	8	36
21 »	6	43	11	3	3	25	9	8	2	46	8	24
1 Febbraio	7	3	11	29	3	57	8	14	2	2	7	51
11 »	7	14	11	57	4	43	7	16	1	7	6	58
21 »	7	22	0	26	5	35	6	18	0	4	5	50
1 Marzo	7	19	0	50	6	26	5	39	11	18	4	57
11 »	7	10	1	18	7	30	5	1	10	32	4	3
21 »	6	51	1	31	8	23	4	35	10	2	3	29
1 Aprile	6	14	1	7	8	0	4	17	9	43	3	11
11 »	5	25	0	2	6	36	4	1	9	32	3	6
21 »	4	50	11	9	5	28	3	47	9	27	3	9
1 Maggio	4	26	10	43	5	3	3	33	9	24	3	18
11 »	4	9	10	39	5	12	3	18	9	23	3	30
21 »	3	59	10	51	5	48	3	3	9	23	3	43
1 Giugno	4	2	11	25	6	54	2	49	9	25	4	4
11 »	4	30	0	15	8	8	2	37	9	28	4	29
21 »	5	18	1	9	9	5	2	25	9	33	4	4
1 Luglio	6	13	1	50	9	30	2	19	9	40	5	4
11 »	6	56	2	10	9	25	2	18	9	49	5	2
21 »	7	21	2	11	9	2	2	23	10	0	5	4
1 Agosto	7	11	1	45	8	19	2	34	10	13	5	5
11 »	6	16	0	51	7	24	2	51	10	26	6	
21 »	4	53	11	44	6	38	3	11	10	37	6	
1 Settembre	4	10	11	10	6	12	3	38	10	49	6	
11 »	4	40	11	25	6	12	4	3	10	58	5	5
21 »	5	38	11	54	6	12	4	36	11	6	5	4
1 Ottobre	6	32	0	20	6	9	4	56	11	13	5	3
11 »	7	23	0	41	6	0	5	22	11	19	5	1
21 »	8	9	1	0	5	52	5	49	11	26	5	
1 Novembre	8	54	1	20	5	48	6	18	11	34	4	5
11 »	9	23	1	35	5	48	6	46	11	43	4	4
21 »	9	19	1	30	5	41	7	13	11	54	4	3
1 Dicembre	8	1	0	29	4	56	7	40	0	7	4	3
11 »	6	20	11	7	3	54	8	2	0	21	4	4
21 »	6	7	10	45	3	25	8	21	0	37	4	5
31 »	6	30	10	55	3	21	8	32	0	52	5	1

ETI

MARTE						GIOVE						SATURNO					
Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare	
h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m
0	45	5	11	11	36	9	0	5	58	11	56	4	11	11	52	7	33
0	16	4	39	11	2	11	22	5	20	11	18	3	27	11	9	6	51
9	42	4	5	10	28	10	43	4	41	10	39	2	45	10	27	6	9
8	58	3	22	9	46	9	50	3	57	9	55	1	59	9	41	5	23
8	10	2	37	9	5	9	17	3	16	9	15	1	17	8	59	4	41
7	16	1	48	8	10	8	33	2	34	8	35	0	37	8	19	4	1
6	29	1	6	7	43	7	58	2	0	8	2	0	5	7	47	3	29
5	25	0	7	6	49	6	12	1	16	7	20	11	25	7	8	2	51
4	26	11	14	6	2	6	26	0	32	6	38	10	47	6	30	2	13
3	29	10	19	5	10	5	31	11	39	5	47	10	6	5	49	1	32
2	43	9	34	4	25	4	46	10	56	5	6	9	29	5	12	0	55
2	6	8	55	3	44	4	1	10	13	4	25	8	53	4	36	0	19
1	33	8	19	3	5	3	18	9	31	3	44	8	17	4	0	11	43
1	63	7	47	2	28	2	36	8	49	3	2	7	42	3	25	11	8
0	43	7	18	1	53	1	54	8	9	2	24	7	8	2	51	10	34
0	21	6	49	1	16	1	13	7	86	1	39	6	31	2	13	9	55
0	5	6	25	0	45	0	37	6	49	1	1	5	57	1	39	9	21
1	50	6	2	0	14	0	1	6	12	0	23	5	23	1	5	8	47
1	38	5	41	11	44	11	27	5	36	11	45	4	51	0	32	8	13
1	27	5	21	11	15	10	54	5	1	11	8	4	17	11	58	7	39
1	17	5	2	10	46	10	22	4	27	10	32	3	44	11	24	7	4
1	8	4	42	10	16	9	48	3	50	9	52	3	8	10	47	6	26
1	2	4	25	9	50	9	17	3	17	9	17	2	34	10	13	5	52
0	57	4	9	9	22	8	47	2	44	8	41	2	0	9	38	5	16
0	51	3	53	8	56	8	16	2	9	8	2	1	22	9	0	4	38
0	47	3	40	8	33	7	47	1	37	7	27	0	47	8	24	4	1
0	43	3	27	8	11	7	19	1	5	6	51	0	11	7	48	3	25
0	41	3	17	7	52	6	51	0	34	6	17	11	36	7	12	2	48
0	40	3	7	7	34	6	22	0	2	5	42	10	59	6	35	2	11
0	38	2	58	7	28	5	55	11	31	5	7	10	21	5	57	1	33
0	35	2	50	7	7	5	24	10	57	4	30	9	38	5	14	0	50
0	30	2	43	6	58	4	56	10	25	3	54	8	59	4	35	0	11
0	24	2	37	6	52	4	27	9	53	3	19	8	19	3	35	11	31
0	15	2	31	6	49	3	58	9	21	2	44	7	38	3	14	10	50
0	6	2	26	6	28	3	28	8	49	2	10	6	53	2	32	10	9
0	52	2	19	6	48	2	58	8	16	1	34	6	13	1	50	9	27
0	36	2	13	6	51	2	26	7	42	0	58	5	29	1	7	8	45

Anno XX **1885**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Maggio.

La media delle altezze barometriche in questo mese è di 34,59, inferiore di mm. 1,39 alla media delle altezze barometriche osservate negli ultimi diciannove anni. — Non si ebbero frequenti variazioni nell'altezza barometrica; alcune però furono considerevoli.

I valori massimi e minimi sono i seguenti:

Giorni del mese.	Massimi.	Giorni del mese.	Minimi.
2	32,59	5	23,10
10	40,39	15	19,81
17	36,37	18	31,78
29	42,07		

Il valor medio della temperatura di questo mese è $+16^{\circ},3$, più bassa del valor medio della temperatura di Maggio degli ultimi diciannove anni di $0^{\circ},6$.

Le temperature estreme $+6^{\circ},9$ e $+28^{\circ},2$ si ebbero: la prima nel giorno 19, la seconda nei giorni 30 e 31.

Si ebbero 6 giorni poco piovosi e l'acqua caduta raggiunse l'altezza di mm. 32,7; un terzo circa dell'altezza media dell'acqua caduta in Maggio nello scorso diciannovennio.

Il quadro seguente dà la frequenza dei venti nelle diverse direzioni.

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
11	14	41	17	12	6	12	3	8	5	5	4	11	7	4	4

Anno XX **1885**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Giugno.

Il valor medio dell'altezza barometrica, desunto dalle osservazioni fatte in questo mese, è 37,15; che supera di mm. 0,72 il valor medio dell'altezza barometrica di Giugno degli ultimi diciannove anni.

Le oscillazioni della colonna barometrica non furono numerose, lente bensì e di non grande ampiezza. — Il seguente quadro ne contiene i valori estremi.

Giorni del mese.	Minimi.	Giorni del mese.	Massimi.
1	33,97	5	42,54
9	34,62	13	43,33
21	29,73	23	41,11
30	32,60		

La temperatura variò fra + 13°, 0 e + 31, 7°; (minima del 23, e massima del 27). — La temperatura media + 22°, 8 supera di 1°, 6 la temperatura media di Giugno degli ultimi diciannove anni. — Si ebbero otto giorni con pioggia e l'altezza dell'acqua caduta fu di mm. 60, 8.

La frequenza dei singoli venti è data dalla seguente tabella:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
6	11	26	10	16	4	15	2	13	13	9	5	7	1	1	2

Anno XX **1885**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Luglio.

La pressione barometrica ha in questo mese per media 38, 21; superiore di mm. 1,37 alla media di Luglio degli ultimi diciannove anni. — La pressione variò pochissimo in questo mese, tranne nei primi giorni.

Il seguente quadro ne contiene i massimi e minimi valori:

Giorni del mese.	Massimi.	Giorni del mese.	Minimi.
3	43,04	9	36,98
15	40,13	17	35,23
21	40,97	24	35,65
27	38,89	31	34,15

La temperatura ha per valor medio + 24°, 7; valore che supera di 2° il valor medio della temperatura di Luglio degli ultimi diciannove anni. La temperatura minima si ebbe nel primo giorno del mese, e fu di + 14°, 7; la massima il giorno 21, e fu di + 32°, 0.

Undici furono i giorni con pioggia, e l'altezza dell'acqua caduta fu di mm. 102, 3.

La frequenza dei venti nelle singole direzioni è data dal quadro seguente:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
14	16	39	12	11	9	2	3	6	6	6	2	9	2	2	3

Anno XX **1885**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese d'Agosto.

La media delle pressioni barometriche osservate in questo mese è 35,18: inferiore di mm. 1, 65 alla pressione barometrica media (di Agosto) degli ultimi diciannove anni.

Il quadro seguente contiene i massimi ed i minimi delle pressioni osservate.

Giorni del mese.	Massimi.	Giorni del mese.	Minimi.
6	38,59	7	33,39
15	41,48	18	30,91
27	38,92	29	25,99

La temperatura ha per valor medio 22°, 5, ed è inferiore di solo 0°, 2 alla media temperatura di Agosto degli ultimi diciannove anni.

Le temperature estreme + 29°, 1 e + 13°, 8 si ebbero: la prima nel giorno 11, la seconda nei giorni 22 e 23.

Otto furono i giorni con pioggia, e l'acqua caduta raggiunse l'altezza di mm. 43, 9.

La frequenza dei singoli venti è data dalla tavola seguente:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
11	19	57	21	16	4	2	2	3	1	4	0	3	1	6	4

Anno XX **1885**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Settembre.

In questo mese le altezze barometriche osservate hanno per valor medio 37, 45, superato dal valor medio di Settembre degli ultimi diciannove anni di mm. 0, 73. Le oscillazioni furono abbastanza frequenti, e qualcheduna fu di ragguardevole ampiezza.

I valori massimi e minimi osservati sono i seguenti:

Giorni del mese.	Massimi.	Giorni del mese.	Minimi.
3	41,43	5	32,92
7	38,04	11	29,21
15	46,38	18	36,78
23	46,53	28	21,45

La temperatura ha per valor medio + 18°, 9; valore che supera appena di 0°, 1 il valor medio della temperatura del mese di Settembre degli ultimi diciannove anni.

I valori estremi + 26°, 0 e + 8°, 8 si ebbero: il primo nel giorno 23, nel giorno 30 il secondo.

Dieci furono i giorni con pioggia, e si raccolsero mm. 62, 6 d'acqua.

Il quadro seguente dà la frequenza dei venti:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
11	15	42	12	8	5	5	1	7	5	8	3	3	1	3	4

Anno XX **1885**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Ottobre.

La pressione barometrica ha per valor medio 33, 74. Esso è inferiore di mm. 3, 49 al valor medio della pressione di Ottobre degli ultimi diciannove anni.

L'andamento della pressione fu molto saltuario, ed ebbe variazioni molto grandi, come si può scorgere dal quadro seguente:

Giorni del mese.	Massimi.	Giorni del mese.	Minimi.
3	43,49	11	17,85
14	39,90	15	34,88
16	44,35	20	25,64
23	36,15	25	24,83
26	31,14	28	27,32
30	36,90		

La temperatura massima del mese fu di $+ 20^{\circ}, 3$, e si ebbe nel giorno 8; la minima $+ 3^{\circ}, 5$ nel giorno 30. La temperatura media del mese, $+ 11^{\circ}, 5$, è inferiore alla temperatura media di Ottobre degli ultimi diciannove anni di $1^{\circ}, 3$.

L'altezza dell'acqua caduta fu di mm. 117, 4, ed i giorni con pioggia furono tredici.

Il quadro seguente dà la frequenza dei venti:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
7	10	22	15	6	4	0	1	3	9	12	1	10	4	3	2

Gli altri lavori summentovati si pubblicheranno nel solito fascicolo annuale che va unito agli *Atti* dell'Accademia.

Adunanza del 29 Novembre 1885.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANGELO GENOCCHI

Sono presenti i Soci: GENOCCHI, FABRETTI, COSSA, SOBRERO, LESSONA, SALVADORI, BRUNO, BERRUTI, CURIONI, SIACCI, BASSO, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, MOSSO e SPEZIA.

Dichiaratasi aperta la seduta, il Segretario SOBRERO dà lettura del verbale dell'adunanza precedente, il quale viene approvato.

Il Presidente fa la seguente comunicazione:

A nome del nostro Corrispondente Professore H. A. SCHWARZ di Gottinga presento un Volume intitolato: *Sopra un problema del Calcolo delle Variazioni risguardante le superficie di minima area.* Esso fu pubblicato (Helsingfors, 1885) in occasione della festa datasi a Berlino per celebrare il natalizio dell'illustre Carlo WEIERSTRASS, che lo Schwarz chiama il suo altamente onorato maestro, e che noi godiamo di noverare tra i Soci stranieri della nostra Accademia, festa tenuta nel giorno 31 dello scorso ottobre, in cui Carlo Weierstrass compiva il suo settantesimo anno. Il Collega Schwarz ha desiderato che un esemplare di quel volume fosse presentato a questa Accademia; e aggiungeva « rivolgermi tale preghiera non solamente per la ra-
« gione che la medesima Accademia lo ha riputato degno della
« distinzione conferitagli col nominarlo suo Corrispondente, ma
« anche perchè un Matematico, il quale appartenne alla nostra
« Accademia, ha da più di cento anni primamente proposta,
« circa le superficie di area minima, la questione che ora, per
« quanto sembra essere in generale possibile, è compiutamente
« sciolta. Le molte difficoltà (dice ancora lo Schwarz) che an-

« darono sorgendo e che sembravano farsi sempre più grandi, fi-
« nalmente furono vinte (dopo tredici anni da che il lavoro era
« stato cominciato), e lo scopo, che era di costrurre una *com-*
« *piuta* catena di dimostrazioni, fu raggiunto ».

Il Socio LESSONA fa omaggio, a nome dell'autore, Prof. Camillo GOLGI, di un volume *Sulla Fisica anatomica degli organi centrati del sistema nervoso.* L'Accademia ringrazia l'autore.

Il Socio COSSA dona all'Accademia, a nome dell'autore, Prof. Enrico ROSENBUSCH da Stoccarda, una copia dell'opera sua, col titolo: *Fisiografia microscopica dei minerali più importanti.* L'Accademia con lettera speciale ringrazia l'autore, che essa annovera tra i suoi Corrispondenti.

Il Socio Segretario legge una lettera a lui diretta dal Corrispondente dell'Accademia, Dott. G. DE CIGALLA, dall'isola di Santorino, colla quale questi prega si faccia omaggio all'Accademia di un suo manoscritto che va unito alla lettera, e porta per titolo: *Dialogo tra il signor* BÜCHNER *e l'autore, circa il libro della forza e della materia*, pubblicato dallo stesso BÜCHNER. L'Accademia ringrazia il signor Dott. DE CIGALLA del suo dono, che resterà fra gli scritti conservati negli Archivi.

Adunanza del 13 Dicembre 1885.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANGELO GENOCCHI

Sono presenti i Soci GENOCCHI, COSSA, SOBRERO, LESSONA, DORNA, SALVADORI, BRUNO, SIACCI, BASSO, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, MOSSO, SPEZIA e GIBELLI.

Apertasi dal Presidente l'adunanza, il Segretario SOBRERO dà lettura del verbale della seduta tenutasi dalla Classe il 29 novembre, che viene approvato.

Il Presidente fa omaggio all'Accademia, a nome del Principe BONCOMPAGNI, del fascicolo di febbraio 1885 del *Bullettino di storia e bibliografia delle Scienze matematiche e fisiche.*

Il Socio DORNA legge una sua Nota *Sulla mira meridiana dell'Osservatorio di Torino a Cavoretto, e formola per dedurne la posizione dalla sua altezza e dalle costanti dello strumento dei passaggi.*

Il Socio D'OVIDIO legge una Memoria del Dott. CORRADO SEGRE, *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani.*

Lo stesso Socio D'OVIDIO presenta ancora una Memoria manoscritta del sig. Ing. Camillo GUIDI, Prof. nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Torino, *Sulla curva delle pressioni negli archi e nelle volte.* Questo lavoro, per l'indole sua, quando l'Accademia lo approvasse, verrebbe stampato nei volumi delle *Memorie.* In conseguenza il Presidente ne affida l'esame ad una Commissione accademica, la quale ne riferirà a suo tempo.

LETTURE

SULLA

MIRA MERIDIANA DELL'OSSERVATORIO DI TORINO

A CAVORETTO

E FORMOLA PER DEDURNE LA POSIZIONE DALLA SUA ALTEZZA
E DALLE COSTANTI DELLO STRUMENTO DEI PASSAGGI

del Socio Prof. ALESSANDRO DORNA.

I.

Il collegamento della nostra specola universitaria al Palazzo Madama, colla triangolazione principale, del quale ho fatto cenno nella Nota che presentai alla prima Adunanza, in novembre, permetterà di estendere ai vertici di quella rete di primo ordine, le recenti determinazioni di longitudine e di latitudine dell'Osservatorio. E siccome con due triangoli aventi un vertice comune al monte Musinè, venne eziandio collegata la nostra mira meridiana di Cavoretto col nuovo centro di longitudine e latitudine (centro del cupolino Ovest) e coll'antico centro di longitudine, latitudine ed azimut (centro del circolo meridiano), si avrà anche l'azimut per l'orientamento dei lati della rete medesima; se la mira sudetta è in meridiano, o si conosce di quanto si scosti angolarmente dal medesimo.

Plana nella prefazione al volume di Osservazioni, che pubblicò nel 1828, assegna alla mira di Cavoretto l'altezza apparente di 1° 16′ 26″, 4 e riguardo alla sua posizione rispetto al meridiano, dice: *je puis assurer maintenant (après une longue série d'observations) qu'on peut considérer comme sensiblement nulle la déviation de cette mire du plan du méridien.*

La mira è sull'antico muro di cinta del castello di Cavoretto dalla parte di Torino. Il muro è nella direzione Est-Ovest non molto lontano dal luogo dove dal colle si discende rapidamente al fiume Po. Se accadesse un minimo scorrimento del muro all'ingiù, la posizione assoluta della mira rispetto al centro del circolo meridiano subirebbe una piccola deviazione, ad Ovest

Tav. IV

dal meridiano; indipendentemente dalle mani dell'uomo, che non devo supporre capaci di spostare volontariamente il masso di pietra in cui è intagliata la cavità circolare costituente la mira, collocata da Plana.

In una Memoria del 1869, pubblicata ne' volumi dell'Accademia, dedussi da confronti che, a quell'epoca, la deviazione della mira di Cavoretto dal meridiano era trascurabile.

Quest'anno, invitato dal Direttore dell'Osservatorio di Milano a verificare per qualche eventuale operazione della Commissione del Grado, se la mira ha un azimut che non sia nullo, ho fatto, con tale scopo, delle osservazioni di passaggi di stelle al meridiano per dedurne le tre costanti strumentali dello strumento dei passaggi (circolo meridiano), dalle quali e dall'altezza della mira, si può dedurre l'azimut di questa, applicando una formola che ricavai appositamente.

Colle costanti strumentali dedotte dalle osservazioni suaccennate risulta anche che la deviazione della mira dal meridiano è molto piccola; la qual cosa mi riservo di mostrare in un'altra Nota in cui esporrò i particolari delle osservazioni. Do in questa la dimostrazione della formola summentovata.

II.

Formola per dedurre l'azimut d'una mira meridiana dall'altezza della mira e dalle tre costanti dello strumento dei passaggi.

Designo con

a] (costante di azimut) la deviazione angolare orizzontale dell'estremità Ovest in cielo dell'asse di rotazione del cannocchiale dal punto cardinale Ovest verso il Sud;

b] (costante di livello) l'inclinazione di tale estremità all'orizzonte;

c] (costante di collimazione) l'angolo che al centro dell'obbiettivo del cannocchiale la visuale individuata dall'incrocicchio del filo di mezzo dei passaggi coi due fili orizzontali del reticolo, fa colla normale all'asse di rotazione del cannocchiale, ad Ovest dell'osservatore;

h] l'altezza angolare apparente della mira sull'orizzonte del centro dello strumento.

Ed avverto che intendo, come ho fatto nelle osservazioni di quest'anno, che il filo di mezzo dei passaggi sia esattamente al

centro della mira, o se ne deduca (come feci nel 1869) la deviazione micrometrica dalla mira.

Siano (vedi la figura):

O il centro dell'obbiettivo;
$x\,o\,y$ l'orizzonte;
$x\,o\,z$ il meridiano;
$y\,o\,z$ il primo verticale;
x ed y i punti Sud ed Ovest e z il Zenit;
M la mira;
R l'estremità Ovest in cielo dell'asse di rotazione del cannocchiale;
$N\,O\,N'$ (asse di collimazione) la normale ad $O\,R$ nel piano $M\,O\,R$;
$M'\,O\,M$ la visuale alla mira;
$R_z\,o\,y = a$, $R_z\,o\,R = b$, $N'\,O\,M' = c$;
$M_z\,O\,M = h$;
$x\,O\,M = A$ azimuto cercato della mira dal Sud verso Est.

Fatti $\qquad O\,m = 1$; $\qquad O\,r = 1$;

le coordinate di r ed m saranno i coseni degli angoli che le due rette $O\,M$ ed $O\,R$ fanno coi tre assi.

Onde le formole:

$\text{Cos}\,M\,o\,x = \cos h \cos A$;
$\text{Cos}\,M\,o\,y = -\cos h \,\text{sen}\, A$;
$\text{Cos}\,M\,o\,z = \text{sen}\, h$;
$\text{Cos}\,R\,o\,x = \cos b \,\text{sen}\, a$;
$\text{Cos}\,R\,o\,y = \cos b \cos a$;
$\text{Cos}\,R\,o\,z = \text{sen}\, b$;
$M\,a \quad R\,O\,M = 90^\circ + c$;
e $\cos R\,O\,M = \cos M\,o\,x \cos R\,o\,x + \cos M\,o\,y \cos R\,o\,y + \cos M\,o\,z \cos R\,o\,z$.

Adunque:

$$-\text{sen}\, c = \cos h \cos A \cos b \,\text{sen}\, a - \cos h \,\text{sen}\, A \cos b \cos a + \text{sen}\, h \,\text{sen}\, b = -\cos h \cos b \,\text{sen}\,(A - a) + \text{sen}\, h \,\text{sen}\, b$$

e finalmente la formola:

$$\text{sen}\,(A - a) = \tan h \tan b + \sec h \sec b \,\text{sen}\, c\,,$$

che dà l'azimut della mira in funzione della sua altezza apparente e delle tre costanti dello strumento dei passaggi.

Torino, 13 Dicembre 1885.

SULLE

VARIETÀ NORMALI A TRE DIMENSIONI

COMPOSTE DI SERIE SEMPLICI RAZIONALI DI PIANI

Memoria del Dott. C. Segre,
presentata dal Socio Prof. E. D'Ovidio

Nel presente lavoro, proseguendo le mie ricerche di geometria ad n dimensioni e specialmente quelle contenute nella mia Nota *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (*), mi occupo delle $S_2 - F_3^n$ di S_{n+2} (**). Le rigate razionali normali, queste varietà, e più in generale le $S_i - F^n_{i+1}$ di S_{n+i} erano già comparse nel mio lavoro sui fasci di coni quadrici in uno spazio qualunque (***) come luoghi dei sostegni di un fascio

(*) Atti di questa R. Acc., vol. XIX. — Nel citare i n^i di quella Nota li farò precedere dalla indicazione R.

(**) In generale con $S_i - F^n_{i+1}$ s'intende una varietà d'ordine n ad $i+1$ dimensioni composta di $\infty^1 S_i$. E dicendo che una varietà qualunque (anche se composta) *appartiene* ad uno spazio (lineare), intendo che non solo vi è contenuta, ma che non sta in uno spazio a minor numero di dimensioni. Le F^n_{i+1} non possono appartenere ad uno spazio di più che $n+i$ dimensioni (per un noto teorema che il Clifford dimostrò per $i=0$ e che il sig. Veronese estese ad i qualunque); quelle $S_i - F^n_{i+1}$ che appartengono ad un S_{n+i} si diranno *normali:* da esse si ottengono tutte le altre serie semplici razionali di S_i mediante proiezioni. Supporrò sempre che non siano coni, perchè se fossero tali il loro studio si ridurrebbe a quello di varietà della stessa specie e non coniche, a minor numero di dimensioni.

(***) Atti di quest'Acc., vol. XIX. — Il sig. Del Pezzo in una recente nota *Sulle superficie di ordine* n *immerse nello spazio di* n + 1 *dimensioni* (Rendiconti della R. Acc. di Napoli, settembre 1885), ha dimostrato che le sole superficie F_2^n *immerse* in S_{n+1} (o, come io dico, *appartenenti* a questo spazio) sono appunto rigate razionali normali, fatta eccezione per una F_2^4 di S_5, che fu studiata successivamente dal sig. Veronese (Atti della R. Acc. dei Lincei, 1884) e da me (in un lavoro *Sulla geometria delle coniche*,

di tali coni; ed ivi avevo enunciato senza dimostrazione che tutte le varietà nominate non possono presentare altre particolarità (invarianti assoluti) che i numeri indicanti gli ordini minimi delle loro curve direttrici. Qui se ne vedrà la dimostrazione (già data per le rigate, cioè per $i=1$) pel caso di $i=2$; essa si estenderebbe immediatamente ad i qualunque. E delle varietà che ci occuperanno si vedranno anche varie altre proprietà, relative sopratutto alla geometria su di esse, le quali possono servire di fondamento per una trattazione completa (*). In ultimo ne darò una serie di rappresentazioni sullo spazio ordinario, dalle quali si deduce una serie notevole assai estesa di trasformazioni univoche dello spazio ordinario, in cui i due sistemi omaloidici si compongono di rigate d'ordine qualunque.

Sebbene le ricerche che qui esporrò procedano parallelamente a quelle citate sulle rigate razionali, pure esse mi presentarono difficoltà di nuova specie, che mi persuasero dell'utilità di pubblicare questa Nota. Però rispetto alle $S_i - F^n_{i+1}$ di S_{n+i} i ragionamenti qui fatti pel caso di $i=2$ si estenderanno facilmente ad i qualunque, e l'analogia permetterà di prevederne senz'altro i risultati, sicchè non le farò più oggetto di un nuovo lavoro.

I.

Generalità sulle $S_2 - F_3^n$ *di* S_{n+2}.

1. Sia F una tale varietà appartenente ad S_{n+2} e che supporremo sempre non composta di altre. Essa sarà tagliata

---

nel vol. XX di questi *Atti*). Orbene da quella proposizione si trae senza difficoltà, che *le* F^n_{i+1} *appartenenti ad* S_{n+i} *sono appunto le nostre* $S_i - F^n_{i+1}$, *fatta solo eccezione pel caso di* $n=4$, *in cui esiste inoltre in* S_{i+4} *una* F^4_{i+1} *che non è di questa categoria, essendo un cono avente per sostegno un* S_{i-2} *e per sezione con ogni* S_5 *una* F_2^4 *della specie suddetta.*

(*) Credo bene avvertire, che in questo, come nella maggior parte dei miei precedenti lavori di geometria a più dimensioni, non è mai una trattazione completa dell'argomento che ho avuto di mira, ma bensì il dare soltanto quelle proposizioni fondamentali, dalle quali una tal trattazione si può poi dedurre senza gravi difficoltà. E penso che per ora in questo campo vastissimo e quasi inesplorato della geometria proiettiva a più dimensioni sia bene far così per potere più presto acquistare una qualche conoscenza dei vari enti che vi sono da studiare e delle questioni che vi sono da risolvere.

da ogni S_{n+1} (di S_{n+2}) in una rigata d'ordine n semplice in generale, ma che potrà anche scindersi; tale rigata apparterrà però sempre all'S_{n+1}, giacchè, se stesse in un S_n, per questo ed un punto di F posto fuori di esso passerebbe un S_{n+1} che taglierebbe questa varietà in una superficie composta d'ordine complessivo $> n$, e quindi la conterrebbe, contro l'ipotesi. Quindi, siccome le generatrici di una rigata d'ordine n appartenente ad un S_{n+1} formano una serie razionale (R. n° 1), così *i piani generatori di* F *formano una serie razionale.*

È chiaro che, essendo ogni piano di F incontrato da un S_{n+1} in una retta e da un S_n almeno in un punto, un S_{n+1} qualunque dovrà sempre contenere di F una rigata semplice (*) e non esclusivamente dei piani generatori; ed un S_n qualunque dovrà sempre contenere una curva semplice o una rigata semplice, e non esclusivamente dei piani generatori o delle rette di questi. Si noti però che uno spazio qualunque non può contenere due distinte rigate ovvero una rigata ed una curva non posta su questa, altrimenti F si decomporrebbe, e per la stessa ragione se uno spazio contiene di F due distinte curve, contiene anche una rigata passante per queste.

2. Estendendo il ragionamento fatto dianzi si prova che *ogni rigata* F_2^m *di ordine* $m \leq n$ *situata su* F *è una rigata razionale normale, cioè appartiene ad un* S_{m+1}; in fatti se stesse in un S_m, per questo ed $(n+1-m)$ punti di F posti fuori di esso su altrettanti piani generatori passerebbe un S_{n+1} contenente anche questi piani e contenente perciò una rigata composta d'ordine $> n$. — Questo ragionamento vale anche se la F_2^m si scinde, cioè essa apparterrà sempre ad un S_{m+1}; purchè però comprenda sempre una rigata direttrice, vale a dire non si scinda tutta in piani generatori. Vedremo più tardi a quale spazio appartenga un dato gruppo di piani generatori (v. n° 11).

3. *Ogni curva* C^μ *d'ordine* $\mu < n$, *situata su* F *e su uno spazio che non contenga nello stesso tempo una rigata di questa varietà, è una curva razionale normale, cioè appartiene ad un* S_μ. Invero un S_{n+1} qualunque passante per quella curva

(*) Si avverta che parlando di curve e rigate semplici sottintendo sempre *direttrici*, cioè incontrate da tutti i piani generatori; quindi p. e. escludo sempre dalle curve che considero quelle segnate su un piano generatore. Inoltre dicendo *curve, rigate, piani*, ecc. sottintenderò spesso *di* F.

conterrà una rigata semplice passante pure per questa e d'ordine $\geq \mu$, perchè tagliata secondo una C^μ da uno spazio che non la contiene: quindi per una proprietà delle rigate razionali normali (R. n° 2) la C^μ apparterrà ad un S_μ. Ciò vale anche quando la C^μ si scinde, purchè non si scinda tutta in rette generatrici.

Una curva semplice C^μ soddisfaciente alle condizioni dette corrisponde coi suoi punti univocamente ai piani generatori, giacchè se ognuno di questi piani la incontrasse in più di un punto taglierebbe l'S_μ a cui la curva appartiene in una retta, il cui luogo sarebbe una rigata dell'S_μ.

4. Un S_{n+1} condotto per un piano generatore incontra ancora F in una rigata F_2^{n-1} (semplice o composta) di un S_n; ogni S_{n+1} passante per questo incontra ulteriormente F in un piano generatore e viceversa ogni tal piano sta con quell'S_n in un S_{n+1}: vi è così una corrispondenza proiettiva tra la serie dei piani generatori e il fascio degli S_{n+1} passanti per quell'S_n. Considerando n tali fasci di S_{n+1} essi saranno proiettivi e genereranno F come luogo dei piani d'intersezione degli S_{n+1} corrispondenti. Viceversa n fasci proiettivi di S_{n+1} generano evidentemente in generale una $S_2 - F_3^n$ appartenente ad S_{n+2}. — Questa generazione è analoga a quella della C^n normale di S_n e della rigata normale F_2^n di S_{n+1} mediante n fasci proiettivi risp. di S_{n-1} e di S_n (*).

5. Vi è un'altra generazione di F, più importante per certe questioni che incontreremo, e analoga a quella della rigata normale F_2^n di S_{n+1} mediante due curve normali punteggiate univocamente. Tre curve razionali normali punteggiate proiettivamente generano in fatti coi piani congiungenti i punti corrispondenti una varietà, il cui ordine è in generale la somma degli ordini di quelle curve e che appartiene alla specie delle varietà che andiamo studiando se gli spazi in cui stanno le curve date sono *indipendenti* (**). Così pure (il che si può anche considerare

(*) In generale una $S_i - F^n_{i+1}$ di S_{n+i} si può generare in infiniti modi mediante n fasci proiettivi di S_{n+i-1}. V. VERONESE: *Behandlung der proj. Verhältnisse*, ecc. (Math.. Ann., XIX).

(**) Più spazi (i) risp. ad $m_1, \ldots, m_i$ dimensioni sono *indipendenti* quando il loro insieme appartiene ad uno spazio di $m_1 + \ldots + m_i + i - 1$ dimensioni.

come conseguenza di ciò) una curva razionale normale ed una rigata razionale normale che non la contenga e le cui generatrici corrispondano univocamente ai punti di quella, generano coi piani congiungenti elementi corrispondenti una varietà avente per ordine la somma degli ordini della curva e della rigata e appartenente alla specie che esaminiamo se queste appartengono a spazi indipendenti. — Vedremo che inversamente la varietà F si può sempre generare in questi modi.

Intanto, a proposito di questa generazione, conviene che qui aggiungiamo che due curve razionali normali di F, i cui ordini siano $\leq n$, stanno sempre su una determinata rigata di F generata dalle rette congiungenti i punti in cui quelle curve sono incontrate dagli stessi piani generatori. Se le due curve appartengono a due spazi indipendenti, la rigata generata ha per ordine la somma dei loro ordini ed è normale.

II.

Loro distinzione in specie. Rigate e curve minime.

6. Un S_{n+1} condotto per $I\frac{n+2}{3}$ (cioè il numero intero contenuto in $\frac{n+2}{3}$) piani generatori di F potrà tagliarla ancora in altri tali piani, ma sempre la taglierà inoltre in una rigata razionale normale d'ordine $\leq n - I\frac{n+2}{3}$, cioè $\leq I\frac{2n}{3}$. Dunque *l'ordine minimo di una rigata di* F *non supera* $\frac{2n}{3}$.

Diciamo m'' quell'ordine minimo e consideriamo una rigata $F_2^{m''}$ di F. Essa apparterrà (n° 2) ad un $S_{m''+1}$ e conterrà (R. n° 3) una curva (od infinite) d'ordine $\leq I\frac{m''}{2}$ e quindi anche $\leq I\frac{n}{3}$. Adunque *l'ordine minimo di una curva razionale normale di* F *non supera* $\frac{n}{3}$.

Diciamo m' quest'ordine minimo. Sarà dunque:

$$(1) \ldots\ldots \qquad m' \leq \frac{n}{3}, \qquad m'' \leq \frac{2n}{3},$$

ed inoltre

$$(2) \ldots\ldots \qquad 2m' \leq m''.$$

7. Esaminiamo meglio il numero delle curve e rigate *minime* e le loro relazioni. Anzitutto si osservi che una tal curva $C^{m'}$ ed una tal rigata $F_2^{m''}$ devono stare l'una sull'altra, tranne nel caso limite delle (1), cioè quando $m' = \frac{n}{3}$ $\left(\text{e quindi } m'' = \frac{2n}{3}\right)$; in fatti se ciò non fosse esse genererebbero (n° 5) una varietà d'ordine $m' + m''$ al più, cioè d'ordine minore di n in causa delle (1).

Ciò posto, partendo anzitutto da una $F_2^{m''}$, vi è su questa (R. n° 4, 5) una sola curva d'ordine m' soddisfaciente alla (2), tranne quando di questa si verifica il caso estremo $2m' = m''$, nel qual caso vi sono ∞^1 curve d'ordine m' formanti una serie lineare. Dunque *su* F *vi è in generale una sola curva minima* $C^{m''}$; *però se* $m'' = 2m'$ *ve ne sono* ∞^1 *poste su una rigata minima e formanti una serie lineare* $\left(\textit{escluso il caso più particolare di } m' = \frac{n}{3}\right)$.

Partiamo ora invece dalla $C^{m'}$ (o da una delle $C^{m'}$ nel caso di $m'' = 2m'$). Per essa, cioè pel suo $S_{m'}$, e per $I\frac{n - m' + 1}{2}$ piani generatori (cioè per altrettante coppie di punti di questi) si può far passare un S_{n+1} che taglierà ancora F, oltre che forse in altri piani, in una rigata semplice d'ordine $\leq n - I\frac{n - m' + 1}{2}$, ossia $\leq I\frac{n + m'}{2}$, la quale passerà per la $C^{m'}$. Su una rigata di tal ordine avente questa per curva minima vi sono (R. n° 5) infinite curve razionali normali d'ordine $\leq I\frac{n + m'}{2} - m'$ cioè $\leq I\frac{n - m'}{2}$. Quindi se per la $C^{m'}$ passassero due rigate d'ordini $\leq I\frac{n + m'}{2}$, scegliendo sull'una

una di quelle infinite curve, essa genererebbe coll'altra una varietà d'ordine

$$\leq I\,\frac{n-m'}{2}+I\,\frac{n+m'}{2}$$

e quindi $< n$, tranne quando $n+m'$ essendo pari quelle rigate fossero precisamente dell'ordine $\frac{n+m'}{2}$. Se si eccettua tal caso $\left(\text{che comprende anche quello escluso da principio di } m'=\frac{n}{3}\right)$, si vede che per la $C^{m'}$ passa una sola rigata d'ordine $\leq I\,\frac{n+m'}{2}$, e questa sarà rigata minima di F. Dunque: *vi è in generale una sola rigata minima* $F_2^{m''}$; *il suo ordine* m'' *soddisfa oltre alle* (1), (2) *la relazione seguente*:

$$(3)\ \ldots\ldots \qquad 2\,m''\leq n+m'.$$

Però se fosse precisamente $2\,m''=n+m'$ *vi sarebbe una infinità di tali rigate passanti per la curva minima* $C^{m'}$ $\left(\textit{o per ogni curva minima, nel caso più particolare di } m'=\frac{n}{3}\right)$; come vedremo meglio ora.

8. Abbiamo già esaminato il caso eccezionale di $m''=2\,m'$. Esaminiamo ora l'altro di $2\,m''=n+m'$, che ha comune con quello il caso di $m'=\frac{n}{3}$. Per la $C^{m'}$ (od una $C^{m'}$) ed $\frac{n-m'}{2}$ piani generatori passa un S_n e ne passa in tal caso uno solo; poichè se per quelli passasse un S_{n-1} si potrebbe condurre per esso e per un piano generatore diverso da quelli un S_{n+1} che conterrebbe quindi almeno $\frac{n-m'}{2}+1$ piani generatori e taglierebbe ancora F in una rigata d'ordine $<\frac{n+m'}{2}$, cioè $< m''$, il che non può essere. Ciò posto, tutti gli S_{n+1} passanti per quell' S_n tagliano ancora F in rigate d'ordine m''; e viceversa ogni rigata d'ordine m'' passante per la $C^{m'}$ è incontrata da un S_{n+1} passante per quell' S_n e per una sua generatrice

(diversa dalle $\frac{n-m'}{2}$ poste sui piani generatori considerati) in una curva complessiva d'ordine $> m' + \frac{n-m'}{2}$, cioè $> m''$, e quindi vi è contenuta. Concludendo: *Nel caso eccezionale di* $2\,m'' = n + m'$ *per l'unica curva minima* $C^{m'}$, *o per una di esse nel caso più particolare* $m' = \frac{n}{3}$, *passano* ∞^1 *rigate minime* $F_2^{m''}$, *le quali si possono tutte determinare come intersezioni di* F *con un fascio di* S_{n+1} *e formano quindi una serie lineare sì che per ogni punto di* F *non posto sulla* $C^{m'}$ *ne passa una sola.*

9. Finalmente nel caso di $m' = \frac{n}{3}$ $\left(\text{e quindi } m'' = \frac{2\,n}{3}\right)$ le particolarità si hanno da quelle relative ai due casi eccezionali già esaminati $m'' = 2\,m'$ e $2\,m'' = n + m'$. Ma osserviamo pure che ogni rigata minima $F_2^{m''}$ sta in tal caso con m' piani generatori fissi in un S_{n+1} e in uno solo; e viceversa ogni S_{n+1} per quegli m' piani taglia F in una rigata minima. D'altronde quegli m' piani appartengono ad un S_{n-1} (perchè se stessero in un S_{n-2}, per questo ed un altro piano generatore passerebbe un S_{n+1} tagliante ancora F in una rigata d'ordine $< m''$) e ogni S_n passante per questo taglia F in una $C^{m'}$, poichè taglia la $F_2^{m''}$ di un S_{n+1} che lo contenga in m' generatrici (degli m' piani generatori). Dunque: *Quando* $m' = \frac{n}{3}$ *vi sono* ∞^2 *curve minime* $C^{m'}$ *ed* ∞^2 *rigate minime* $F_2^{2m'}$; *esse si possono intendere determinate su* F *risp. dagli* S_n *e dagli* S_{n+1} *passanti per un* S_{n-1}. *Quindi per un punto di* F *passa una sola curva e per due punti non posti sulla stessa curva passa una sola rigata: due curve stanno in una rigata, due rigate si tagliano in una curva; una curva ed una rigata che non la contenga non hanno punti comuni* (*).

(*) L'esempio più semplice di questo caso si ha (per $n = 3$) nella varietà cubica a 3 dimensioni F_5^3 di S_5. Questa interessante varietà si compone di ∞^1 piani (generatori) e contiene ∞^2 rette direttrici e ∞^2 quadriche ordinarie (di cui ciascuna ha un sistema di rette appartenente a quelle direttrici e l'altro a quei piani generatori). Essa si può intendere generata dai piani congiungenti i punti corrispondenti di 3 rette (scelte comunque tra

10. Riassumendo noi vediamo che le $S_2 - F_3^n$ di S_{n+2} possono essere di varie *specie*. Ogni specie è caratterizzata da due numeri m', m'', che rappresentano gli ordini delle curve e rigate minime, e che devono soddisfare le condizioni (2) e (3), delle quali le (1) sono conseguenze. Vi è in generale una sola curva minima ed una sola rigata minima poste l'una sull'altra; fanno eccezione il caso in cui $m'' = 2m'$, chè allora vi sono ∞^1 curve minime sull'unica rigata minima, il caso in cui $2m'' = n + m'$, perchè allora vi sono ∞^1 rigate minime passanti per l'unica curva minima, e finalmente il caso più particolare comune ai due precedenti di $m' = \frac{n}{3}$ nel quale vi sono ∞^2 curve minime e ∞^2 rigate minime.

Vedremo poi che quelle varie specie esistono realmente e che le varietà di una stessa specie sono projettivamente identiche. Avendo noi escluso il caso in cui le varietà stesse siano coni (caso che corrisponderebbe ad $m' = 0$), dovrà essere $m' \geq 1$ e quindi $m'' \geq 2$: quelle varietà non contengono dunque altri piani che i piani generatori.

III.

Loro rigate e curve razionali normali.

11. Prima di passare alla ricerca di curve e rigate contenute in F conviene che ci occupiamo delle relazioni tra piani di questa varietà, questione che avevamo dovuto lasciare sospesa al n° 2.

Si vede facilmente che $m' + 1$ piani sono sempre indipendenti, cioè appartengono ad un $S_{3m'+2}$. Invero se stessero in un $S_{3m'+1}$, questo conterrebbe *la* (od *ogni*) C^m, avendo su essa $m' + 1$ punti; onde se vi sono infinite curve minime, cioè

---

quelle ∞^2) punteggiate proiettivamente, ovvero dalle rette congiungenti i punti corrispondenti di due piani (generatori qualunque) punteggiati proiettivamente. Per ogni suo punto passano un piano generatore ed una retta direttrice; per due suoi punti passa una quadrica, ecc. Ogni S_4 di S_5 contiene una retta direttrice; per ogni punto di S_5 passa un S_5 contenente una quadrica.

Del resto, per brevità, non starò a dare in questo lavoro altri esempi delle varietà studiate.

$m''=2m'$, dovrebbe contenere una rigata $F_2^{m''}$ e quindi un insieme d'ordine almeno uguale a $3m'+1$, il che non può essere (n° 2); e se poi non si presenta quel caso, conducendo un $S_{m'+m''+1}$ per quell'$S_{3m'+1}$ e per $m''-2m'$ punti di una $F_2^{m''}$, esso la conterrebbe tutta [tagliando quella rigata secondo la $C^{m'}$ e $(m'+1)+(m''-2m')=m''-m'+1$ generatrici], e quindi taglierebbe F in una rigata composta d'ordine almeno uguale a $m'+m''+1$, il che è ancora impossibile (n° 2). Dunque anche un numero qualunque $\mu \leq m'+1$ di piani di F sono indipendenti (*).

Ma se $\mu > m'+1$, allora μ piani sono dipendenti, poichè per la (od una) $C^{m'}$ e μ coppie di punti prese su essi passa un $S_{2\mu+m'}$ che li contiene ed è $2\mu+m'<3\mu-1$. Se inoltre è $\mu \leq m''-m'+1$ si vede con un ragionamento affatto identico a quello usato or ora che pei μ piani non può passare un $S_{2\mu+m'-1}$, sicchè allora i μ piani appartengono ad un $S_{2\mu+m'}$ passante per la $C^{m'}$. Questo caso è solo possibile se $m'+1<m''-m'+1$, cioè $2m'<m''$, vale a dire finchè vi è una sola $C^{m'}$. Se poi è $\mu \geq m''-m'+1$ la (od una) $F_2^{m''}$ sta coi μ piani in un $S_{\mu+m''+1}$ ed è $\mu+m''+1 \leq 2\mu+m'$; e se inoltre $\mu+m''+1 \leq n+1$, cioè $\mu \leq n-m''$ non possono i μ piani stare in un $S_{\mu+m''}$, altrimenti questo dovrebbe pure contenere quella rigata (di cui contiene una curva composta d'ordine $\geq \mu+m'>m''$), ciò che non può essere (n° 2); quindi in tal caso i μ piani appartengono ad un $S_{\mu+m''+1}$ passante per la $F_2^{m''}$.

Se finalmente la 2ª condizione posta non è soddisfatta, cioè se $\mu > n-m''$, allora evidentemente i μ piani appartengono solo ad S_{n+2}. Quando vi sono infinite rigate minime, cioè $2m''=n+m'$, dalla condizione $\mu \geq m''-m'+1$ segue appunto $\mu > n-m''$.

Concludendo: *Un gruppo di μ piani qualunque di F può presentare i casi seguenti:* 1° *se* $\mu \leq m'+1$ *esso si compone di piani indipendenti, cioè appartiene ad un* $S_{3\mu-1}$; 2° *se* $\mu \geq m'+1$, *ma* $\mu \leq m''-m'$, *esso appartiene ad un* $S_{2\mu+m'}$ *contenente la* $C^{m'}$ *(caso che non può presentarsi quando* $m''=2m'$*)*; 3° *se* $\mu > m''-m'$, *ma* $\mu \leq n-m''$, *esso appartiene ad un* $S_{\mu+m''+1}$ *contenente la* $F_2^{m''}$ *(caso che non può presentarsi quando* $2m''=n+m'$*)*; 4° *se* $\mu > n-m''$, *esso appartiene ad* S_{n+2}.

(*) In particolare due piani non possono avere un punto comune, senza che la varietà si riduca ad un cono.

12. Ciò premesso, siamo in grado di determinare tutte le rigate F_2^m d'ordine $m \leq n$ (e $\geq m''$), e quindi (n° 2) razionali normali, contenute in F. In fatti ogni tal rigata insieme con un gruppo fissato ad arbitrio di $\mu = n - m$ piani apparterrà ad un S_{n+1}. Viceversa un S_{n+1} passante per quel gruppo di piani, cioè per lo spazio a cui esso appartiene, contiene, se $n - m > m'' - m'$, cioè $m < n - m'' + m'$, la $F_2^{m''}$ (n° 11) e quindi determina una F_2^m degenerata in questa rigata minima ed $m - m''$ piani; ma se invece $n - m \leq m'' - m'$, cioè $m \geq n + m' - m''$, determinerà su F una rigata F_2^m, in generale non più composta, e che passerà per la $C^{m'}$ quando $n - m > m'$, cioè $m < n - m'$. Si vede dunque che, limitandosi alle rigate semplici e non tenendo più conto delle rigate minime, l'ordine m di una rigata non può essere minore di $n + m' - m''$, e che tutte le rigate d'ordine m si ottengono mediante gli S_{n+1} passanti per lo spazio a cui appartiene un gruppo arbitrario di $n - m$ piani, cioè per un $S_{3n-3m-1}$ se $m \geq n - m'$, e per un $S_{2n-2m+m'}$ se $m < n - m'$ (n° 11). Giungiamo così ai risultati seguenti:

Se m *non supera* n *e non è minore di* $\mathrm{n} - \mathrm{m}'$ *vi sono su* F $\infty^{3\mathrm{m}-2\mathrm{n}+2}$ *rigate d'ordine* m, *le quali non passano in generale per la curva minima e formano una serie lineare, sì che per* ν *rette e* $3\mathrm{m} - 2\mathrm{n} - 2\nu + 2$ *punti ne passa generalmente una determinata.*

Se m *è minore di* $\mathrm{n} - \mathrm{m}'$ *ma non minore di* $\mathrm{n} + \mathrm{m}' - \mathrm{m}''$ (*il che è impossibile solo quando* $\mathrm{m}'' = 2\,\mathrm{m}'$) *vi sono* $\infty^{2\mathrm{m}-\mathrm{n}-\mathrm{m}'+1}$ *rigate d'ordine* m, *le quali passano tutte per la curva minima e formano una serie lineare, sì che in generale per* ν *rette e* $2\,\mathrm{m} - \mathrm{n} - \mathrm{m}' - 2\nu + 1$ *punti ne passa una determinata.*

Risulta pure dalle stesse considerazioni che: *due rigate d'ordini* m_1, m_2 *di cui una almeno non passi per la curva minima si tagliano in generale in una curva semplice d'ordine* $\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2 - \mathrm{n}$. *Una rigata d'ordine* m *non passante per la* $\mathrm{C}^{\mathrm{m}'}$ *la incontra in* $\mathrm{m} + \mathrm{m}' - \mathrm{n}$ *punti. Ecc.*

13. Perchè siano completamente note le rigate razionali normali di F è necessario conoscerne non solo l'ordine, ma anche la specie, cioè l'ordine della curva minima. Per una rigata passante per la $C^{m'}$ si saprà già senz'altro che questa è la curva minima. Si tratta dunque solo di esaminare una F_2^m non passante per $C^{m'}$ (sicchè $m \geq n - m'$). La (od ogni) rigata minima

$F_2^{m''}$ la incontra in una curva (semplice in generale) d'ordine $m+m''-n$; questa ne sarà curva minima se $2(m+m''-n) \leq m$, cioè $m \leq 2(n-m'')$. Se invece $m > 2(n-m'')$ la F_2^m non avrà più in generale la sua curva minima sulla $F_2^{m''}$; ciò accadrà solo per certe particolari F_2^m passanti per un numero conveniente $\left(\geq I \frac{m+1}{2} + m'' - n \right)$ di generatrici della $F_2^{m''}$. Escludendo il caso in cui ciò sia, è chiaro però che la curva minima della F_2^m sarà sempre congiunta alla (o ad una) $C^{m'}$ con una certa rigata razionale normale. E una $F_2^{m_1}$ passante per la $C^{m'}$ può tagliare la F_2^m oltre che in quella curva solo in generatrici, le quali dovranno essere tra quelle che passano pegli $m+m'-n$ punti d'intersezione della F_2^m colla $C^{m'}$. Ora se si prende m_1 tale che $2m_1 - n - m' + 1 \geq m + m' - n$, ossia $m_1 - m' \geq I \frac{m}{2}$, si può far passare la $F_2^{m_1}$ per tutte quelle generatrici della F_2^m (n° 12), sicchè le due rigate avranno un'intersezione residua d'ordine

$$(m + m_1 - n) - (m + m' - n) = m_1 - m' :$$

il valor minimo di quest'ordine si ha per $m_1 = I\frac{m}{2} + m'$ ed è $I\frac{m}{2}$. Se invece $m_1 - m' < I\frac{m}{2}$, si può fare passare la $F_2^{m_1}$ per $(2m_1 - n - m' + 1)$ generatrici della F_2^m e si ha per ordine della residua curva d'intersezione

$$(m + m_1 - n) - (2m_1 - n - m' + 1) = m + m' - m_1 - 1 \quad ,$$

il cui valor minimo si ha per $m_1 = m' + I\frac{m}{2} - 1$ ed è $m - I\frac{m}{2}$, cioè $I\frac{m+1}{2}$. Dunque: *in generale quando* $m > 2(n-m'')$ *la curva minima di una* F_2^m (*non passante per* $C^{m'}$) *è dell'ordine* $I\frac{m}{2}$ (*e solo per particolari* F_2^m *sarà d'ordine inferiore, facendo parte dell'intersezione di quelle colla rigata minima*); *quando invece* $m \leq 2(n-m'')$ *la curva minima della* F_2^m *fa parte dell'intersezione con una rigata minima, ed è in generale dell'ordine* $(m+m''-n)$.

Da ciò si dedurrebbe facilmente quale varietà formano le curve razionali normali di un dato ordine (soddisfaciente a certe condizioni) su F.

14. Facciamo invece un'applicazione del risultato ottenuto, la quale ci servirà in seguito. Determiniamo cioè quanti elementi di F, punti, piani e rette, può contenere un S_{n-1} senza contenere nello stesso tempo una curva od una rigata. Un S_{n-1} si può far passare per t_2 piani, t_1 rette ed $(n-2t_1-3t_2)$ punti di F, essendo

$$n-2t_1-3t_2 \geq 0 \ .$$

Però affinchè esso non contenga le $C^{m'}$ deve essere

$$t_2 \leq m' ,$$

e affinchè della rigata minima $F_2^{m'}$, di cui conterrà t_2 generatrici e t_1 punti, non contenga ancora una curva dovrà essere (R. n° 8):

$$t_1+2t_2 \leq m'' .$$

Queste tre condizioni sono anche sufficienti, perchè un S_{n-1} passante per t_2 piani e t_1 rette di F non la incontri più che in punti isolati. Invero un S_{n+1} condotto per quell' S_{n-1} taglia quella varietà, oltre che nei t_2 piani, in una rigata d'ordine $n-t_2$ (in generale semplice) passante per le t_1 rette; e l'S_{n-1} contenendo t_1+t_2 generatrici di quella rigata la taglierà ancora (R. n° 8) in $(n-t_2)-2(t_1+t_2)=n-2t_1-3t_2$ punti isolati. Perocchè l'ordine minimo di curve di quella rigata d'ordine $n-t_2$ essendo, come si è visto al n° precedente, il più piccolo dei numeri $I\frac{n-t_2}{2}$, $m''-t_2$, è soddisfatta la condizione che il numero t_1+t_1 di quelle generatrici non superi quest'ordine minimo; in fatti quella condizione darebbe:

$$2(t_1+t_2) \leq n-t_2 \ (*) , \qquad t_1+t_2 \leq m''-t_2 ,$$

relazioni entrambe vere in causa delle precedenti.

(*) Veramente nel 2° membro di questa relazione si dovrebbe scrivere $2I\frac{n-t_2}{2}$, che diverrebbe $n-t_2-1$ quando $n-t_2$ fosse dispari; ma in tal caso essa sarebbe ancora soddisfatta, giacchè allora $n-2t_1-3t_2$ sarebbe non solo ≥ 0, ma ≥ 1.

IV.

Generazione ed equazioni canoniche.

15. Dai risultati del n° 12 si ha in particolare l'esistenza su F di infinite rigate d'ordine $n-m'$ non passanti per la curva minima. In esse le curve d'intersezione colle rigate minime sono in generale dell'ordine $m''-m'$ e sono quindi curve minime. Su ciascuna di quelle $F_2^{n-m'}$ vi sono poi per conseguenza infinite curve d'ordine $n-m''$. Da tutto ciò (e dal n° 5) segue:

Si può sempre generare la varietà F *di specie* (m', m'') *mediante una* $C^{m'}$ *ed una* $F_2^{n-m'}$ *rigata (avente la curva minima d'ordine* $m''-m'$*) corrispondentisi projettivamente; ovvero mediante una* $C^{n-m''}$ *ed una* $F_2^{m''}$ *(con curva minima d'ordine* m'*); ovvero finalmente mediante tre curve normali projettive degli ordini* m', $m''-m'$, $n-m''$. — S'intende che gli spazi a cui appartengono risp. la curva e la rigata, ovvero le tre curve, devono essere indipendenti, affinchè la varietà generata appartenga ad S_{n+2}.

Viceversa se i numeri m', m'' soddisfanno le condizioni (2), (3), o ciò che fa lo stesso se m', $m''-m'$, $n-m''$ sono tre numeri in ordine crescente, tre curve razionali normali projettive aventi quei numeri per ordini e appartenenti a tre spazi indipendenti generano una varietà che è appunto della specie (m', m''), cioè che ha la prima curva per curva minima e la rigata generata dalle prime due per rigata minima. È dunque provata l'esistenza delle varietà delle diverse specie (*).

(*) Tra le specie di rigate razionali normali d'ordine n di S_{n+1} la più generale è quella per cui l'ordine della curva minima è (massimo, cioè) $I\frac{n}{2}$; le altre specie si possono dedurre da questa facendo decomporre quella curva in un numero conveniente di generatrici ed una curva semplice. Similmente tra le varie specie (m', m'') a cui F può appartenere la più generale corrisponde a $m'=I\frac{n}{3}$, $m''=I\frac{2n}{3}$; le altre se ne deducono sia abbassando l'ordine della rigata minima collo scinderla in piani ed una rigata semplice, sia coll'abbassare nel modo detto dianzi l'ordine della curva minima sulla rigata minima.

16. Possiamo anche trovare equazioni canoniche per quelle varietà. Consideriamo quelle tre curve razionali normali $C^{m'}$, $C^{m''-m'}$, $C^{n-m''}$. Gli spazi a cui esse appartengono essendo indipendenti si possono prendere su essi risp. $m'+1$, $m''-m'+1$, $n-m''+1$ punti fondamentali e basterà che su ciascuno di essi i punti presi siano indipendenti perchè tutti gli $n+3$ punti fondamentali presi insieme siano tali. Prendiamo su ciascuno di quei 3 spazi i punti fondamentali in modo che formino un sistema di riferimento canonico per la curva corrispondente, e stabiliamo la projettività fra le tre curve ponendo che il parametro variabile x abbia lo stesso valore in punti corrispondenti. Allora le equazioni delle tre curve avranno le forme:

$$1, \dots, x_{m'} = x^{m'}; \; x_{m'+1} = 0, \dots, x_{m''+1} = 0; \quad x_{m''+2} = 0, \dots, x_{n+2} = 0.$$

$$0, \dots, x_{m'} = 0; \; x_{m'+1} = 1, \dots, x_{m''+1} = x^{m''-m'}; \; x_{m''+2} = 0, \dots, x_{n+2} = 0.$$

$$0, \dots, x_{m'} = 0; \; x_{m'+1} = 0, \dots, x_{m''+1} = 0; \quad x_{m''+2} = 1, \dots, x_{n+2} = x^{n-m''}.$$

Quindi per un punto qualunque della varietà F costituita dai piani congiungenti i punti corrispondenti sarà:

$$\begin{aligned} &x_0 = 1, \quad x_1 = x, \quad \dots, \quad x_{m'} = x^{m'}; \\ &x_{m'+1} = y, \quad x_{m'+2} = yx, \quad \dots, \quad x_{m''+1} = yx^{m''-m'}; \\ &x_{m''+2} = z, \quad x_{m''+3} = zx, \quad \dots, \quad x_{n+2} = zx^{n-m''}. \end{aligned}$$

Eliminando i parametri x, y, z tra queste equazioni otteniamo per le $n-1$ equazioni di F le seguenti:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \cdot & x_{m'-1} & x_{m'+1} & x_{m'+2} & \cdot & x_{m''} & x_{m''+2} & x_{m''+3} & \cdot & x_{n+1} \\ x_1 & x_2 & \cdot & x_{m'} & x_{m'+2} & x_{m'+3} & \cdot & x_{m''+1} & x_{m''+3} & x_{m''+4} & \cdot & x_{n+2} \end{vmatrix} = 0.$$

Queste equazioni provano che F non ha altri invarianti assoluti che i numeri m', m'', che ne determinano la specie; il che risultava pure dalla generazione vista di quella varietà.

V.

Rappresentazioni su S_3.

17. Prendansi ad arbitrio su F t_0 punti P_0, t_1 rette P_1 e t_2 piani P_2, in modo che sia:

$$(4)\ldots \quad t_2 \leq m', \quad t_1 + 2t_2 \leq m'', \quad 2t_1 + 3t_2 \leq n-1,$$

di cui l'ultima sarà conseguenza della seguente

$$(5)\ldots \qquad t_0 + 2t_1 + 3t_2 = n-1.$$

Per tutti quegli elementi passerà un determinato spazio O_{n-2} da cui proiettando F su uno spazio ordinario Σ si avrà una rappresentazione univoca di quella varietà su questo, poichè ogni S_{n-1} passante per O_{n-2} incontrerà F in generale solo più in un punto (n° 14). Un S_{n+1} projettante (cioè passante per O_{n-2}) taglia F oltre che nei P_2 in una rigata d'ordine $n-t_2$ passante pei P_0 e P_1: tale rigata corrisponderà ad un piano di Σ. Due di queste rigate si tagliano (n° 12), oltre che nelle t_1 P_1, in una curva d'ordine $n-t_1-2t_2$, la quale corrisponderà ad una retta di Σ. Una sezione di F fatta con un S_{n+1} sarà incontrata da una tal curva in $n-t_1-2t_2$ punti, ed avrà quindi per imagine in Σ una superficie d'ordine $n-t_1-2t_2$. Dunque: *ai piani di* Σ *corrispondono in* F *le* ∞^3 *rigate* $F_2^{n-t_2}$ *d'ordine* $n-t_2$ *passanti pei* P_0 *e* P_1; *ed alle sezioni di* F *fatte cogli* S_{n+1} *corrispondono in* Σ ∞^{n+2} *rigate razionali d'ordine* $n-t_1-2t_2$ *formanti una serie lineare.* — Diremo quindi che questa rappresentazione è dell'ordine $n-t_1-2t_2$. Cerchiamo ora quale è il valor minimo di quest'ordine e come si ottiene la *rappresentazione minima* corrispondente.

18. Perchè la rappresentazione considerata sia possibile è necessario e sufficiente che siano soddisfatte simultaneamente le tre condizioni (4) dai due numeri t_1, t_2. Vediamo come ciò si possa ottenere. Scelto anzitutto ad arbitrio t_2 in modo da soddisfare la 1ª di quelle condizioni, la 2ª darà: $t_1 \leq m'' - 2t_2$, e siccome allora $m'' - 2t_2 \geq m'' - 2m' \geq 0$, così $m'' - 2t_2$ non

essendo negativo si potrà prendere t_1 non maggiore di esso, cioè soddisfare anche la 2ª. Quanto alla 3ª essa ci dà: $2t_1 \leq n - 3t_2 - 1$ e questo secondo membro diventerebbe negativo solo quando, essendo $n = 3m'$, si fosse scelto precisamente $t_2 = m'$. Per soddisfare le (4) si può dunque sempre prendere $t_2 \leq m'$ ad arbitrio, tranne quando F fosse della specie corrispondente ad $m' = \frac{n}{3}$, nel qual caso si deve prendere $t_2 < m'$. Con questa condizione per soddisfare simultaneamente la 2ª e la 3ª delle (4) basterà prendere $2t_1$ non maggiore di $2(m'' - 2t_2)$ e di $n - 3t_2 - 1$. L'ordine $n - t_1 - 2t_2$ della rappresentazione si rende minimo rendendo massimo $t_1 + 2t_2$; in causa della 2ª delle (4) questa quantità non può superare m''. Se la può raggiungere, cioè se si può fare $t_1 = m'' - 2t_2$, dovrà poi essere in causa della 3ª: $2m'' - t_2 \leq n - 1$, ossia $t_2 \geq 2m'' - n + 1$. Perchè questa relazione sia compatibile colla $t_2 \leq m'$ occorre e basta che sia $2m'' - n + 1 \leq m'$, cioè $2m'' < n + m'$; questa condizione è sempre soddisfatta per la (3), tranne quando $2m'' = n + m'$. È dunque solo in questo caso eccezionale che il valor massimo che possa prendere $t_1 + 2t_2$ non è m''; esso è allora $m'' - 1$, poichè posto $t_1 + 2t_2 = m'' - 1$ la 3ª delle (4) dà: $2m'' - 2 - t_2 \leq n - 1$, ossia $t_2 \geq 2m'' - n - 1$, cioè $t_2 \geq m' - 1$. Questa relazione si accorda colla $t_2 \leq m'$ prendendo $t_2 = m' - 1$, oppure $\left(\text{se non è } m' = \frac{n}{3}\right) t_2 = m'$. — Da tutta questa discussione si traggono i risultati seguenti:

La rappresentazione minima è in generale d'ordine $n - m''$ *e si ha prendendo* t_2 *non maggiore di* m' *e non minore di* $2m'' - n + 1$ *e poi* $t_1 = m'' - 2t_2$, $t_0 = n - 2m'' + t_2 - 1$.

Però quando vi sono infinite rigate minime, cioè quando $2m'' = n + m'$, *la rappresentazione minima è d'ordine* $n - m'' + 1$ *e si ottiene o prendendo* $t_2 = m' - 1$ *e quindi* $t_1 = m'' - 2m' + 1$, $t_0 = 0$, *oppure prendendo* $t_2 = m'$ *e quindi* $t_1 = m'' - 2m' - 1$, $t_0 = 1$. *Questa seconda ipotesi non si può tuttavia fare nel caso più particolare in cui* $m' = \frac{n}{3}$; *per avere allora la rappresentazione minima d'ordine* $n - m'' + 1$ $(= m' + 1)$ *bisogna far la prima ipotesi, cioè prendere* $m' - 1$ *piani* P_2, *una sola retta* P_1 *e niun punto* P_0.

Le equazioni del n° 16, che dànno le x_i in funzione di tre parametri x, y, z esprimono, se questi si considerano come coordinate (non omogenee) di punti in Σ, una particolare rappresentazione di F, su Σ d'ordine $n-m''+1$.

19. Cerchiamo ora gli elementi fondamentali della rappresentazione in ogni caso; ed anzitutto vediamo in quale serie di piani di Σ sono projettati i piani di F. Si ha $n-t_2-1 \geq n+m'-m''$ dalle $t_2 \leq m'$, $2m' \leq m''$; tranne nel caso di $2m'=m''$ e $t_2=m'$. Vi è dunque (n° 12) su F una determinata rigata (non degenere in generale) d'ordine $n-t_2-1$, $F_2^{n-t_2-1}$, passante per le t_1 rette P_1 e pei t_0 punti P_0 (e contenente la curva minima quando $t_2=m'$). Però nel caso della rappresentazione minima *generale* (cioè non per quella corrispondente al caso di $2m''=n+m'$) essendo $t_1+2t_2=m''$ quella rigata si ridurrà all'insieme dei t_0+t_1 piani generatori passanti pei P_0 e P_1 e dell'unica rigata minima $F_2^{m''}$, poichè questo insieme in virtù della (5) è in tal caso appunto dell'ordine $n-t_2-1$. In particolare ciò vale anche nel caso, compreso in quello e che prima si era escluso, in cui $2m'=m''$ e $t_2=m'$; la $F_2^{n-t_2-1}$, che prima trovavamo non esistere in questo caso, si può considerare come composta di quei piani generatori e della rigata minima.

Ciò posto, la $F_2^{n-t_2-1}$ sta coi t_2 piani P_2 in uno spazio projettante U_n, il quale taglia Σ secondo una retta r, imagine di quella rigata. Ogni piano di F contenendo una generatrice di quella rigata sta in un S_{n+1} passante per U_n ed è quindi projettato su Σ secondo un piano passante per r. Dunque: *i piani di* F *hanno per imagini i piani di un fascio* r.

Siccome poi ogni sezione di F fatta con un S_{n+1} è incontrata in una retta da ogni piano generatore, così in Σ la rigata imagine di quella sezione sarà incontrata solo in una generatrice variabile da ogni piano passante per r. *Dunque le* ∞^{n+2} *rigate razionali d'ordine* $n-t_1-2t_2$ *di* Σ *hanno* r *per retta multipla secondo* $n-t_1-2t_2-1$.

I t_1 piani generatori passanti per le rette P_1 ed i t_0 passanti pei punti P_0 sono projettati secondo t_1 punti Q e t_0 rette R appoggiate ad r: essi sono del resto incontrati da ogni sezione di F fatta con un S_{n+1}, sicchè la projezione di questa sezione passerà pei Q e per le R. Nel caso della rappresentazione minima generale risulta da quanto si è visto sulla composizione

della F^{n-t_2-1} che le R coincideranno con r ed i punti Q staranno su r. *Vi sono in* Σ, *oltre ad* r, t_0 *rette* R *fondamentali semplici e* t_1 *punti* Q *fondamentali semplici; essi sono risp. generatrici e punti comuni alle* ∞^{n+2} *rigate razionali considerate. Nella rappresentazione minima generale le* R *vengono a coincidere con* r *ed i* Q *a stare su* r.

È facile vedere che non vi sono altri elementi fondamentali e trovare (valendosi dei risultati del n° 12) quali rigate in Σ corrispondano a rigate di F d'ordine minore di n. Quanto alle curve si ha immediatamente: *Le* C^n *di* F *hanno per imagini delle curve razionali d'ordine* $n-t_2$ (*intersezioni residue delle rigate considerate*) *passanti pei* t_1 *punti* Q *ed appoggiate in* $n-t_2-1$ *punti (variabili in generale) ad* r *ed in un punto a ciascuna delle* t_0 *rette* R.

20. La retta r è dessa generatrice delle rigate d'ordine $n-t_1-2t_2$ su cui abbiamo visto che essa è multipla secondo $n-t_1-2t_2-1$? o in altri termini, quante generatrici mobili di una tal rigata passano per un punto qualunque di r? Per risolvere completamente questa questione consideriamo l' S_{n-1} che congiunge O_{n-2} a quel punto di r e che quindi sta in U_n; esso contiene della $F_2^{n-t_2-1}$, oltre alle t_1 P_1 ed alle t_2 generatrici poste nei P_2, una curva $C^{n-t_1-2t_2-1}$, che è la sola parte dell'intersezione dell'S_{n-1} con F la quale non stia su O_{n-2}. Però se $t_2=m'$, sicchè la $F_2^{n-t_2-1}$ passa per la $C^{m'}$, affinchè quella curva non si decomponga deve essere

$$(n-t_1-2m'-1)+m' \geq n-m'-1 ,$$

il che vale solo se $t_1=0$; cosicchè, se $t_2=m'$, per $t_1>0$ quella curva si decompone nella $C^{m'}$ ed $n-t_1-3m'-1$ rette. Supposto poi $t_2<m'$, tenendo conto dei risultati avuti (n° 13) sull'ordine della curva minima di una rigata di F, si hanno le seguenti condizioni affinchè in generale quella $C^{n-t_1-2t_2-1}$ non si decomponga:

(se $t_2<2m''-n-1$,) $\quad 2(n-t_1-2t_2-1) \geq n-t_2-2$,

(se $t_2 \geq 2m''-n-1$,) $\quad (n-t_1-2t_2-1)+(m''-t_2-1) \geq n-t_2-1$,

ossia: $\quad n-2t_1-3t_2 \geq 0$, $\qquad t_1+2t_2 \leq m''-1$;

di queste la 1ª è sempre soddisfatta in causa delle (4), la 2ª non è solo quando $t_1 + 2t_2 = m''$, cioè nella rappresentazione minima generale. Ma in questo caso già sappiamo che la $F_2^{n-t_2-1}$ si scinde nella rigata minima $F_2^{m''}$ e $t_0 + t_1$ piani: l'S_{n-1} incontra i t_0 piani passanti pei P_0 in t_0 rette che faranno parte della $C^{n-t_1-2t_2-1}$ ed incontra poi la $F_2^{m''}$ in t_2 generatrici poste nei P_2 ed in una $C^{m''-t_2}$.

Ora consideriamo una sezione F_2^n di F con un S_{n+1}: le sue $(n - t_1 - 2t_2 - 1)$ generatrici che incontrano la $C^{n-t_1-2t_2-1}$ sono appunto quelle che nella rigata corrispondente di Σ hanno per imagini le generatrici passanti pel punto considerato di r. Affinchè una di queste coincida con r bisogna che una di quelle stia in U_n; ma la sezione considerata F_2^n in generale non contiene della $F_2^{n-t_2-1}$ alcuna generatrice tranne quando $t_1 + 2t_2 = m''$, cioè quando questa si scinde in $t_0 + t_1$ piani e nella $F_2^{m''}$, sicchè è solo in questo caso che le rigate di Σ hanno *tutte* la r per generatrice. — I piani tangenti nel punto considerato di r alla rigata considerata di Σ sono le projezioni dei piani di F passanti per le $(n - t_1 - 2t_2 - 1)$ generatrici considerate della F_2^n. Quindi in quel punto vi sono tanti piani tangenti fissi per tutte le rigate di Σ quante rette comprende la $C^{n-t_1-2t_2-1}$ corrispondente a quello. Da tutto ciò si conclude:

In generale (cioè escludendo il caso di cui poi si parlerà) le rigate d'ordine $n - t_1 - 2t_2$ *di* Σ *non hanno* r *per generatrice, sicchè per ogni punto di* r *passano* $n - t_1 - 2t_2 - 1$ *generatrici distinte diverse da* r. *Se* $t_2 = m'$ *e* $t_1 > 0$ *si ha la particolarità che in ogni punto di* r *tutte quelle* ∞^{n+2} *rigate hanno comuni* $n - t_1 - 3m' - 1$ *piani tangenti (variabili da punto a punto). — Nel caso della rappresentazione minima generale, cioè quando* $t_1 + 2t_2 = m''$, *in* r *coincidono* t_0 *generatrici (le* t_0 *generatrici* R *del caso generale) e vi sono* t_0 *piani tangenti lungo* r *fissi per tutte le rigate e per tutti i punti di* r; *inoltre vi sono* t_1 *punti di* r *(i* t_1 *punti* Q *del caso generale) in ciascuno dei quali vi è ancora un altro piano tangente comune a tutte le rigate.*

21. Se si fanno due diverse projezioni di F su due spazi ordinari (distinti o no) Σ e Σ', facendo corrispondere due punti di questi spazi i quali siano imagini di uno stesso punto di F si otterrà una notevole corrispondenza univoca tra Σ e Σ', e si

avranno facilmente dalle cose esposte tutte le sue principali proprietà.

Nella corrispondenza tra F e Σ' vi saranno elementi analoghi a quelli della corrispondenza tra F e Σ, cioè ai $t_0 P_0$, $t_1 P_1$, $t_2 P_2$, r, Q, R e si indichino risp. con $t_0' P_0'$, $t_1' P_1'$, $t_2' P_2'$, r', Q', R'. Allora ai piani di Σ corrisponderanno in F delle $F_2^{n-t_2}$ passanti pei P_0 e P_1 e quindi in Σ' delle rigate razionali d'ordine $n - t_1' - 2\,t_2' - t_2$ aventi r multipla secondo $n - t_1' - 2\,t_2' - t_2 - 1$ passanti pei t_1' punti Q' e per le t_0' rette R' ed inoltre per altri t_0 punti C_0' e t_1 rette C_1' (projezioni su Σ' risp. dei P_0 e P_1). Similmente ai piani di Σ' corrisponderanno in Σ delle rigate d'ordine $n - t_1 - 2\,t_2 - t_2'$ aventi r per retta multipla secondo $n - t_1 - 2\,t_2 - t_2' - 1$ e $t_1 + t_0'$ punti Q e C_0 fissi e $t_0 + t_1'$ rette R e C_1 semplici fisse. I due sistemi omaloidici che figurano in questa corrispondenza univoca tra Σ e Σ' sono, come si vede, assai notevoli. Quanto agli elementi fondamentali si vede facilmente che cosa hanno per corrispondenti. Così alla retta r di Σ corrisponde in F una $F_2^{n-t_2-1}$ passante pei P_0 e P_1, e quindi in Σ' una rigata razionale d'ordine $n - t_1' - 2\,t_2' - t_2 - 1$ avente r' multipla secondo $n - t_1' - 2\,t_2' - t_2 - 2$ e passante pei Q', C_0', e per le R', C_1'; ai piani per r corrispondono (oltre a questa rigata) i piani per r' e la corrispondenza è projettiva. Ad uno dei t_1 punti fondamentali Q corrisponde in F il piano per una P_1 e quindi in Σ' uno determinato dei piani $r' C_1'$; ecc. ecc. — Credo inutile il fermarci di più su questa corrispondenza, il cui studio con questo metodo non potrebbe essere più facile (*).

Torino, Novembre 1885.

(*) Il metodo del proiettare varietà appartenenti a uno spazio di più dimensioni su uno spazio a minor numero di dimensioni, oltre ad apparire fin d'ora fecondissimo per lo studio delle varietà sì del primo che di quest'ultimo spazio, promette di diventare tale anche per la teoria delle trasformazioni di uno spazio in se stesso, se queste trasformazioni si considerano (come sopra si è fatto in un caso particolare) come provenienti da due diverse proiezioni su quello di una varietà allo stesso numero di dimensioni. Non sembra improbabile che per questa via si giunga in particolare a completare la teoria delle trasformazioni univoche dello spazio ordinario.

Adunanza del 27 Dicembre 1885.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANGELO GENOCCHI

Sono presenti i Soci: GENOCCHI, COSSA, CURIONI, BRUNO, NACCARI, SPEZIA, D'OVIDIO, SIACCI, SALVADORI, BASSO, il quale ultimo, in assenza dell'Accademico Segretario SOBRERO, ne tiene le veci.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, il Segretario fa notare alla Classe che, fra i libri pervenuti recentemente in dono all'Accademia, merita particolare menzione la 2ª edizione (1ª dispensa) dell'importantissimo *Handbuch der Physiologischen Optik* del Socio straniero Ermanno von HELMHOLTZ. La Classe delibera d'inviare all'autore speciali ringraziamenti.

Si dà lettura di una lettera del Prof. Pasquale VILLARI al Presidente dell'Accademia, nella quale egli esprime a questa la sua riconoscenza per il premio BRESSA che gli fu recentemente conferito.

Il Socio NACCARI legge un lavoro manoscritto del Professore N. JADANZA, intitolato: *Nuovo metodo per accorciare i cannocchiali terrestri.*

Il Socio Cossa presenta e legge un lavoro manoscritto del Prof. I. Guareschi, intitolato: *Nuove ricerche sulla naftalina.*

Il Socio Curioni, anche a nome dei Soci condelegati D'Ovidio e Ferraris riferisce sopra una Memoria dell'Ing. Prof. Camillo Guidi, *Sulla curva delle pressioni negli archi e nelle volte.*

LETTURE

NUOVO METODO

PER

ACCORCIARE I CANNOCCHIALI TERRESTRI.

Lavoro del Prof. N. JADANZA,
presentato dal Socio Prof. A. NACCARI.

1.

In qualunque sistema diottrico centrato esistono sull'asse (retta cardinale) due punti coniugati, e quindi due piani coniugati normali all'asse e passanti per quei due punti, tali che le figure coniugate (oggetto ed immagine) sono eguali ma inversamente poste rispetto all'asse. In altri termini il rapporto m tra una dimensione della immagine alla corrispondente dimensione dell'oggetto ha per quei due piani coniugati il valore -1. I due piani coniugati aventi tale proprietà sono stati chiamati dal Casorati (*) *piani d'isometria inversa* e *punti d'isometria inversa* i punti in cui codesti piani incontrano l'asse del sistema diottrico centrato.

Indicando con E_i, E_i^* le coordinate di tali punti e con F, F^* le coordinate dei due fuochi principali, si ha:

$$\left.\begin{aligned} E_i &= F - \varphi \\ E_i^* &= F^* + \varphi^* \,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

dove φ e φ^* sono la prima e la seconda distanza focale del sistema diottrico dato.

(*) LE PROPRIETÀ CARDINALI DEI CANNOCCHIALI ANCHE NON CENTRATI esposte da Felice CASORATI. Milano, 1872, pag. 68 e seguenti. Cfr. N. JADANZA, *Teorica dei cannocchiali*, pag. 26.

Nel caso di un sistema diottrico a mezzi estremi identici le formole precedenti diventano:

$$\left.\begin{aligned} E_i &= F - \varphi \\ E_i^* &= F^* + \varphi \,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Supposto il sistema diottrico dato composto di due lenti le cui distanze focali sieno φ_1 e φ_2, sono note le formole che danno i punti cardinali e la distanza focale del sistema composto, cioè:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \\ &E = E_1 + \frac{\varphi_1 \Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \;; \qquad E^* = E_2^* - \frac{\varphi_2 \Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \\ &F = F_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \;; \qquad F^* = F_2^* - \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \,. \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

Nelle quali formole Δ rappresenta la distanza delle due lenti, giacchè noi le supponiamo infinitamente sottili, e quindi E_1 rappresenta ad un tempo il primo ed il secondo punto principale della prima lente ed E_2^* il primo ed il secondo punto principale della seconda lente.

I punti d'isometria inversa nel caso di un sistema composto di due lenti si otterranno dalle (2) tenendo conto delle (3); avremo cioè:

$$\left.\begin{aligned} E_i &= F_1 + \frac{\varphi_1^2 - \varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \\ E_i^* &= F_2^* - \frac{\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

2.

Proponiamoci ora di formare con due lenti convergenti un sistema composto convergente tale che il segmento compreso tra i punti d'isometria inversa sia minimo e la sua distanza focale sia eguale a quella della prima lente componente.

Indicando con δ il segmento $E_i\ E_i^*$ sarà

$$\delta = E_i^* - E_i \ ,$$

e quindi per le (4)

$$\delta = F_2^* - F_1 + \frac{2\,\varphi_1\,\varphi_2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \ ,$$

e poichè si ha

$$F_2^* - F_1 = \varphi_1 + \varphi_2 + \Delta \ ,$$

si avrà

$$\delta = \frac{4\,\varphi_1\,\varphi_2 - \Delta^2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \ . \qquad \ldots\ldots (5)$$

Il sistema composto di due lenti convergenti sarà convergente se sarà soddisfatta la condizione

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta > 0 \ ; \qquad \ldots\ldots (6)$$

in tale ipotesi il segmento δ sarà nullo se si ha

$$4\,\varphi_1\,\varphi_2 = \Delta^2 \ . \qquad \ldots\ldots (7)$$

Quando la (7) è soddisfatta lo sarà certamente la (6) poichè da essa si ha

$$(\varphi_1 + \varphi_2)^2 > \Delta^2 \ ,$$

ovvero

$$(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + 4\,\varphi_1\,\varphi_2 > \Delta^2 \ .$$

Il segmento minimo (nullo) si ottiene adunque ponendo le due lenti ad una distanza data da

$$\Delta = 2\sqrt{\varphi_1\,\varphi_2} \ . \qquad \ldots\ldots (8)$$

Dovendo inoltre la distanza focale del sistema composto essere eguale a φ_1, sarà

$$\frac{\varphi_1\,\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} = \varphi_1 \ ,$$

e quindi

$$\Delta = \varphi_1 \ . \qquad \ldots\ldots (9)$$

Eguagliando le (8) e (9) si ottiene

$$\varphi_1 = 4\,\varphi_2 \ . \qquad \ldots\ldots (10)$$

Le (9) e (10) determinano completamente il sistema composto di due lenti.

I punti cardinali di un tale sistema composto si otterranno sostituendo nelle (3) i valori

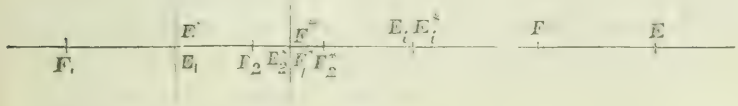
$$\Delta = \varphi_1 \; . \qquad \varphi_1 = 4\,\varphi_2 \; ;$$

si otterrà

$$\left.\begin{array}{ll} & \varphi = \varphi_1 \\ E = E_1 + 4\,\varphi_1 \; ; & F^* = E_2^* - \varphi_1 \\ F = F_1 + 4\,\varphi_1 \; ; & F^* = F_2^* - \varphi_2 \\ & E_i = E_i^* = F_1 + 3\,\varphi_1 \; . \end{array}\right\} \quad \ldots (11)$$

La fig. 1ª rappresenta un sistema composto di due lenti quale ora abbiamo descritto.

Fig. 1.



Al disotto dell'asse sono segnati i punti cardinali dei due sistemi componenti; al disopra i punti cardinali del sistema composto. I punti d'isometria inversa coincidono col punto medio del segmento $F^*\ F$ e quindi costituiscono un punto doppio.

Si noti che in questo caso i due punti doppi, che esistono in qualunque sistema diottrico centrato, sono coincidenti, com'è facile vedere dalla equazione di secondo grado

$$x^2 - (\varphi + \varphi^* + d)\,x + \varphi\,\varphi^* = 0 \; ,$$

le cui radici sono le distanze dei punti doppi dal primo fuoco del sistema (*). Nel nostro caso il sistema è a mezzi estremi identici, quindi

$$\varphi = \varphi^* = \varphi_1$$

e $d = E^* - E = -4\,\varphi_1$; l'equazione precedente diventa

$$(x + \varphi_1)^2 = 0$$

le cui radici sono amendue eguali a $-\varphi_1$.

(*) Vedi N. Jadanza, l. c., pag. 29.

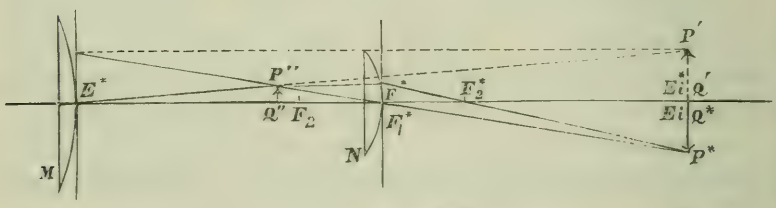
3.

Si comprende facilmente come il sistema composto di due lenti ora studiato possa essere utilizzato con grandissimo vantaggio nel cannocchiale terrestre per raddrizzare la immagine che l'obbiettivo dà di un oggetto esterno.

Basta nell'interno del tubo che contiene l'obbiettivo situare il suddetto sistema in modo che il punto dell'asse dove si forma la immagine data dall'obbiettivo coincida col punto segnato colle lettere E_i, E_i^*; la immagine non si formerà più, e nel medesimo sito si troverà la immagine già raddrizzata della stessa grandezza di quella che sarebbe data dall'obbiettivo.

La fig. 2ª rappresenta il nuovo apparecchio di raddrizzamento ed il suo modo di funzionare. La retta punteggiata $P' Q'$

Fig. 2.



rappresenta la immagine quale sarebbe data dall'obbiettivo del cannocchiale; la retta $P^* Q^*$ continua rappresenta la immagine già raddrizzata.

In essa figura si vede anche il modo di funzionare di ciascuna delle due lenti M ed N che compongono l'apparecchio di raddrizzamento. La prima lente M impedisce la formazione della immagine $P' Q'$ e dà invece la immagine $P'' Q''$ impicciolita e posta a sinistra del primo fuoco F_2 della lente N. Questa ultima raddrizza ed ingrandisce la immagine $P'' Q''$ presentandola nell'istesso sito dove si doveva trovare la prima $P' Q'$.

L'apparecchio di raddrizzamento attualmente adoperato nei

cannocchiali terrestri è formato quasi esclusivamente nei due modi seguenti:

1°) Due lenti aventi la medesima distanza focale sono poste ad una distanza eguale a codesta comune distanza focale (*). In tal caso se la immagine data dall'obbiettivo si trova nel primo fuoco della prima lente, il sistema la raddrizza e la immagine raddrizzata si troverà nel secondo fuoco della seconda lente. Cosicchè la distanza tra i due punti d'isometria inversa è uguale a $3\varphi_1$ (φ_1 essendo la distanza focale comune delle due lenti). Adoperando una semplice lente quella distanza sarebbe $4\varphi_1$.

2°) Due lenti aventi la medesima distanza focale φ_1 sono poste ad una distanza uguale a $\varphi_1\sqrt{2}$. In questo caso la distanza focale del sistema composto è $\varphi = \varphi_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_1$; i due fuochi coincidono amendue col punto che divide per metà la distanza delle due lenti; i due punti principali si succedono nell'ordine E^*, E e coincidono il 1° col primo fuoco della prima lente, il 2° col secondo fuoco della seconda lente. I punti d'isometria inversa coincidono coi punti principali e propriamente E_i con E^* ed E_i^* con E; sicchè il segmento compreso tra i punti E_i, E_i^* è uguale a $2\varphi_1 + \sqrt{2}\varphi_1$.

È adunque di $3\varphi_1$ che resta accorciato il cannocchiale terrestre nel primo caso, e di $(2+\sqrt{2})\varphi_1$ nel secondo caso, adoperando il nostro apparecchio di raddrizzamento, ossia: **il cannocchiale terrestre viene ad avere la medesima lunghezza del cannocchiale astronomico che avesse il medesimo obbiettivo.**

L'intero cannocchiale terrestre è rappresentato dalla figura *I* della tavola annessa. Il secondo fuoco dell'obbiettivo *O* trovasi in F_1^*; quivi si viene a formare la immagine di un oggetto infinitamente lontano.

L'apparecchio di raddrizzamento *M*, formato nel modo anzidetto, è situato in modo che i suoi punti d'isometria inversa E_i E_i^* coincidano col punto F_1^*.

L'oculare di Ramsden *N* serve ad ingrandire la immagine formata in F_1^*, e funziona, com'è noto, da microscopio semplice.

Togliendo il sistema *M* si otterrebbe un cannocchiale astronomico.

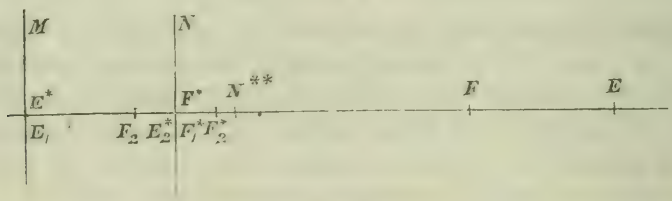
(*) Vedi la nota in fine.

4.

Il precedente sistema di due lenti si può anche utilizzare come obbiettivo di un cannocchiale astronomico; si viene così a formare un istrumento con cui si possono osservare oggetti lontani ed oggetti vicinissimi all'obbiettivo del medesimo. Questo istrumento sarà chiamato **Plesiotelescopio** (*), o (sebbene impropriamente) **cannocchiale microscopio.**

Ciò si rende manifesto dalla fig. 3ª nella quale, allo stesso modo che nella figura prima, abbiamo segnato al disotto dell'asse

Fig. 3.



del sistema i punti cardinali dei sistemi componenti ed al disopra dell'asse quelli del sistema composto.

Poichè il secondo fuoco F^* coincide col punto in cui la lente N (infinitamente sottile) incontra l'asse ed il secondo punto principale E^* coincide col punto in cui l'obbiettivo M incontra l'asse, la immagine di un oggetto situato a distanza infinita si formerà in F^*, precisamente come se la lente N non esistesse.

Vediamo dove si forma la immagine della faccia anteriore della lente M.

Quando le due lenti che compongono il sistema composto sono infinitamente sottili ed hanno per distanze focali φ_1 e φ_2, indicando con N^{**} l'ascissa del coniugato del punto dell'asse in cui la faccia anteriore dell'obbiettivo incontra il medesimo, questa sarà data dalla espressione (**)

$$N^{**} = F_2^* - \frac{\varphi_2^2}{F_1^* - F_2 - \varphi_1},$$

(*) Dalla parola greca πλησίον, *presso, vicino.*

(**) Vedi N. Jadanza, l. c., pag. 37.

ovvero, osservando che

$$F_1^* - F_2 = \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta \ ,$$

$$N^{**} = F_2^* - \frac{\varphi_2^2}{\varphi_2 - \Delta} \ .$$

Nel caso particolare che stiamo considerando, essendo $\Delta = \varphi_1 = 4\,\varphi_2$ si avrà

$$N^{**} = F_2^* + \frac{\varphi_2}{3} \ . \qquad \ldots\ldots (12)$$

e quindi la immagine di un oggetto situato al vertice dell'obbiettivo sarà distante dalla seconda lente della quantità

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_2}{3} = \frac{\varphi_1}{3} \ .$$

Così p. es. se l'obbiettivo ha la distanza focale di 24 centimetri e la seconda lente ha la distanza focale di 6 centimetri, il punto N^{**} sarà distante dalla seconda lente di soli 8 centimetri.

Adunque facendo in modo che il tubetto che porta l'oculare possa scorrere entro quello che contiene l'obbiettivo di una quantità eguale alla terza parte di φ_1 si otterrà il **Plesiotelescopio**, il quale sarà molto utile in quelle osservazioni fisiche e geodetiche in cui occorrerà guardare collo stesso istrumento oggetti lontani ed oggetti vicinissimi.

La figura *II* della tavola annessa rappresenta la forma che dovrebbe avere un cannocchiale cosifatto; essa non ha bisogno di altra spiegazione dopo tutto ciò che si è detto precedentemente.

NOTA.

A). Un sistema composto di due lenti convergenti avrà la distanza focale eguale a quella della prima lente, cioè a φ_1 se si avrà

$$\Delta = \varphi_1 \ .$$

Qualunque sia la distanza focale della seconda lente, cioè φ_2, il secondo punto principale, il secondo fuoco ed il secondo punto d'isometria inversa del sistema composto avranno una posizione fissa, il primo in E_1, il secondo in E_2^* ed il terzo coinciderà col secondo punto d'isometria inversa della lente M, come dicono le formole

$$E^* = E_2^* - \varphi_1 \ .$$

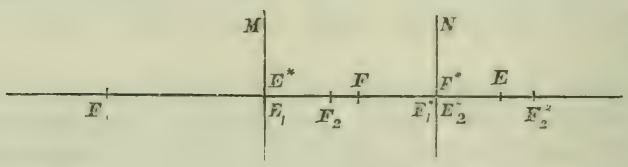
$$F^* = F_2^* - \varphi_2 \ .$$

$$E_i^* = E_2^* + \varphi_1 \ .$$

La posizione degli altri punti E, F, E_i varia al variare di φ_2. Si possono dare tre casi:

1°) $\varphi_1 > \varphi_2$.

Fig. 4.



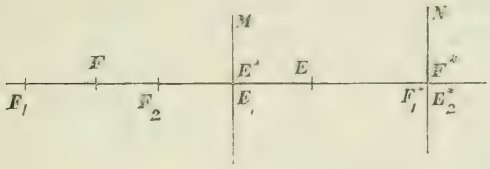
Il primo punto principale ed il primo fuoco saranno dati dalle formole

$$\left.\begin{aligned} E &= E_1 + \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \cdot \varphi_1 \\ F &= F_1 + \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \cdot \varphi_1 \ . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \ (a)$$

Essendo $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ una quantità maggiore di 1, il primo punto principale si troverà sempre (fig. 4ª) fuori del sistema delle due lenti, ed il primo fuoco si troverà tra le due lenti se si ha $\varphi_1 < 2\,\varphi_2$ e fuori di esse se $\varphi_1 > 2\,\varphi_2$, però sempre alla destra di chi guarda la figura. Il caso di $\varphi_1 = 4\,\varphi_2$ esaminato precedentemente è un caso particolare di questo.

2°) $\varphi_1 < \varphi_2$.

Fig. 5.



Il primo punto principale ed il primo fuoco saranno dati dalle (a); però essendo in questo caso

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} < 1 \ ,$$

si avrà (fig. 5ª) che il primo fuoco sarà sempre fuori del sistema delle due lenti e propriamente tra F_1 e la prima lente M. Il primo punto principale sarà sempre tra le due lenti.

3°) $\varphi_1 = \varphi_2$.

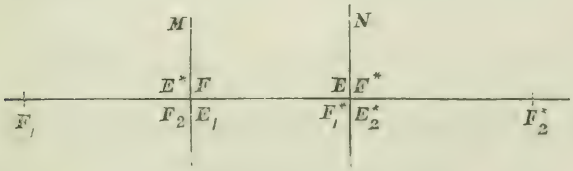
Le formole che dànno E ed F sono

$$E = E_1 + \varphi_1 \ ;$$

$$F = F_1 + \varphi_1 \ ;$$

sicchè il primo fuoco coinciderà con E^* ed il primo punto principale coinciderà col secondo fuoco (fig. 6ª).

Fig. 6.



Quest'ultimo caso che è uno degli attuali sistemi di raddrizzamento della immagine nel cannocchiale terrestre ha la

proprietà che il segmento in cui son compresi i punti cardinali è minimo.

Se poniamo $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = n$ e $\Delta = \varphi_1$ ed osserviamo che si ha

$$F_1 = E_1 - \varphi_1 \quad . \qquad F_2^* E_2^* + \varphi_2$$

le formole che danno i punti cardinali del sistema composto si possono scrivere così:

$$\varphi = \varphi_1 = n\,\varphi_2 \ ,$$

$$E = E_1 + n\,\varphi_1 \qquad\qquad E^* = E_2^* - \varphi_1$$

$$F = E_1 + (n-1)\,\varphi_1 \qquad\qquad F^* = E_2^*$$

$$E_i = E_i + (n-2)\,\varphi_1 \qquad\qquad E_i^* = E_2^* + \varphi_1$$

$$\delta = E_i^* - E_i = (4-n)\,\varphi_1 \ .$$

Da esse risulta, che quando $n > 4$ i punti d'isometria inversa si succedono nell'ordine E_i^*, E_i; il primo è fisso, il secondo cambia posizione secondo i differenti valori che assume n. Per avere una immagine raddrizzata e della stessa grandezza della primitiva, questa si dovrebbe trovare in E_1. Se il fuoco F^* dell'obbiettivo di un cannocchiale terrestre si fa coincidere col punto E_i di un apparecchio di raddrizzamento della forma che abbiamo esaminata (assumendo per n valori maggiori di 4) il cannocchiale terrestre verrebbe ad essere anche più corto del cannocchiale astronomico avente il medesimo obbiettivo. Dunque: **è sempre possibile costruire un cannocchiale terrestre più corto del cannocchiale astronomico che avesse il medesimo obbiettivo.** La differenza tra le lunghezze dei due cannocchiali astronomico e terrestre dipende dal valore di n. In pratica bisognerà dare ad n quei valori maggiori di 4 che non facciano diminuire molto il campo.

Indicando con Φ la distanza focale dell'obbiettivo, e dovendo il secondo fuoco di esso F^* coincidere con E_i dell'apparecchio di raddrizzamento, è chiaro che dovrà essere

$$(n-2)\,\varphi_1 < \Phi \ ,$$

e quindi

$$\varphi_1 < \frac{\Phi}{n-2} \ ,$$

Quest'ultima serve per scegliere le lenti dell'apparecchio di raddrizzamento quando fossero noti Φ ed n.

Anche per l'obbiettivo del *Plesiotelescopio* è vantaggioso dare ad n valori maggiori di 4, poichè l'istrumento sarà più corto.

Diffatti la formola

$$N^{**} = F_2^* + \frac{\varphi_2^2}{\Delta - \varphi_2},$$

osservando che $F_2^* = E_2^* + \varphi_2$ e che $\Delta = \varphi_1 = n\varphi_2$, dà

$$N^{**} = E_2^* + \frac{\varphi_1}{n-1}.$$

Quindi se p. e. $n = 6$ e $\varphi_1 = 25$ centimetri si avrà

$$N^{**} = E_2^* + 5 \text{ centimetri};$$

vale a dire che il movimento del tubo che porta l'oculare è di soli 5 centimetri.

È bene però avvertire, che non bisogna dare ad n valori molto grandi, altrimenti gli oggetti vicinissimi verrebbero ad essere impiccoliti.

B). Volendo un sistema composto di due lenti la cui distanza focale fosse eguale a quella della seconda lente, cioè a φ_2, bisognerebbe porre $\Delta = \varphi_2$; in questo caso le formole che danno i punti cardinali del sistema composto diventano

$$E = E_1 + \varphi_2; \qquad F = F_1 + \varphi_1;$$

$$E^* = E_2^* - \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1}; \qquad F^* = F_2^* - \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1};$$

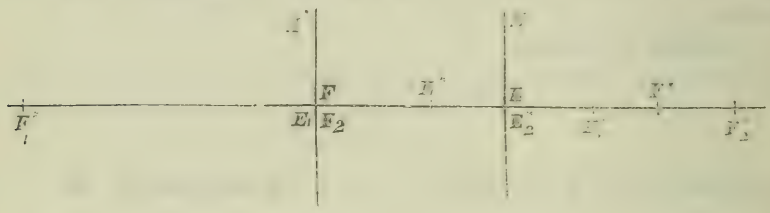
le quali formole fanno vedere che i punti E, F rimangono fissi qualunque sia φ_1; e propriamente il primo in E_2^*, il secondo in E_1.

Degli altri punti E^*, F^* il primo, quando si ha

$$\varphi_2 < \varphi_1,$$

si troverà sempre tra le due lenti, il secondo si troverà sempre fuori alla destra di chi guarda la figura tra E_2^* ed F_2^* (fig. 7ª).

Fig. 7.



Se $\varphi_2 = \varphi_1$, E^* coinciderà con F, F^* con E come nella figura 6ª.

È però degno di nota il caso in cui si ha $\varphi_2 > \varphi_1$ p. e. $\varphi_2 = n\,\varphi_1$ (fig. 8), dove $n > 1$.

In questo caso si avrà

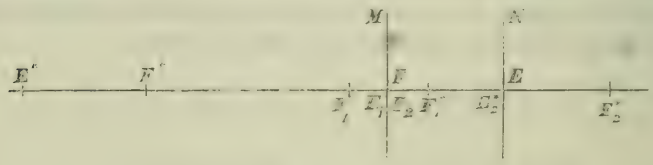
$$E^* = E_2^* - n\,\varphi_2 \;;$$

$$F^* = F_2^* - n\,\varphi_2 \;;$$

e quindi il secondo punto principale E^* si troverà fuori del sistema delle due lenti a sinistra di chi guarda la figura.

Il secondo fuoco si troverà anch'esso fuori del sistema delle due lenti sempre che sarà $n > 2$. In tal caso i punti E^*, F^* si

Fig. 8.



allontaneranno tanto più dalla lente M, quanto più sarà grande il valore di n, ossia quanto più sarà piccola φ_1 rispetto a φ_2.

Un sistema cosiffatto potrà servire utilmente come obbiettivo di microscopio composto, rendendolo molto più corto di quel che dovrebbe essere se l'obbiettivo fosse una semplice lente della medesima distanza focale e la immagine si volesse della medesima grandezza.

Supponiamo, per esempio:

$$\Delta = \varphi_2 = 8\,\varphi_1 \ .$$

Il punto E^* si troverà alla sinistra di M della quantità $E^*E_1 = 7\,\varphi_2$ ed il fuoco F^* si troverà distante da M della quantità $F^*E_1 = 6\,\varphi_2$.

Se immaginiamo un oggetto posto nel punto F_1 distante da E di

$$p = \varphi_2 + \frac{\varphi_2}{8} \ ,$$

la immagine si formerà nel punto F_2^* distante da E^* della quantità

$$E^*F_2^* = p' = 9\,\varphi_2 \ ,$$

e sarà 8 volte più grande dell'oggetto, come risulta dal rapporto

$$G = \frac{p'}{p} = \frac{9\,\varphi_2}{\varphi_2 + \frac{\varphi_2}{8}} = 8 \ .$$

Eppure la immagine dista dalla seconda lente N di una quantità eguale a φ_2.

Se l'obbiettivo del microscopio fosse composto della sola lente N e l'oggetto si trovasse nel punto F_1, la immagine della stessa grandezza si troverebbe ad una distanza da N eguale a $9\,\varphi_2$, e quindi il tubo del microscopio rimane accorciato di $7\,\varphi_2$. Se la lente N non esistesse, la immagine dell'oggetto posto in F_1 si formerebbe ad una distanza infinita.

Un microscopio fatto nel modo ora detto potrebbe avere parecchie applicazioni.

Una fra le altre sarebbe la costruzione di un *dinametro* (per la misura dell'ingrandimento dei cannocchiali) con cui si potrebbe misurare il diametro dell'anello oculare ad $\frac{1}{40}$ di millimetro.

Codesto dinametro è rappresentato in grandezza naturale della fig. *III* dell'annessa tavola.

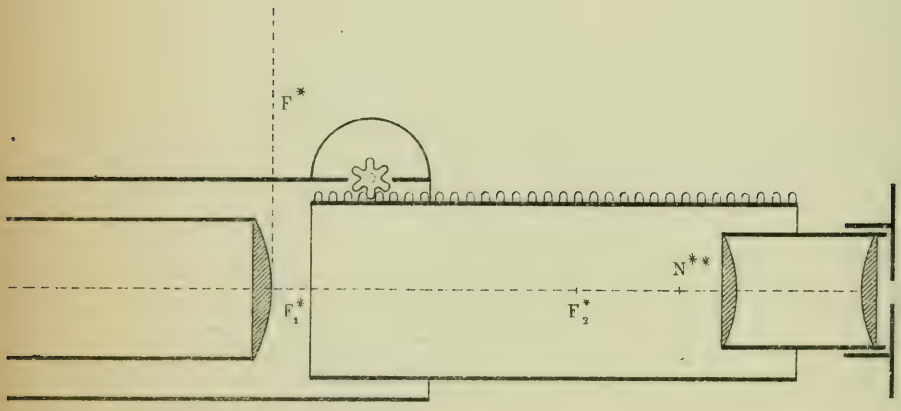
B è un tubo alla cui estremità vi è una lente M la cui distanza focale è uguale ad un centimetro; alla distanza da M

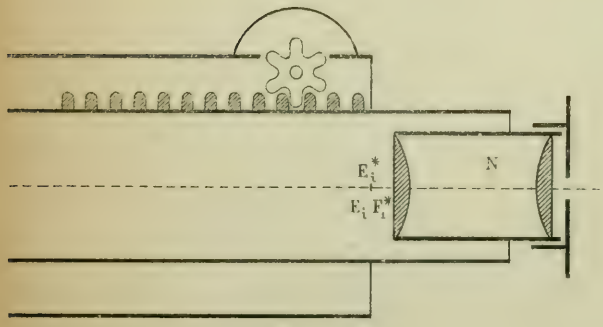
di 4 centimetri trovasi la lente convergente N la cui distanza focale è $0^{m},04$. Al secondo fuoco di questa F_2^* trovasi una laminetta di talco L divisa in decimi di millimetro. L'oculare O serve a guardare questa laminetta.

Se si fa in modo che l'anello oculare si trovi nel punto F_1 (fuoco anteriore della lente M) movendo il tubo B entro l'altro C; la immagine di esso si formerà su L e sarà quadrupla dell'oggetto, sicchè la lettura si farà in *quarantesimi* di millimetro.

Torino, dicembre 1885.

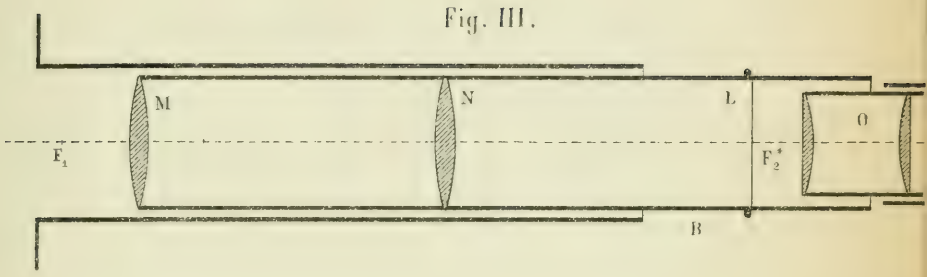
Tav. V.





Lit. F.lli Doyen. Torino.

Fig. III.



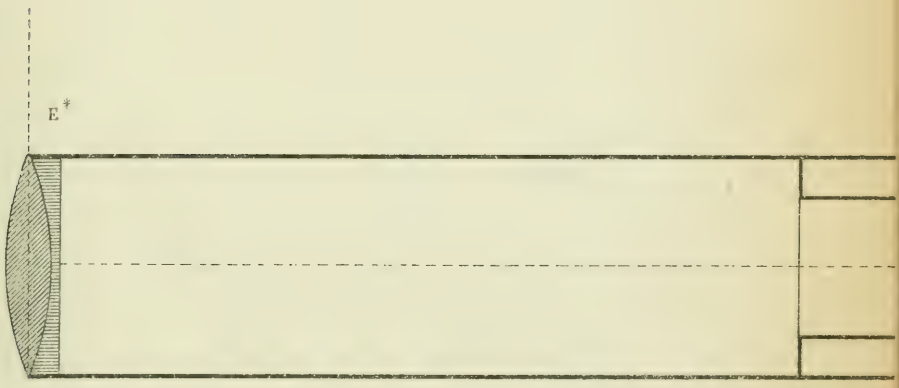
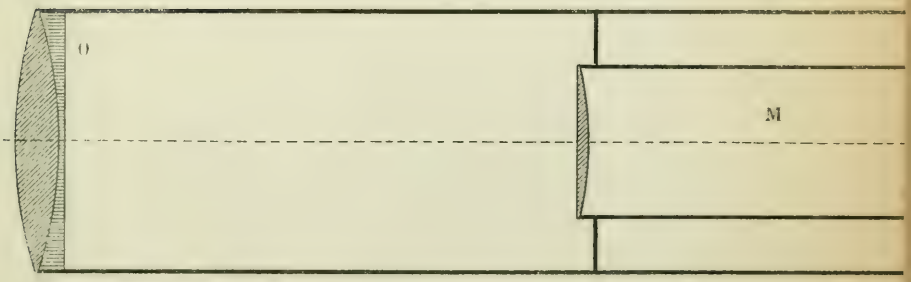


Fig. I.



NUOVE RICERCHE

SULLA

NAFTALINA.

Lavoro del Prof. I. Guareschi,
presentato dal Socio Prof. Alfonso Cossa

Questa Memoria è il seguito dell'altra mia Memoria: *Ricerche sui derivati della naftalina*, pubblicata nel 1883. Molti altri lavori io ho fatto su quest'argomento e spero di poterli pubblicare fra non molto tempo.

Dividerò questa mia Memoria in 4 capitoli.

I.

Sui tetrabromuri di bibromonaftalina fusibile 81-82°.

Si sa che Laurent (1) e poi Glaser (2) trattando col bromo la naftalina o la bibromonaftalina grezza, proveniente dall'azione del bromo sulla naftalina, ottennero un composto $C^{10}H^6Br^2Br^4$ che ora si considera come tetrabromuro di bibromonaftalina. Il composto ottenuto da Laurent per cristallizzazione dall'etere era in piccoli cristalli in forma di tavole romboidali; Glaser, facendolo cristallizzare dal solfuro di carbonio e dalla benzina, l'ottenne in prismi rombici.

(1) Gmelin, *Hand. d. org. Chem.*, VII, p. 34, dalla Revue Scient., XIII, pag. 94.

(2) Ann. d. Chem. u. Pharm., T. 135, pag. 47.

Ma sapendosi che per l'azione del bromo sulla naftalina si formano delle bibromonaftaline isomere, è chiaro che nasca il dubbio essere il composto descritto da Laurent e da Glaser una mescolanza e non un unico corpo.

Nella mia Memoria *Ricerche sui derivati della naftalina*, pag. 10 (1), ho fatto cenno di questo composto ed osservai che esso corrisponde alla bibromonaftalina fusibile 81-82° e non a quella fusibile a 131°. Avendo, come esporrò più particolareggiatamente in una prossima Memoria, trovato il modo di separare abbastanza facilmente le due bibromonaftaline fusibili a 81-82° e a 131° basandomi appunto sulla formazione di questo tetrabromuro, di necessità ho dovuto occuparmi in particolar modo di questo corpo e vedere se in realtà si aveva fino ad ora per le mani un unico composto od una miscela. Dalle ricerche che esporrò in questa Memoria si vedrà che anche partendo dalla bibromonaftalina fusibile 81-82°, pura, si hanno *due* tetrabromuri isomeri; uno fusibile verso 100° e che è predominante, l'altro fusibile 173-174° e che si forma in minore quantità. È solamente dopo numerosi tentativi che sono riuscito a separare questi due composti. Ottenni il tetrabromuro fusibile 173-174° allo stato di purezza, ma l'altro, fusibile verso 100°, non mi fu possibile separarlo completamente dal suo isomero.

Tetrabromuro A *di bibromonaftalina* $C^{10}H^6Br^2.Br^4$. — Si trattano 30 gr. di bibromonaftalina fusibile a 81-82° con 25$^{cc.}$ di bromo, e raffreddata la miscela con ghiaccio, si agita. Dopo circa un quarto d'ora la massa liquida e rossa si è quasi totalmente solidificata. Allora si tratta la massa con etere e raccolto il precipitato (*A*) su un filtro si lava bene con etere. Si ha così una soluzione eterea rossa (*E*). Prima di aggiungere l'etere si può anche scacciare rapidamente l'eccesso di bromo, a freddo, con una corrente d'aria.

Altre volte scioglievo direttamente il prodotto nel cloroformio, decoloravo con potassa, distillavo il cloroformio e trattavo il residuo con etere, ma ho riconosciuto più conveniente operare come ho detto più sopra, benchè si abbia qualche prodotto secondario proveniente dall'azione del bromo sull'etere.

---

(1) Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, Serie II, T. XXXV, e Ann. der Chem., T. 222.

Raccolto l'etere (*E*) di lavaggio e scolorito mediante potassa diluita, si distilla sino a metà volume circa. Per raffreddamento si separa una polvere bianchissima cristallina che fonde 155-170°, poi concentrando di nuovo l'etere madre si ottengono altri prodotti fusibili a 135-155°; 135-145°; 145-170°. Dalle ultime porzioni di etere si ha un prodotto un po' colorato ed una porzione bianca e cristallina fusibile 80-81° che è un poco di bibromonaftalina inalterata.

In altre operazioni ottenni dei prodotti fusibili 134-140°; 122-124°; 122-160°.

Tutte le porzioni fusibili sopra 135° cristallizzate frazionatamente dal cloroformio forniscono un poco di materia oleosa e dei bei cristalli fusibili costantemente a 173-174°, colorandosi in roseo anche un po' prima.

Il precipitato (*A*) più abbondante, allo stato grezzo fonde a 110-120° e cristallizzato dal cloroformio si ha in grossi prismi romboidali brillanti, molti dei quali sono lunghi quasi due centimetri e che fondono a 118-120°: anche le ultime porzioni cristallizzate dal cloroformio danno un prodotto bello, fusibile 118-120°.

Ma il composto così ottenuto, il quale assai probabilmente è quello avuto per le mani da Glaser, non è una sostanza unica ma è una miscela. In una esperienza, 34 grammi di questi bei cristalli trattati ripetutamente con molto etere, nel quale sono poco solubili, fornirono una serie di frazioni che fondevano man mano a temperatura più bassa. Col primo trattamento etereo ebbi prodotti fusibili a 114°; 114-116°; 120-125°; 135-139°. Dal secondo trattamento successivo ebbi: 115-117°; 112-115°; 114-123°; dal terzo: 106-107°; 106-109° e 125-132°; dal quarto: 98-103° e 110-113°. Ma non sono sino ad ora riuscito ad ottenere un prodotto a punto di fusione costante.

Lo stesso tetrabromuro fusibile 173-174° io ho ottenuto nelle medesime condizioni esperimentando colla bibromonaftalina grezza, miscela di quella fusibile 81-82° e 131°.

Il *tetrabromuro A* si ottiene in bei cristalli incolori prismatici, corti; fonde a 173-174° in un liquido rosso, scomponendosi con sviluppo di bromo e d'acido bromidrico. È insolubile nell'acqua, poco solubile nell'alcol, solubile poco nell'etere anche a caldo, solubile nella benzina specialmente a caldo, e così pure nel cloroformio. Bollito con potassa alcolica è attaccato e

trasformato in tetrabromonaftalina; il liquido resta quasi incoloro. Sciolto nella benzina e trattato con soluzione di sodio nell'alcol assoluto si scompone prontamente con separazione di bromuro di sodio e formazione di tetrabromonaftalina fusibile 175°.

Il *tetrabromuro A* analizzato diede i risultati seguenti:

I. 0,7125 di sostanza secca diedero 0,5135 di CO^2 e 0,0750 di H^2O.

II. 0,1705 di sostanza diedero 0,3182 di bromuro d'argento.

III. 0,2621 diedero 0,4903 di $AgBr$.

IV. 0,257 di sostanza diedero 0,4814 di $AgBr$.

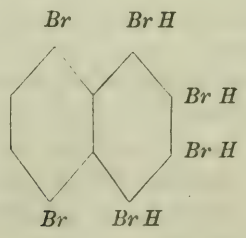
Da cui:

	I.	II.	III.	IV.
$C =$	19.66	—	—	—
$H =$	1.15	—	—	—
$Br =$	—	78.90	79.50 (1)	79.72

Per $C^{10}H^6Br^2Br^4$ si calcola:

$$C = 19.80$$
$$H = 0.99$$
$$Br = 79.21$$

Questo tetrabromuro deve contenere quattro atomi di bromo in un medesimo nucleo, cioè:



(1) Era un prodotto fusibile 165-170°.

Tetrabromuro fusibile verso 100°. — Frazionando dal cloroformio il tetrabromuro che fonde da 110-120° e 120-130° riuscii a separare una porzione fusibile a 97-100° la quale cristallizza in grossi cristalli rombici incolori trasparenti e che per l'azione dell'etilato sodico nella benzina fornisce due tetrabromonaftaline, l'una fusibile a 175° identica con quella che si ottiene dal tetrabromuro *A*, l'altra fusibile a 119-120°, identica con quella che si ottiene dalla porzione di tetrabromuro fusibile verso 120°.

Da tutte le porzioni che fondono sotto 170° non sono riuscito a separare un tetrabromuro a punto di fusione costante ed è la porzione maggiore.

La porzione di tetrabromuro fusibile verso 120° è più facilcilmente alterabile alla luce che non il tetrabromuro fusibile a 174°.

Questo tetrabromuro si scompone facilmente anche per l'azione del calore sviluppando bromo ed acido bromidrico: non ho però voluto esaminare i prodotti che si formano perchè certamente si devono ottenere diversi composti isomeri, in parte dovuti alla miscela dei due tetrabromuri.

La porzione fusibile a 97-100° diede all'analisi i risultati seguenti:

I. Gr. 0,670 di sostanza fornirono 0,4805 di CO^2 e 0,0550 di acqua.

II. Gr. 0,3010 di sostanza fornirono 0,560 di $AgBr$.

Da cui:

	I.	II.
C =	19.60	—
H =	1.26	—
Br =	—	79.07

Per $C^{10}H^6Br^2.Br^4$ si calcola:

C = 19.80
H = 0.99
Br = 79.21

Questo tetrabromuro è più facilmente alterabile dalla potassa alcolica ed il liquido è colorato.

Il tetrabromuro fusibile a 174° si scioglie nell'acido acetico bollente, dal quale cristallizza, senza colorarsi, mentre l'altro tetrabromuro fusibile a 110-120° si scioglie nell'acido acetico colorando il liquido in rosso e scomponendosi. Anche basandomi su questa osservazione, non sono riuscito a separare i due tetrabromuri.

Tetrabromuro di tetrabromonaftalina. — In una esperienza di preparazione del tetrabromuro da 25 gr. di bibromonaftalina fusibile a 81° ottenni, dopo distillato l'etere, diverse porzioni che fondevano 122-124°; 132-140°; 122-160°. Queste porzioni furono fatte bollire a ricadere in molto etere. Evaporato l'etere s'ebbe un olio che poi solidificò. Lavata la massa solida con cloroformio e cristallizzata dal cloroformio fornì un prodotto cristallino bianchissimo, fusibile a 172-174° con sviluppo di bromo ed acido bromidrico. Questo prodotto in due dosamenti di bromo diede:

	I.	II.
Bromo %	83.90	83.35

e corrisponderebbe a $C^{10}H^4B_r^4B_r^4$ pel quale si calcola:

Bromo % = 83.7 .

II.

Tetrabromonaftaline $C^{10}H^4Br^4$.

Laurent, nella Memoria citata, fa solamente un brevissimo cenno della tetrabromonaftalina che si forma decomponendo il tetrabromuro.

Glaser ottiene una tetrabromonaftalina scaldando a 60° la bibromonaftalina (pura?) col bromo, ma non dà notizie precise su questa tetrabromonaftalina, non ne indica il punto di fusione, e dubita che il prodotto così ottenuto sia una miscela di due isomeri.

Partendo dai due tetrabromuri sopradescritti io ho ottenuto due tetrabromonaftaline.

α Tetrabromonaftalina fusibile 175°. — Il tetrabromuro fusibile 173-174° fatto bollire a lungo con potassa o soda alcoliche fornisce la tetrabromonaftalina, però dopo vari tentativi ho riconosciuto più conveniente di far agire l'etilato sodico sulla soluzione benzinica del tetrabromuro, operando nel modo seguente: si scioglie il tetrabromuro in benzina a bagnomaria; d'altra parte si scioglie poco più della quantità teorica di sodio nell'alcol assoluto (ad esempio: gr. 0,7 di sodio in 30 gr. d'alcol per 5 gr. di tetrabromuro in 100 gr. di benzina). Mescolate le due soluzioni ancora calde si osserva una viva reazione; si continua a scaldare, a bagnomaria, per circa una mezz'ora. Tutto il bromuro di sodio si precipita (nel caso indicato, gr. 1,6).

Separata la benzina dal bromuro di sodio, lavata bene con acqua sino a che questa non ha più reazione alcalina, si distilla. Il residuo cristallino quasi bianco, lavato con etere, si ricristallizza dall'alcol bollente. Tutto il prodotto fonde a 174-175°. Dai lavaggi eterei si ottiene una piccola quantità di prodotto fusibile a 174-175°, ma nulla che fonda ad una temperatura più bassa. Il composto ottenuto, frazionato varie volte dall'alcol, mantiene il punto di fusione costante e sublimato mantiene pure lo stesso punto di fusione. La quantità di prodotto è teorica. Nel caso precedente da 5 grammi di tetrabromuro si ottennero gr. 3,4 di tetrabromonaftalina.

Si forma secondo l'equazione seguente:

$$C^{10} H^6 Br^2.Br^4 + 2\, Na\, O\, C^2 H^5 =$$
$$= 2\, Na\, Br + C^{10} H^4 Br^4 + 2\, C^2 H^5.O H.$$

Questa tetrabromonaftalina, ma insieme all'isomero fusibile 118-120°, si ottiene anche partendo dal tetrabromuro grezzo fusibile 118-120° preparato colla bibromonaftalina grezza o colla bibromonaftalina fusibile a 81-82°. Senonchè in questo caso bisogna, dopo ottenuto il residuo per distillazione della benzina, lavarlo ripetutamente con etere, e a caldo, che toglie la tetrabromonaftalina fusibile 119-120° e lascia insolubile la maggior parte della tetrabromonaftalina fusibile a 175°, la quale si ricristallizza dall'alcol bollente, scolorando con carbone se occorre.

La *tetrabromonaftalina* così ottenuta cristallizza dall'alcol bollente in lunghi aghi setacei, splendenti. È poco solubile nell'alcol freddo, più solubile nell'alcol bollente (1 p. di tetrabro-

monaftalina in circa 200 p. di alcol a 95 p. 100, bollente); è pochissimo solubile nell'etere, si scioglie nella benzina e nel cloroformio. Fonde a 175° in un liquido incoloro; sublima in lamelle madreperlacee. In soluzione acetica ossidata con acido cromico fornisce un tetrabromonaftochinone $C^{10} H^2 Br^4 O^2$ fusibile 224-225° ed un composto $C^8 H^4 Br^2 O^2$, cristallino, fusibile 188-189° identico col composto ottenuto da me nelle stesse condizioni ossidando la bibromonaftalina fusibile 82° e che io denominai *bibromoftalide*. Non ho ricercato l'acido bibromoftalico nelle acque madri.

Questa tetrabromonaftalina esiste in una modificazione fisica diversa. Quando si cristallizza dall'alcol si deposita in aghi anche se il raffreddamento è rapido, però sulle pareti del vaso e sul fondo si deposita una polvere cristallina formata di prismi corti, brillanti, duri, pesanti che fondono anch'essi a 175° e che hanno la stessa composizione del composto cristallizato in aghi. Ricristallizzando questa polvere dall'alcol si ha nuovamente in aghi. Il composto ottenuto in polvere cristallina sembra anche meno solubile nell'etere che non il composto cristallizzato in aghi.

Varie preparazioni diedero all'analisi i risultati seguenti:

I. Gr. 0,2515 di sostanza secca diedero 0,2578 di $C O^2$ e 0,0275 di $H^2 O$. Questo prodotto fondeva 170-172°.

II. Gr. 0,2594 di sostanza diedero 0,4376 di bromuro d'argento.

III. Gr. 0,4295 di sostanza fornirono 0,4258 di $C O^2$ e 0,045 di $H^2 O$.

IV. Gr. 0,3449 diedero 0,5853 di $Ag Br$.

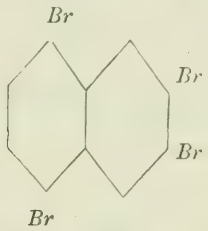
Da cui:

	I.	II.	III.	IV.
C =	27.90	—	27.03	—
H =	1.21	—	1.16	—
Br =	—	71.78	—	72.24

Per $C^{10} H^4 Br^4$ si calcola:

C = 27.02
H = 0.90
Br = 72.07

Questa tetrabromonaftalina dando per ossidazione bibromoftalide, che contiene i due atomi di bromo in posizione *para*, e tetrabromonaftochinone, deve essere, con molta probabilità:



Tetrabromonaftalina fusibile 119-120°. — La porzione di tetrabromuro $C^{10} H^6 Br^2 . Br^4$ che fonde 118-120° ed anche quella fusibile 97-100° furono trattate nello stesso modo indicato pel tetrabromuro fusibile a 173-174°, cioè sciolti in benzina furono mescolati con etilato sodico sciolto in alcol assoluto. Si completa la reazione a bagnomaria. Si filtra e si lava il precipitato di bromuro di sodio con benzina. La benzina che è appena giallastra si lava bene con acqua sino a che non abbia più reazione alcalina, poi si distilla.

Il residuo dalla benzina si riprende con etere che lascia indisciolta la tetrabromonaftalina fusibile a 175° e scioglie il suo isomero. La soluzione eterea evaporata lascia un residuo che si ripiglia di nuovo con meno etere per lasciare indisciolto un poco di tetrabromonaftalina fusibile 175°; il nuovo residuo che si ha dall'etere si fa cristallizzare varie volte dall'alcol bollente e si ha così un prodotto che fonde a 119-120° in un liquido incoloro.

Questo prodotto diede:

I. Gr. 0,3152 di sostanza fornirono 0,5338 di $AgBr$.

II. Gr. 0,2846 di sostanza fornirono 0,2871 di CO^2 e 0,0275 di H^2O.

Da cui:

	I.	II.
C =	—	27.51
H =	—	1.07
Br =	72.06	—

Per $C^{10} H^4 Br^4$ si calcola:

$$C = 27.02$$
$$H = 0.90$$
$$Br = 72.10$$

Questa tetrabromonaftalina cristallizza dall'alcol in piccoli aghi incolori; si scioglie nell' etere e nella benzina. Fonde a 119-120°.

III.

Tetrabromonaftochinoni $C^{10}H^2Br^4O^2$.

Sono conosciuti due tetrabromonaftochinoni, e sono: l'uno il *tetrabromonaftochinone* di Flessa (1), ottenuto ossidando con acido nitrico il pentabromoznaftol fusibile a 237°, fonde a 164° e per ossidazione con acido nitrico fornisce acido tribromoftalico fusibile a 191°; l'altro è il *tetrabromoznaftochinone* ottenuto da Blümlein (2) ossidando il pentabromoznaftol fusibile a 238-239°, fonde a 265° ed ossidato fornisce acido bibromoftalico fusibile a 208°.

Un terzo tetrabromonaftochinone io ho ottenuto ossidando con acido cromico la tetrabromonaftalina fusibile a 175°. È bene operare su piccole quantità ogni volta. Si scioglie 1 gr. di tetrabromonaftalina fusibile a 175° in circa 120 gr. di acido acetico glaciale e d'altra parte 5 gr. di acido cromico in circa 90 gr. di acido acetico glaciale. Mescolate le due soluzioni si riscalda a bagnomaria per circa un'ora e mezzo, sino a che il liquido è diventato di un bel verde smeraldo. Con acqua si precipita il chinone ed il prodotto giallo ottenuto si ricristallizza dall'alcol. Dalle acque acetiche poi si ricava la *bibromoftalide* come dirò più innanzi.

Operando su quantità maggiore è facile avere delle miscele gialle che fondono a 180-200° e contenenti ancora della tetra-

(1) *Berichte d. deut. Chem. Gesell.*, XVII, pag. 1481.
(2) *Berichte*, XVII, pag. 2489.

bromonaftalina non ossidata; se si eccede nell'acido cromico per ossidare questa, si distrugge il chinone formato.

Questo *tetrabromonaftochinone* cristallizza dall'alcol bollente in begli aghi prismatici, d'un giallo ranciato, poco solubili nell'alcol freddo. Concentrando le soluzioni alcoliche il prodotto si altera. Fonde a 224-225° e sublima in aghi gialli.

All'analisi diede i risultati seguenti:

I. Gr. 0,4493 di sostanza secca fornirono 0,4214 di CO^2 e 0,0272 di H^2O.

II. Gr. 0,2042 di sostanza diedero 0,3245 di $AgBr$.

Da cui:

	I.	II.
C =	25.57	—
H =	0.6	—
Br =	—	67.6 .

Per la formola $C^{10}H^2Br^4O^2$ si calcola:

$$C = 25.31$$
$$H = 0.42$$
$$Br = 67.50 .$$

Le acque madri acetiche verdi dalle quali si separò il tetrabromonaftochinone, furono evaporate a secco ed il residuo ripreso con poca acqua lasciò una parte cristallina poco solubile, rievaporato il liquido sino a secchezza e ripreso il residuo con poca acqua si ebbe un'altra porzione di sostanza cristallina. Questa sostanza cristallina, verdastra, fu sciolta a caldo nella soda e la soluzione filtrata, fu precipitata con acido cloridrico. Il precipitato fu sciolto in alcol e dalla soluzione scolorita con carbone si ottennero delle magnifiche tavole splendenti, fusibili a 188-189° e che sublimate fondevano a 187°,5-188°.

All'analisi diedero:

I. Gr. 0,3560 di sostanza fornirono 0,4322 di CO^2 e 0,0474 di H^2O.

II. Gr. 0,2443 di sostanza diedero 0,3163 di $AgBr$.

Da cui :

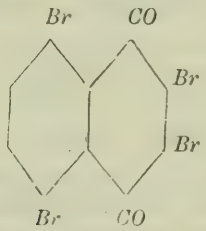
	I.	II.
C =	33.10	—
H =	1.47	—
Br =	—	55.09

La composizione e tutti i caratteri di questa sostanza ne dimostrano la identità colla sostanza alla quale diedi il nome di bibromoftalide e che ottenni insieme al bibromonaftochinone per ossidazione della bibromonaftalina fusibile 81-82° (1).

Per $C^8 H^4 Br^2 O^2$ si calcola:

$$C = 32.87$$
$$H = 1.37$$
$$Br = 54.80$$

Questo tetrabromonaftochinone contiene *due* atomi di bromo in un nucleo e *due* nell'altro nucleo; si può rappresentare, con molta probabilità, nel modo seguente:



IV.

Bicloronaftaline (2).

Ho studiato l'azione dell'acido cromico su tre bicloronaftaline, come già ho fatto per la bibromonaftalina: quella fusibile 38-40° (che dubito sia una miscela di due), quella fusibile 68° e l'altra fusibile a 107° (io trovo 107-107°,5) di Atterberg.

(1) Vedi mia Memoria, *loc. cit*, pag. 16.

(2) Ho fatto cenno di queste ricerche nella *Rivista di Chimica e Farmacologia*, vol. II, pag. 383.

Dalla bicloronaftalina fusibile 38-40° preparata per l'azione della potassa alcolica sul tetracloruro di naftalina, ottenni un nuovo bicloronaftochinone fusibile a 178-178°,5 e cristallizzato in begli aghi gialli, sublimabili. Insieme a questo chinone ottenni un composto fusibile 118°,5, giallo, ben cristallizzato e un prodotto che fonde scomponendosi sopra 240°.

Dalla bicloronaftalina fusibile a 68° ottenni un altro bicloronaftochinone fusibile a 171-174°, assai bene cristallizzato e sublimabile in aghi gialli. Insieme a questo si forma un altro prodotto di ossidazione che pare simile alla bibromoftalide.

Dalla bicloronaftalina fusibile 107-107°,5, di Atterberg, preparata trattando ripetutamente con percloruro di fosforo la binitronaftalina fusibile a 214-216°, non ho potuto ottenere un bicloronaftochinone (nelle condizioni in cui ho operato) ma un nuovo acido monocloroftalico, ben cristallizzato, fusibile 184°. L'anidride di questo nuovo acido monocloroftalico fonde a 121-122°. Un composto giallo che pare un chinone si forma, ma resta distrutto dall'acido cromico.

Mi riserbo lo studio dei prodotti qui appena accennati. Avevo intenzione di estendere queste ricerche ad altre bicloronaftaline, ma alcuni chimici hanno già intrapreso lo studio dell'azione dell'acido cromico sulla εbicloronaftalina.

Lo studente signor Biginelli sta studiando nel mio laboratorio le monocloromonobromonaftaline che si formano per l'azione del cloro sulla zmonobromonaftalina: una monocloromonobromonaftalina, separata allo stato di purezza, cristallizza bene e fonde a 119-119°,5. Si vedrà se lo stesso composto si forma per l'azione del bromo sulla zmonocloronaftalina; in questo caso fu separata sino ad ora una seconda monocloromonobromonaftalina che fonde a 65-66°. Pare che questi due isomeri si formino insieme nei due casi.

È dallo studio dei prodotti di ossidazione dei derivati di sostituzione della naftalina che si potrà forse trarre qualche conclusione importante sulle condizioni per le quali un nucleo della naftalina è più stabile dell'altro.

Perchè si formi direttamente coll'acido cromico un naftochinone bisostituito stabile sembra che debbano essere liberi due posti *para* di un medesimo nucleo.

Torino,
R. Università - Istituto Chimico-Farmaceutico.
Novembre 1885.

RELAZIONE

del Socio Curioni, *condeputato coi Soci* D'Ovidio *e* Ferraris *ad esaminare il lavoro del sig. Ing. Prof.* Camillo Guidi ***Sulle curve delle pressioni negli archi e nelle volte.***

L'ingegnere Camillo Guidi, professore di Statica grafica nella R. Scuola d'applicazione degli Ingegneri in Torino, facendo quasi seguito ad un altro suo lavoro col titolo « *Sugli archi elastici* » inserito nella Serie II, Tom. XXXVI dei volumi delle *Memorie* di questa R. Accademia, ha presentato un altro lavoro « *Sulla curva delle pressioni negli archi e nelle volte* ».

Nel metodo di Eddy ed in quello di Culmann, per la costruzione grafica della curva delle pressioni in un arco metallico, s'incomincia col trascurare le deformazioni prodotte dallo sforzo diretto secondo l'asse dell'arco stesso, e si tiene poi conto del suo effetto studiandolo insieme a quello prodotto da una variazione di temperatura, da un difetto di posa, ecc. E il professore Guidi mostra nel suo nuovo lavoro come, nell'applicare il metodo grafico di Eddy, si possa tener conto simultaneamente delle deformazioni prodotte dal momento flettente, dallo sforzo diretto secondo l'asse dell'arco e da cause indipendenti dai carichi (variazioni di temperatura, difetto di posa, ecc.); cosicchè con un'unica costruzione grafica giunge ad applicare il metodo stesso alla determinazione della vera curva delle pressioni.

L'autore incomincia col ricordare le tre equazioni di elasticità per un arco elastico simmetrico, di un sol pezzo, incastrato alla estremità; e, dopo apportate alle equazioni stesse alcune semplificazioni accettabili quando il raggio di curvatura dell'arco è assai grande a fronte della sua altezza nel senso del raggio

(come succede quasi sempre nei casi pratici delle arcate dei ponti e delle centine delle tettoie), passa a trattare separatamente:

il caso di un arco la cui sezione varia secondo una legge qualunque;

il caso di un arco la cui sezione varia in modo da essere costante il prodotto del suo momento d'inerzia rispetto alla orizzontale determinata dal suo baricentro pel coseno dell'angolo che la tangente all'asse dell'arco nel baricentro stesso fa coll'asse orizzontale delle ascisse;

il caso di un arco la cui sezione è costante.

Dopo aver spiegato il metodo grafico pel primo caso, lo applica alla vôlta del ponte Mosca sulla Dora presso Torino, facendo le due ipotesi: che il carico accidentale si trovi solo sulla metà della lunghezza del ponte; e che quindi il carico stesso si estenda al ponte intiero. Confronta la spinta orizzontale ottenuta nella seconda ipotesi con quella stata trovata dall'ingegnere Castigliano per la stessa vôlta seguendo un altro metodo, e rileva come la differenza dei due risultati sia minima per non giungere al 2, 5 per 1000.

L'autore vien dopo alla trattazione del secondo caso; e, supponendo che la sezione della vôlta del detto ponte vari colla legge pel caso stesso formulata, vi applica il metodo grafico per la determinazione della relativa curva delle pressioni. I risultati ottenuti, come è ben naturale, non sono che approssimati, perchè dedotti con dati non corrispondenti alla realtà; ma tuttavia non sono affatto destituiti d'interesse in quanto dànno un'idea del grado di approssimazione che si può ottenere coll'ipotesi ammessa nel secondo caso notevolmente semplificante la costruzione grafica.

Finalmente l'autore passa alla costruzione grafica relativa al terzo caso, che è il più semplice e che non manca di presentarsi nella pratica delle costruzioni.

La Commissione ritiene commendevole la Nota del professore Guidi, sia perchè si riferisce ad uno dei più importanti argomenti relativi alla scienza delle costruzioni, intorno al quale

da qualche tempo e ancora al giorno d'oggi molto si studia e si lavora, sia per il modo con cui è condotta nelle varie sue parti, tanto dal lato scientifico, quanto dal lato tecnico; e propone che si passi alla lettura della Nota stessa onde poter votare per la sua inserzione nei volumi delle *Memorie*.

Torino, 27 dicembre 1885.

G. Curioni, *Relatore*.
E. D'Ovidio.
G. Ferraris.

In seguito a lettura del lavoro del sig. Prof. Camillo Guidi, la Classe ne approva la stampa nei volumi delle *Memorie* dell'Accademia.

L'Accademico Segretario
A. Sobrero.

CLASSI UNITE

CLASSI UNITE

Adunanza del 13 Dicembre 1885

Sono presenti i Soci: della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Genocchi, Presidente, Sobrero, Lessona, Dorna, Salvadori, Cossa, Bruno, Berruti, Basso, D'Ovidio, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia e Gibelli;

Della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, Gorresio, Peyron, Flechia, Rossi, Manno, Schiaparelli, Pezzi, Ferrero, Carle e Nani.

Dichiaratasi dal Presidente aperta la tornata, il Socio Ferrero, ad invito del Presidente, legge il verbale dell'adunanza a Classi Unite, tenutasi il 14 giugno 1885, nella quale, in assenza del Socio Sobrero, egli compiè l'ufficio di Segretario. Il verbale è ad unanimità approvato.

Dopo ciò il Presidente dà la parola al Socio Basso, il quale come Segretario e relatore della 2ª Commissione pel IV premio Bressa, a cui sono chiamati i soli italiani (quadriennio 1881-1884), legge la seguente

RELAZIONE.

Egregi Colleghi,

Per incarico della seconda Giunta per il IV premio Bressa, composta dei Soci: Lessona, Dorna, Cossa, Basso, Gibelli, Flechia, Manno, Ferrero, Carle e Nani, ho l'onore di esporvi il risultato sommario delle ricerche da essa eseguite e le pro-

poste che ne conseguono, ottemperando così a quanto dispone l'articolo 5° del Regolamento interno relativo al conferimento dello stesso premio.

Seguendo l'ordine stabilito dalle disposizioni testamentarie del fondatore, al IV premio Bressa potevano concorrere i soli Italiani per opere o scoperte pubblicate durante il quadriennio 1881-84.

La prima Giunta da voi nominata il 9 dicembre 1883, dopo avere esaminate le domande di concorso al premio ed avere accolte quelle presentate da Soci nazionali, pose termine al suo mandato riferendo nell'adunanza delle Classi unite del giorno 12 aprile dell'anno corrente sulle proposte meritevoli di essere prese in considerazione per il conferimento del premio. Alla Giunta attuale, a nome della quale ho l'onore di parlarvi, in conformità dell'art. 4° del Regolamento, fu affidato l'incarico di esaminare e confrontare le proposte della Giunta precedente e di mettere in evidenza quelle giudicate più degne in una relazione da pubblicarsi negli Atti dell'Accademia. Quest'ultimo ufficio appunto adempie la Giunta in quest'adunanza; e l'Accademia a Classi unite dovrà procedere nella prossima sua seduta all'aggiudicazione definitiva del premio.

Le proposte ammesse dalla prima Giunta, che furono a voi già annunziate nella ricordata adunanza del 12 aprile scorso, si riducevano alle otto seguenti, delle quali le prime sei furono presentate da Soci nazionali e le due ultime provengono da domande presentate di propria iniziativa dai rispettivi concorrenti.

1° Professore Angelo ANDRÉS: *Monografia delle Attinie*, pubblicata nelle *Memorie* della R. Accademia dei Lincei, nell'anno 1883.

2° Cav. Giacomo BOVE: Viaggi ed esplorazioni nelle regioni antartiche, descritti in parecchi opuscoli e specialmente in quello intitolato: *Patagonia, Terra del fuoco, Mari australi*, Genova 1883, e nell'altro pubblicato a Buenos-Aires, col titolo: *Expedicion austral Argentina*.

3° Professore Camillo GOLGI: Studi di Istologia, pubblicati nei volumi della nostra Accademia, di quella dei Lincei, dello Istituto Lombardo, ecc., e segnatamente l'opera

che ha per titolo: *Studi sulla fina anatomia degli organi centrali del sistema nervoso*, 1884.

4° Sig. GIUSEPPE PROCENZANO: *Nuovi studi sulle relazioni di posizione delle forme geometriche.* Napoli, 1885.

5° Professore ANDREA SACCARDO: opera in tre volumi, intitolata: *Sylloge fungorum omnium hucusque cognitorum.* Padova, 1882; un volume che ha per titolo: *Genera Pyrenomycetum schematice dilineata.* Padova, 1883.

6° Professore PASQUALE VILLARI: *Niccolò Machiavelli e i suoi tempi illustrati con nuovi documenti:* 3 volumi, di cui i due ultimi furono pubblicati in Firenze negli anni 1881-82.

7° Cav. PIETRO AMAT DI SAN FILIPPO: opera in due volumi, col titolo: *Studi biografici e bibliografici sulla storia della geografia in Italia.* Roma, 1884.

8° Professore AUGUSTO RIGHI: quindici Memorie sopra argomenti di *Fisica sperimentale*, inserite parte nei volumi della R. Accademia dei Lincei e parte in quelli della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.

In una delle sue riunioni la Giunta si propose di disporre secondo l'ordine di merito relativo gli otto concorrenti ora nominati; e nel procedere in questo lavoro di ordinamento essa ha creduto di riconoscere che le opere dei signori ANDRÉS, AMAT DI SAN FILIPPO e PROCENZANO sono bensì, quando si considerino ciascuna per se stessa, fornite di pregi ragguardevoli, ma non appaiono tuttavia di così alta importanza da stare, in certa guisa, a paro coi lavori degli altri cinque. Perciò la Giunta ha stabilito di presentare oggi all'Accademia soltanto questi ultimi come i più degni del premio da conferirsi. Dovendo poscia per questi proposti stabilire una graduazione di merito, la quale d'altronde non vincola per nulla la scelta che l'Accademia crederà di fare, dalle discussioni e dalle votazioni seguite in seno alla Giunta si ebbe il seguente risultato:

1. PASQUALE VILLARI,

2. ANDREA SACCARDO,

3 e 4. GIACOMO BOVE e CAMILLO GOLGI *ex aequo*,

5. AUGUSTO RIGHI.

Per lo esame dei lavori che si presentarono al concorso la Giunta richiese anche il parere di parecchi Soci dell'Accademia, i quali non solo le furono larghi dei loro autorevoli consigli, ma vollero pure accompagnare i loro giudizi con accurate relazioni parziali. Delle principali fra queste gioverà che io qui esponga un breve compendio.

L'opera di PASQUALE VILLARI su Niccolò Machiavelli e i suoi tempi è reputata il più notevole lavoro di storia che abbia veduto la luce in Italia negli ultimi anni. Essa meritamente incontrò pure grande favore all'estero ed ottenne l'onore, raro ad opere italiane, di essere tradotta in inglese ed in tedesco. L'argomento è importante sì per la storia politica come per quella letteraria d'Italia e per la conoscenza dell'età, così notevole nella storia generale, in cui al medio evo finito succedono i tempi moderni con nuovo indirizzo nella politica, nella vita sociale ed intellettuale. Il VILLARI con somma maestria pennelleggia questi tempi, espone quel grande rivolgimento intellettuale che si addimanda il Rinascimento, ne indaga i varii effetti nella morale, nella politica, nelle lettere e nelle arti. Con diligenza di ricerche documentate, con abilità di narrazione, con profondo senso critico l'Autore studia la grande figura del Machiavelli, la sua operosità politica e letteraria. Gli scritti del Segretario Fiorentino, soggetto di tante dispute e disparati giudizi, soprattutto il trattato del *Principe*, sono sottoposti a nuovo esame, che frutta intelligente discussione delle opinioni manifestate dai critici e considerazioni nuove, onde si dischiude largo campo al lettore per intendere e giudicare i tempi e l'uomo. Alle qualità intrinsiche, che costituiscono il pensatore e lo storico, il VILLARI unisce quelle doti artistiche, le quali furono onore della storiografia italiana e che purtroppo difficilmente si rinvengono nei moderni. Per questo rispetto l'opera del VILLARI riesce altresì di decoro alle patrie lettere.

La *Sylloge* del Prof. ANDREA SACCARDO è il frutto maturato, succoso di venti anni di studi indefessi nel campo della micologia. Il dottissimo autore vi si è preparato di lunga mano indagando e verificando i lavori precedenti, poi raccogliendo materiale nuovo nelle sue lunghe escursioni e finalmente addestrandosi nella critica sagace a scernere parecchie specie nuove ed a mettere ordine

in molti gruppi generici assai confusi. La *Sylloge fungorum omnium* è destinata a diventar in certo modo la bibbia dei micologi. Essa ha apportato la luce e l'ordine in un oceano caotico di materiali sparpagliati in centinaia di pubblicazioni in tutte le lingue durante quasi un mezzo secolo e quindi aggrovigliati in una sinonimia confusissima. In questa *Sylloge* le specie sono classificate in un sistema razionale, che sorge dalle più recenti e numerose scoperte sull'anatomia, morfologia e biologia dei funghi; ciascuna è accompagnata da una descrizione sufficiente, da una ricca sinonimia, dalla citazione esatta degli autori che già ne trattarono, del *substratum* su cui vegeta, delle figure, delle raccolte essiccate, ecc. . . Indici accuratissimi, redatti con diversi criteri, facilitano mirabilmente le ricerche. Non è perciò a stupire se l'apprezzamento favorevolissimo dei lavori del Saccardo per parte dei naturalisti nostrani trovò subitamente una viva eco nei più illustri botanici-micologi stranieri, fra i quali si esprimono con frasi più accalorate di elogio il venerando nestore dei micologisti Berkeley, e gli illustri Winter, Rommeguère, Kohl, Klein e De Bary.

I viaggi e le esplorazioni del sig. Giacomo Bove debbonsi già fin d'ora ritenere fecondi di importanti risultati per la antropologia e le scienze naturali. Il Bove arricchì i musei di Roma e di Genova di importanti collezioni etnografiche, zoologiche ed antropologiche. Nelle sue collezioni etnografiche si trovano più di quindici mila oggetti appartenenti a popolazioni diverse e sconosciute. La collezione antropologica comprende trentaquattro scheletri completi appartenenti a popoli vari di cui solo a Parigi si trovano alcuni crani. Della collezione zoologica fanno parte molti avanzi di animali poco noti che vivono nelle lontane regioni da lui percorse. Si può con fondamento sperare che il nuovo viaggio di esplorazione nell'America Australe che il Bove sta ora per intraprendere recherà frutti anche più copiosi in servizio della geografia, delle scienze naturali e della civiltà umana.

Il Prof. Camillo Golgi nel quadriennio 1881-84 pubblicò lavori attinenti a varie parti delle scienze biologiche; fra essi però i più importanti sono, senza dubbio, quelli sul *sistema nervoso*. Egli incominciò dal portare ad un alto grado di perfezione i metodi di ricerca, raggiungendo per questa via risultati

che osservatori come Kühne, Schwalbe e Ranvier chiamarono mirabili e sono tali davvero quando si mettano a confronto coi risultati che si ottengono coi metodi che finora erano stati adoperati dagli altri osservatori. Le ricerche e le scoperte del Professore Golgi si riferiscono a tutte le sezioni del sistema nervoso; qui non si potranno accennare che le principali. Per ciò che spetta ai *tronchi* nervosi, egli, modificando notevolmente le opinioni dominanti, dimostrò che nella guaina midollare sta un apparecchio costituito da fibrille spirali, il quale tanto serve a sostegno della mielina, quanto a fissazione ed a riparo del cilindro dell'asse. Riguardo agli *organi di terminazione* nervosa, il Golgi si applicò allo studio di quelli che risiedono nei tendini e scoperse nel punto di passaggio del tendine nel muscolo numerosi organi che, secondo ogni probabilità, sono la sede del senso muscolare e che hanno una struttura tutt'affatto caratteristica; sicchè ora nei trattati a lato dei corpuscoli di Meissner, di Kraub e di Pacini abbiamo anche i corpuscoli di Golgi. Ma il nome di Golgi, più ancora che a questi, si raccomanda ai suoi lavori sul *sistema nervoso centrale*. È in essi che i suoi nuovi metodi hanno posto in luce maggior numero di fatti nuovi, ed anche meglio illustrati fatti già conosciuti. Nella sua opera (corredata da 24 magnifiche tavole): *Studi sulla fina anatomia degli organi centrali del sistema nervoso*, egli si occupa da un punto di vista generale della morfologia delle diverse province di questo, dei rapporti esistenti fra i diversi elementi che costituiscono gli organi nervosi, e specialmente della relazione delle fibre nervose colle cellule onde derivano. Infine, non si può a meno di ricordare, come d'importanza più generale, quanto si riferisce alla diversa origine dei nervi di senso e di moto nel midollo spinale, tanto più che le particolarità qui scoperte autorizzano le deduzioni a cui il Golgi è giunto nello studio delle circonvoluzioni cerebrali, e specialmente delle zone che sono conosciute come sede principale degli atti psichici.

Delle quindici Memorie di *fisica sperimentale* scritte dal Prof. Augusto Righi nell'ultimo quadriennio, alcune trattano di elettrostatica, cioè della forma della scintilla, degli spostamenti di essa per effetto di un corpo elettrizzato, delle figure e delle ombre elettriche. In tutte queste Memorie e particolarmente nelle

due ultime, sono descritte molte esperienze nuove ed ingegnosissime. Il fenomeno che dicesi di Hall dal nome del suo scopritore è uno dei più importanti fra quelli recentemente scoperti. Il Righi se ne occupò a lungo sagacemente variando in più modi le esperienze affine di studiare le particolarità del fenomeno e stabilire quale sia la spiegazione più probabile di esso. Studiando per tal rispetto il modo di comportarsi del bismuto, il che non era stato fatto dapprima probabilmente per le grandi difficoltà sperimentali da superarsi, egli trovò che il detto fenomeno vi si presentava con una intensità straordinaria. Nel bismuto stesso l'autore riscontrò per primo una considerevole influenza del magnetismo sulla resistenza elettrica. Fra le Memorie presentate, due molto pregevoli versano su argomenti di ottica superiore e finalmente merita molta attenzione la lunga Memoria intitolata: *Ricerche teoriche e sperimentali sulla luce polarizzata riflessa dal polo di una calamita.* Le Memorie del Righi, benchè trattino di argomenti diversi, forniscono nel loro insieme un gran numero di fatti importanti per il progresso della fisica e con lo studio teorico efficacemente contribuiscono alla spiegazione di fenomeni recentemente scoperti.

Egregi Colleghi,

Nel deporre l'onorifico mandato che le affidaste, la Giunta ben sente che il lavoro da essa compiuto, malgrado la diligenza adoperatavi, non è scevro di difetti e di pecche. Ma voi, riflettendo alle difficoltà quasi insuperabili che si affacciano a chi deve istituire confronti di merito fra opere versanti su materie varie, anzi disparatissime, vorrete esserle larghi della vostra indulgenza.

Giuseppe Basso
Segretario Relatore.

Frattanto il Presidente annunzia che il 20 dicembre si terrà un'altra adunanza a Classi Unite, nella quale si verrà a votazione per l'aggiudicazione del premio.

Adunanza del 20 Dicembre 1885

Sono presenti i Soci: della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Genocchi, Presidente, Sobrero, Lessona, Salvadori, Cossa, Bruno, Berruti, Siacci, Basso, D'Ovidio, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso e Gibelli;

Della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, Fabretti, Vicepresidente, Gorresio, Peyron, Vallauri, Flechia, Promis, Rossi, Manno, Bollati, Schiaparelli, Pezzi, Ferrero, Carle e Nani.

Assiste all'adunanza il Socio nazionale non residente, Commendatore Francesco Brioschi.

Prende quindi la parola il Presidente per invitare i Soci presenti al compimento degli atti annunziati nell'ordine del giorno, che sono: 1° la votazione definitiva pel conferimento del IV premio Bressa pel quadriennio 1881-1884, a cui sono chiamati i soli italiani; — 2° la votazione per la composizione della 1ª Commissione e pel V premio Bressa, che abbraccia il quadriennio 1883-1886, a cui possono prendere parte gli scienziati di tutti i paesi.

In seguito a regolare votazione, vien conferito il IV premio Bressa al Prof. Pasquale VILLARI, dell'Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze, e Corrispondente dell'Accademia.

Ed a comporre la 1ª Commissione pel V premio Bressa sono eletti con regolare votazione, della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, i Soci Lessona, Cossa, D'Ovidio e Naccari; — della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, i Soci Gorresio, Pezzi, Ferrero e Carle.

L'Accademico Segretario
A. Sobrero.

SOMMARIO

Elenco degli Accademici . . . . . *Pag.* 3

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 15 Novembre 1885 . . . . . *Pag.* 33

Dorna — Breve notizia delle Osservazioni astronomiche e geodetiche eseguite nel 1885, all'Osservatorio della R. Università di Torino, nel Palazzo Madama, per iniziativa ed a spese della Commissione del Grado . . . . . » 36

Padova — Sul moto di rotazione di un corpo rigido . . . . . » 38

Lessona — Relazione sulla Memoria del Prof. B. Grassi, intitolata: *I progenitori degli insetti e dei miriapodi – Morfologia delle Scolopendrelle* . . . . . » 48

Spezia — Sulla flessibilità dell'Itacolumite . . . . . » 51

Golgi e Monti — Sulla storia naturale e sul significato clinico-patologico delle così dette Anguillule intestinali e stercorali . . » 55

Dorna — Lavori dell'Osservatorio astronomico di Torino . . . . . » 60

ADUNANZA del 29 Novembre 1885 . . . . . » 89

ADUNANZA del 13 Dicembre 1885 . . . . . » 91

Dorna — Sulla mira meridiana dell'Osservatorio di Torino a Cavoretto, e formola per dedurne la posizione dalla sua altezza e dalle costanti dello strumento dei passaggi . . . . . » 92

Segre — Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani . . . . . » 95

ADUNANZA del 27 Dicembre 1885 . . . . . » 116

Jadanza — Nuovo metodo per accorciare i cannocchiali terrestri . . » 118

Guareschi — Nuove ricerche sulla naftalina. . . . . » 133

Curioni — Relazione sulla Memoria del signor Ing. Prof. Camillo Guidi, intitolata: *Sulle curve delle pressioni negli archi e nelle volte* . . . . . » 146

Classi Unite.

ADUNANZA del 13 Dicembre 1885 . . . . . *Pag.* 151

Basso — Relazione pel IV premio Bressa . . . . . » *ivi*

ADUNANZA del 20 Dicembre 1885 . . . . . » 158

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXI, DISP. 2ª (*Gennaio* **1886**)

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Gennaio

1886

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE
ECONOMATO
TORINO

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Gennaio 1886.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANGELO GENOCCHI

Sono presenti i Soci: GENOCCHI, COSSA, LESSONA, SALVADORI, BRUNO, BERRUTI, CURIONI, SIACCI, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI e BASSO, il quale, in assenza dell'Accademico Segretario SOBRERO, ne fa le veci.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, il Presidente presenta, a nome del Principe B. BONCOMPAGNI, il fascicolo di marzo 1885 del *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche;* ed a nome del Socio straniero Carlo HERMITE presenta pure un libro col titolo: *Sur quelques applications des fonctions elliptiques.*

D'incarico del S. C. Principe Boncompagni il Socio SIACCI presenta un fascicolo intitolato: *Bibliotheca Mathematica*, compilato e pubblicato in Stoccolma dal Dott. Gustavo ENESTRÖM. L'Autore fa omaggio di questo esemplare all'Accademia.

Il Socio SIACCI aggiunge ancora le seguenti parole:

« La *Bibliotheca Mathematica* è una appendice agli *Acta Mathematica* del signor Mittag-Leffler, ed ha per iscopo la Bibliografia e la Storia delle Matematiche pure. Questo fascicolo

è il secondo della *Bibliotheca*; si riferisce al 1885 e fu pubblicato in quattro numeri, contenenti elenchi di opere, di memorie, di note, di resoconti ed analisi recentemente pubblicate, ed anche brevi notizie relative alla Storia e alla Bibliografia. Gli elenchi contenuti in questo fascicolo portano i titoli di più di 1800 recenti pubblicazioni. Gli articoli originali sono i seguenti:

ENESTRÖM, *Sur l'origine du symbole* x *employé comme signe d'une quantité inconnue.*

FAVARO, *Notice sur les manuscrits de Mathématiques de la collection Libri - Ashburnam.*

ENESTRÖM, *Notice sur les écrits mathématiques d'auteurs étrangers publiés en Suède ou traduits en suédois.*

— *Notice bibliographique sur un traité de perspective publié par Desargues en* 1636.

VALENTIN, *Vorlaufige Notiz über eine allgemeine mathematische Bibliographie.*

GÜNTHER, *Die Erfindung des « Baculus Geometricus ».*

DE MARCHI, *Di tre manoscritti del Maurolico che si trovano nella Biblioteca Vittorio Emanuele di Roma.*

ENESTRÖM, *Notice bibliographique sur un écrit de Condorcet, intitulé « Essais d'Analyse ».*

CANTOR, *Ludwig Scheeffer* (1859-1885). *Necrolog.*

« La *Bibliotheca Mathematica* contiene finalmente una rubrica di quesiti, *Questions*, che, per l'Europa, mi sembra nuova, e che meriterebbe, mi pare, di essere imitata da tutti i giornali che si occupano di ricerche scientifiche, specialmente matematiche. Quando nella mente di chi studia si sveglia un problema o un teorema, li accompagna immancabilmente anche il quesito: « Questo problema fu già risolto? questo teorema è già conosciuto? ». Se il quesito fosse rivolto a tutti i lettori di un giornale, non mancherebbe, spesso, una cortese risposta affermativa, la quale da una parte risparmierebbe ricerche, fatiche, pubblicazioni inutili, sorprese e disillusioni certo non piacevoli, e dall'altra sarebbe occasione di comunicazioni sia pubbliche sia private, profittevoli sempre alla Scienza ».

Lo stesso Socio SIACCI presenta anche per l'inserzione negli *Atti* una sua Memoria *Sulla rotazione di un corpo intorno ad un punto*, colla quale pubblica alcune proposizioni che trasformano in infiniti modi il notissimo teorema del POINSOT.

A nome del Socio DORNA il Socio NACCARI presenta, per l'ammessione agli *Atti*, i lavori seguenti del Dott. Angelo CHARRIER, Assistente al R. Osservatorio di Torino:

Rilievi di Osservazioni dei Registratori:

a) Barografo — gennaio, febbraio e marzo 1885;
b) Termografo — gennaio, febbraio e marzo 1885.

Il Socio SPEZIA, anche a nome dei Soci condelegati BERRUTI e BELLARDI, *relatore*, assente, così riferisce intorno ad una Memoria del signor Marchese DE GREGORIO:

Il signor Marchese DE GREGORIO nella Memoria che l'Accademia ha incaricato la sottoscritta Commissione di esaminare e che porta per titolo: *Fossili di M^te Erice di Sicilia del piano Alpiniano* DE GREG. (*Sott'orizzonte ad* Ammonites bifrons), premessa una breve Nota sulla giacitura del deposito da cui furono estratti i fossili illustrati, descrive di quella provenienza ventitre specie di Molluschi, delle quali undici sono, a parere dell'Autore, nuove per la scienza, tre sono varietà nuove di specie già note, e nove sono riferibili a specie già descritte da altri paleontologi.

Tutti questi fossili furono dall'Autore raccolti in un lembo di sottile strato calcareo-silicico, finora risparmiato dagli agenti atmosferici, dai quali per la sua posizione non tarderà ad essere interamente corroso. Questo strato, come dimostra la natura della fauna che vi fu trovata, appartiene al piano geologico, cui il De Gregorio stesso, in una Memoria precedente su Fossili coevi già accettata dall'Accademia, ha dato il nome di Piano Alpiniano.

La fauna di questo Piano geologico ovunque poco ricca, il numero delle forme nuove descritte relativamente ragguardevole e la conosciuta competenza dell'Autore nella materia, danno al presente scritto una notevole importanza: ond'è che la Commissione crede che la Memoria del sig. Marchese De Gregorio sia meritevole di essere ammessa alla lettura dall'Accademia, e proposta per la stampa nelle sue *Memorie*.

Il Socio LESSONA legge una sua commemorazione del celebre viaggiatore naturalista Edoardo RÜPPELL di Francoforte sul Meno, che apparteneva all'Accademia fino dal 1839 in qualità di Socio Corrispondente, e che morì nonagenario l'11 dicembre 1884.

Infine il Socio BRUNO dà lettura di un suo lavoro *Sopra un punto della teoria delle frazioni continue.*

LETTURE

SULLA

ROTAZIONE DI UN CORPO

INTORNO A UN PUNTO

del Socio Prof. F. Siacci

1. *Quando un corpo gira comunque intorno a un punto fisso, ed una superficie tracciata in esso si mantiene a contatto con un'altra superficie fissa:*

1° *Trasformando le due superficie mediante la sostituzione d'ogni raggio vettore con una funzione di esso (funzione che non dia lunghezze eguali per lunghezze disuguali della variabile, nè lunghezze disuguali per lunghezze eguali di essa), la nuova superficie mobile resterà costantemente a contatto colla nuova superficie fissa; e se tra le prime non vi era strisciamento, non vi sarà tra le seconde.*

2° *Trasformando le due superficie mediante la sostituzione di ogni normale abbassata dal punto fisso su ogni piano tangente con un raggio vettore la cui lunghezza sia il reciproco della normale, la nuova superficie mobile resterà costantemente a contatto colla nuova superficie fissa; e se tra le prime non vi era rotolamento, o strisciamento, tra le seconde non vi sarà strisciamento, o rotolamento.*

Queste proposizioni non credo siano state ancora enunciate. Esse sono intuitive, salvo forse, nella seconda trasformazione, lo scambio reciproco fra rotolamento e strisciamento. Per vedere questo scambio basta notare, che trasformando per raggi vettori reciproci la superficie podaria di una superficie data, i piani tangenti della nuova superficie sono perpendicolari ai raggi vettori della superficie data; onde messa in disparte la podaria, tra le

superficie che restano esiste questa notevole relazione: *che il raggio vettore e la normale di un punto dell'una sono rispettivamente paralleli alla normale e al raggio vettore del punto corrispondente dell'altra:* teorema probabilmente noto, e in ogni caso, si dimostra facilmente. Ora fra due superficie aventi un punto variabile di contatto, si dice che non v'ha strisciamento o non v'ha rotolamento, secondochè l'asse istantaneo coincide col raggio vettore o colla normale comune. Conviene inoltre notare, che le due superficie trasformate oltre al toccarsi si taglieranno in altri punti, se avranno più d'un piano tangente comune.

Applicate al notissimo teorema del Poinsot sulla rotazione spontanea dei corpi, queste proposizioni danno luogo ad infinite trasformazioni di esso, e conducono immediatamente ai bei teoremi del sig. Gebbia pubblicati recentemente nelle Memorie della Reale Accademia dei Lincei (*), teoremi che generalizzano due trasformazioni conosciute, una delle quali dovuta al Clebsch (**).

2. Sia s un raggio vettore di una delle superficie date, ed $s' = \varphi(s)$ (onde $s = \psi(s')$) il raggio vettore corrispondente della superficie trasformata secondo la prima proposizione. Siano u ed u' le proiezioni di s ed s' sopra una retta qualunque. Sarà

$$\frac{u}{s} = \frac{u'}{s'}, \qquad u = u'\frac{s}{s'} = u'\frac{s}{\varphi(s)} = u'\frac{\psi(s')}{s'}.$$

Ora se $s = \psi(s')$ è funzione, che non dia lunghezze eguali per lunghezze disuguali di s', e non dia lunghezze disuguali per lunghezze eguali di s'; considerando s' come funzione di s, s' avrà rispetto ad s le medesime proprietà, cioè le proprietà enunciate nella 1ª proposizione. La reciproca è evidente.

Posto ciò, le superficie mobili e le fisse si riferiscano rispettivamente a due sistemi d'assi ortogonali, l'uno $(O\xi\eta\zeta)$ mobile col corpo, l'altro $(Oxyz)$ fisso, coll'origine comune nel punto fisso. Siano

$$\varphi[\xi, \eta, \zeta] = 0 \quad \text{ed} \quad f[x, y, z] = 0$$

le due superficie date, che sono in continuo contatto.

(*) *Su due proprietà della rotazione spontanea dei corpi*, Memorie della Classe di Scienze Fisiche, ecc., serie 4ª, vol. I, pag. 326.

(**) Crelle, 1860, Band 57, pag. 75.

Indicando con ψ una funzione che goda le proprietà indicate, le nuove superficie

$$\varphi\left[\frac{\xi\psi(\rho)}{\rho}, \frac{\eta\psi(\rho)}{\rho}, \frac{\zeta\psi(\rho)}{\rho}\right]=0 \quad \text{ed} \quad f\left[\frac{x\psi(r)}{r}, \frac{y\psi(r)}{r}, \frac{z\psi(r)}{r}\right]=0$$

(ove $\rho^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$, $r^2=x^2+y^2+z^2$) resteranno in continuo contatto.

Nel teorema di Poinsot, la superficie mobile è l'ellissoide

$$A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2=Gh\,,$$

e la superficie fissa, su cui esso rotola, è il piano

$$z=h\ .$$

Ponendo

$$\psi(s)=\frac{s}{\sqrt{\frac{\lambda}{Gh}s^2+1}}$$

le due superficie si trasformano in

$$(1)\ldots\ldots \begin{cases} (A-\lambda)\xi^2+(B-\lambda)\eta^2+(C-\lambda)\zeta^2=Gh\,, \\ z^2(G-h\lambda)-h\lambda(x^2+y^2)=Gh^2\,. \end{cases}$$

Sono le omocicliche del sig. Gebbia, che rotolano sopra altre omocicliche.

Se invece si pone

$$\psi(s)=\frac{s}{s^2+\lambda}$$

le due superficie si trasformano in

$$A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2=Gh(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\lambda)^2,\quad z=h(x^2+y^2+z^2+\lambda).$$

È una superficie di quart'ordine che rotola sopra una sfera. Fatto $\lambda=0$, si ha una trasformazione enunciata senza dimostrazione nella Meccanica del Prof. Battaglini (*).

(*) Napoli 1873, pag. 352 del vol. II.

3. La trasformazione secondo la 2ª proposizione si ottiene ponendo:

$$\frac{\frac{d\varphi}{d\xi}}{\xi'}=\frac{\frac{d\varphi}{d\eta}}{\eta'}=\frac{\frac{d\varphi}{d\zeta}}{\zeta'}=\xi\frac{d\varphi}{d\xi}+\eta\frac{d\varphi}{d\eta}+\zeta\frac{d\varphi}{d\zeta}\,.$$

$$\frac{\frac{df}{dx}}{x'}=\frac{\frac{df}{dy}}{y'}=\frac{\frac{df}{dz}}{z'}=x\frac{df}{dx}+y\frac{df}{dy}+z\frac{df}{dz}\,,$$

risolvendo le sei equazioni rispetto a ξ, η, ζ, x, y, z, e mettendo le espressioni trovate in $\varphi=0$ ed $f=0$.

Applicando questa trasformazione all'equazione (1), si ha

$$\xi=\frac{Gh\xi'}{A-\lambda}\,,\qquad \eta=\frac{Gh\eta'}{B-\lambda}\,,\qquad \zeta=\frac{Gh\zeta'}{C-\lambda}$$

$$x=-\frac{Ghx'}{\lambda}\,,\quad y=-\frac{Ghy'}{\lambda}\,,\quad z=-\frac{Gh^2z'}{G-h\lambda}$$

e le superficie divengono

$$\frac{\xi'}{A-\lambda}+\frac{\eta'^2}{B-\lambda}+\frac{\zeta'^2}{C-\lambda}=\frac{1}{Gh}\,,\quad \frac{z'^2}{G-h\lambda}-\frac{y'^2+z'^2}{h\lambda}=\frac{1}{Gh^2}\,.$$

Queste sono le omofocali del sig. Gebbia che strisciano sopra altre omofocali.

Nel caso di $\lambda=0$, si ha $x'=y'=0$, $hz'=\pm 1$: *l'ellissoide reciproco dell'ellissoide centrale d'inerzia striscia su due punti fissi.* Questo è il teorema di Clebsch.

4. Le due proposizioni enunciate in principio potrebbero essere generalizzate in una, facendo corrispondere ad ogni punto P delle superficie date un nuovo punto P', la cui posizione dipendesse dalle posizioni e dai valori del raggio vettore e della normale di P. Non sarebbe difficile scrivere le relazioni fra le coordinate di P e di P', ma sarebbe forse difficile stabilire a priori le condizioni generali a cui le relazioni dovrebbero soddisfare, affinchè le nuove superficie riuscissero tangenti in un punto, come le prime.

Qui esamineremo un caso particolare. Supporremo messo al posto di ogni raggio vettore s delle superficie date un nuovo

raggio vettore s', che sia funzione di s e della perpendicolare q abbassata dal punto fisso sul piano tangente; porremo cioè:

$$s' = \psi(s, q).$$

Dicendo in particolare p e π le perpendicolari corrispondenti ai raggi vettori r e ρ delle superficie, sarà necessario che l'equazione

$$\psi(\rho, \pi) = \psi(r, p)$$

non possa essere verificata che per $\rho = r$ e $\pi = p$. Poichè se vi fossero sulle due superficie date punti in cui l'equazione si verificasse senza la coincidenza di ρ con r, e di π con p, quando questi punti venissero a trovarsi in linea retta col punto fisso i punti delle superficie trasformate coinciderebbero.

Ove, come nelle superficie di Poinsot, si abbia sempre $\rho < r$, se si pone per ψ una funzione tale, che risulti sempre

$$\psi(\rho, \pi) \gtreqless \rho, \qquad \psi(r, p) \gtreqless r,$$

oppure

$$\psi(\rho, \pi) \gtreqless \frac{1}{\rho}, \qquad \psi(r, p) \gtreqless \frac{1}{r}$$

l'equazione non si verificherà altrimenti che per $r = \rho$ e per $p = \pi$.

Ciò posto, riferendoci alle superficie di Poinsot, poniamo

$$s' = s \sqrt{\frac{(q^2 + h^2)^2 - \lambda^2 (q^2 - h^2)^2}{(q^2 + h^2)^2 + \lambda^2 (q^2 - h^2)^2}}$$

ove λ è una funzione qualunque di s e q. Siccome per tutti i punti del piano fisso si ha $q = h$, così pel piano si ha $s' = s$. Onde il piano non cambia. Per l'ellissoide invece si avrà sempre $s' < s$, salvo nei punti in cui $q = h$. Dunque tutte le superficie provenienti da questa trasformazione rotolano come l'ellissoide del Poinsot sopra uno stesso piano fisso. Posto $\lambda = 1$, la superficie mobile ha per equazione:

$$G^2 (A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2)^2 + h^2 (A^2 \xi^2 + B^2 \eta^2 + C^2 \zeta^2 - G^2)^2 = G^4 h^2.$$

EDOARDO RUEPPELL

BREVE COMMEMORAZIONE

del Socio Prof. Michele Lessona.

Le novità zoologiche dell'Africa, nelle varie classi dei vertebrati, che Edoardo Rüppell fece conoscere ai naturalisti, sono numerose, e parecchie bellissime. La bellezza e la importanza di talune delle specie scoperte dal Rüppell è tale che, appena egli le ebbe descritte e raffigurate, appena un qualche esemplare ne fu veduto in Europa, i varii Musei andarono a gara a volersene arricchire, e quelli che le hanno le tengono in conto di prezioso materiale e segnalato ornamento.

Il merito del Rüppell non fu solo di avere molto veduto, molto trovato, molto raccolto e molto viaggiato, e in paesi dove il viaggiare riesce di grande malagevolezza sia per la ragion del clima come per la natura degli uomini. Il suo merito, ben più grande, fu di aver conosciuto mirabilmente addentro l'argomento delle affinità e dei rapporti, di aver saputo tener conto, in giusta proporzione, dei caratteri e del vero posto spettante agli animali che veniva descrivendo, tanto frammezzo agli altri della medesima loro contrada, quanto nel complesso delle classi cui appartengono.

Questo merito spicca tanto più per ciò, che chi conosce la sua vita sa come egli, fatto primieramente un viaggio giovanile, da quello imparasse a conoscere tutto ciò che gli mancava e, ritornato subito in Europa, s'ingegnasse a riempire i suoi difetti e mettersi in grado di viaggiare degnamente. Tanto più

poi si riconosce degno di lode quest'uomo veramente insigne, quando si considera che a prepararsi a viaggiare degnamente egli non tenne in conto di sufficienti gli studi della storia naturale, ma volle pure mettersi in grado di dar opera nel miglior modo agli studi della geografia, proponendosi, siccome in vero ottimamente gli venne fatto, di far procedere di pari passo nei suoi viaggi le osservazioni intorno a tutte e due queste scienze.

Edoardo Rüppell nacque nell'agiatezza. Suo padre era commerciante, col commercio era riuscito a procacciarsi una cospicua ricchezza, che egli sperava che il figlio avrebbe a sua volta aumentata.

Il nascimento del Rüppell fu a Francoforte sul Meno il giorno 20 novembre 1794. Egli ebbe i nomi di Guglielmo, Pietro, Simone, Edoardo, e quest'ultimo, qualche volta anche col primo, fu fatto poi precedere al suo cognome quando incominciò ad essere conosciuto fra le genti.

La educazione di Edoardo Rüppell fu ampia e ben condotta, siccome già fin dal principio del secolo si soleva fare in Germania. La educazione commerciale, che era appunto quella che il padre del Rüppell intendeva dare al suo figliuolo, era intesa molto largamente, e molto largamente, sia per la potenza dell'ingegno come per la intensità del volere, egli seppe giovarsene. Se ne giovò nel miglior modo possibile in questo senso, che, quando l'ebbe compiuta, seppe comprendere tutto ciò che gli mancava.

Giovinetto in età di diciott'anni il Rüppell fece il suo primo viaggio in Egitto e risalì il Nilo fino alla prima cataratta. Allora sentì la sua vocazione, si deliberò a lasciare in disparte la carriera commerciale e a consacrarsi ai viaggi. Ma appunto quando ebbe presa fermamente una tale deliberazione, fece l'opposto di quanto avrebbe fatto un uomo volgare; invece di andar oltre ritornò in Europa, desideroso di farsi, per viaggi ulteriori, un buon fondamento di studi intorno alla Storia naturale e alla Geografia.

Si fu in Italia che egli diede opera al compimento di questo suo nobile disegno, principalmente a Genova ed a Pavia, e si fece nello stesso tempo allora padrone della nostra lingua, e si innamorò pure degli studi intorno alle cose antiche, ai quali ritornò poi, compiacendosene molto, nell'ultimo stadio della lunga sua vita.

Ritornò in Egitto nell'anno 1822 e rimase fuori fino al 1828, viaggiando nella Nubia, nel Cordofan e nell'Arabia Petrea. Quei suoi viaggi egli fece conoscere all'Europa con un volume pubblicato nell'anno 1829 a Francoforte sul Meno, ricco di illustrazioni e carte.

Nell'anno 1831 il Rüppell si recò per la terza volta in Egitto, fece di là una nuova gita al Sinaï, poi mosse dal Cairo per Massaua, e dall'anno 1832 all'anno 1833 compì un viaggio importante nell'Abissinia, da Massaua al lago Zana, passando per l'importante gruppo montuoso del Simen. La relazione di questo terzo viaggio in Africa è in due volumi, con un album di illustrazioni e una carta, e ne fu fatta la pubblicazione pure a Francoforte sul Meno, dal 1838 al 1840.

Il Rüppell rimarrà sempre nelle sue relazioni di viaggi ammirato come maestro, per la parsimonia delle avventure personali, la profusione dei particolari geografici e delle osservazioni accurate. Le pubblicazioni zoologiche del secondo e terzo viaggio, il grande atlante zoologico, le miscellanee ornitologiche, lo studio della fauna abissina, sono tanto universalmente noti quanto giustamente lodati. Le numerose determinazioni astronomiche di molti punti del corso medio del Nilo, del Cordofan e dell'Abissinia, le sue latitudini specialmente, formano sempre un importante sussidio della cartografia africana.

Così voglionsi tenere in pregio le sue osservazioni meteorologiche, i rilevamenti degli itenerari da lui percorsi, i suoi studi etnografici. Egli fu il primo a far conoscere quelle interessanti popolazioni dette Nuba, che occupano la parte montuosa del Sud del Cordofan.

Per quello che riguarda l'Abissinia, gli si deve pure dar lode dello aver egli raccolto e pubblicato materiali storici che al tempo suo segnavano un passo importante nello studio delle ricerche politiche di quella regione, chiamata giustamente la Svizzera dell'Africa.

Il Rüppell fu ancora in Egitto dopo il suo terzo viaggio, poco prima del 1850. Egli era partito da Francoforte collo intendimento di andare ancora una volta in Abissinia. Ma, da quel viaggiatore sperimentato e giudizioso che egli era, fatto un giusto calcolo delle sue forze, riconobbe che la impresa non era più in rapporto con queste e si rassegnò a malincuore, consolandosi con uno studio sempre più diligente dell'Egitto e segnatamente della ittiologia del Nilo.

Dopo non tralasciò dal fare ancora qualche giro per l'Europa, e tra il 1855 e il 1860 percorse di nuovo l'Italia e rivisitò Genova, trattenendovisi con molto compiacimento.

Egli proseguiva allora con invitto amore in quegli studi ai quali principalmente aveva dato opera tutta la vita, ma, come già sopra è stato accennato, ritornava pure a studi giovanili intorno alle antichità e insieme coi Musei di zoologia e di anatomia, cogli Orti botanici, cogli Istituti geografici e cogli Osservatorii astronomici, visitava a lungo le collezioni di medaglie e di monete.

Gagliardo di fisico, temperato nel vivere, operoso di intelletto, passò nella sua città nativa l'ultimo tratto della sua vita, arrivando fino ai 90 anni.

Edoardo Rüppell morì a Francoforte sul Meno addì 13 dicembre 1884, e la sua morte fu sentita con dolore in ogni parte del mondo dove si onorano il culto degli studi e il valor del sapere.

PUBBLICAZIONI DI EDOARDO RUEPPELL.

Archäologisches über Agypten und Arabien; in Schreiben an J. v. Hammer in dessen Fundgruben des Orients, 1817.

Observations astronomiques faites au Caire en 1822; in Zach. Corresp., VI, 1822.

Observations astronomiques faites près des pyramides de Ghize; ibidem, VI, 1822.

Observations astronomiques faites à Akaba; ibidem, VI, 1822.

Observations astronomiques faites à Medine, l'ancienne Arsinoe; ibidem, VII, 1822.

Relation de son voyage à Akaba; ibidem, VII, 1822.

Merkwürdige Entwickelung von Electricität in dem menschlichen Körper; in Meckel. Deutsches Archiv., VIII, 1823.

Ueber den Camsin als electrischen Wind; in Schweiger Journal, XXXVIII, 1823.

Observations astronomiques faites à Damiette en 1822; in Zach. Corresp., VIII, 1823.

Observations faites dans la Haute Egypte en 1822; ibidem, VIII, 1823.

Observations faites à Cosseir; ibidem, VIII, 1823.
Reduction des observations astronomiques faites en Egypte en 1822 *et reduites par M. Horner;* ibidem, VIII, 1823.
Observations astronomiques faites en Nubie; ibidem, IX, 1823.
Voyage en Nubie jusqu'à Méroé; ibidem, IX, 1823.
Observations en Afrique (Haute Egypte); ibidem, X, 1824.
Mineralogisch-geologische Beobachtungen; in Leonhard-Zeitschrift, 1825 (Band II) e 1826 (Band I).
Observations astronomiques faites dans le Kordofan; in Zach. Corresp., XIII, 1825.
Quelques notices sur le Kordofan; ibidem, XIII, 1825.
Ortsbestimmungen im Orient; in Astronom. Nachrichten, IV, 1826.
Ueber die Hörner der Giraffe; in Froriep-Notizen, Band 18, 1827.
Fische des Rothen Meeres; in Rüppell Atlas zu der Reise in nördl. Afrika, 1828.
Neue wirbellose Thiere des Rothen Meeres (Rüppell und F. S. Leuckart); ibidem, 1828.
Beschreibung und Abbildung mehrerer neuer Fische im Nil entdeckt 1829 *und* 1832.
Abbildung und Beschreibung einigen neuen oder wenig bekannten Versteinerungen aus der Kalkschieferformation von Solenhofen, 1829.
Reisen in Nubien, Kordofan und dem peträischen Arabien, 1829.
Beschreibung und Abbildung von 24 *Arten kurzschwänziger Krabben*, 1830.
Mémoire sur le Magilus antiquus; in Mem. de la Soc. d'Hist. Nat. de Strasbourg, 1830.
Ueber die Respirationsorgane der Sabellen; in Isis, 1830.
Revue critique des diverses espèces du genre Vultur; in Annales des Sciences naturelles, 1830.
Beschreibung des im Rothen Meere vorkomm. Dugong, 1834.
Skizze der geologischen Formation Abyssiniens; in Museum Senckenbergianum, I, 1834.
Neue Wirbelthiere zu der Fauna von Abyssinien gehörig, entdeckt und beschrieben, 1835-40.
Description d'un nouveau genre de Mollusques; in Trans. of the Zoological Society, London, 1835.
Histiophorus immaculatus n. sp.; in Proceedings of the Zool. Soc., 1835.

Bemerkungen über Abyssinien; in Bezug auf die Physionomik der Landschaft. Frankfurt, Phoenix, 1836.

Neuer Nachtrag von Beschreibungen und Abbildungen neuer Fische im Nil entdeckt; in Mus. Senckenbergianum, 1836.

Mittheilungen über einige zur Fauna von Europa gehörige Vögel; ibidem, 1836.

On the existence of canine teeth in an Antilope montana; in Proc. Zool. Soc., 1836.

On the fossil genera Pseudammonites and Ichthyosagonites of the Solenhofen limestone; in London and Edinbourg Phil. Mag., 1836.

Monographie der Gattung Otis: in Museum Senckenbergianum, Bd. II, 1837.

Kürzere Mittheilungen-Micropogon occipitalis-Pseudammonites und Aptychus-Ueber dentes canini bei Antilope pygarga. Mus. Senckenb., Bd. II, 1837.

Reise in Abyssinien, 1838-40.

Ornithologische Miscellen; in Mus. Senckenb., 1839.

Säugethiere aus der Ordnung der Nager beobachtet in nordlichen Afrika; ibidem, 1842.

Beschreibung mehrerer grösstenstheil, abyssinischer Vögel aus der Ordnung der Klettervögel; ibidem, 1842.

Beschreibung mehrerer neuer Säugethiere in der Sammlung der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft befindlich; ibidem, 1842.

Two new species of Chizaerhis; in Proc. Zool. Soc., 1842.

Verzeichniss der in dem Museum der Senck. naturf. Gesellsch. aufgestellten Sammlungen; I Abt. Säugethiere. Mus. Senck., Bd. III; 1842; III Abt., ibid., Bd. III, 1845; IV Abt., Fische, Frankfurt, 1852.

Beschreibung sechs neuer Cephalopoden aus dem Meere bei Messina; Gior. del Gabinetto scientifico di Messina, 1844.

Sui cambiamenti ragguardevoli nella forma del corpo, e delle pinne che si osservano in alcuni pesci di mare ne'diversi periodi della loro vita; in Atti Scienziati Italiani, 1844.

Oeffentliche Rede, gehalten an 22 Nov. 1842 bei Gelegenheit des 25 jahrigen Stiftungsfestes der Senck. Nat. Gesell.; Mus. Senck., Bd. III, 1845.

Systematische Uebersicht der Vögel Nord-Ost Afrika, 1845.

Beschreibung und Abbildung einer neuen Art von Landschildkröten; in Mus. Senckenb., 1845.

Mémoire sur la famille des Touracos; in Trans. Zool. Soc., 1849.

Genaüere Bezeichnung einiger Arten von Pisangfressern; in Arch. für Naturgeschichte, 1851.

Beiträge zur Natürgeschichte des Papiernautilus (Argonauta); in Senckenbergische naturforschende Gesellschaft, 1852. Arch. f. Naturgeschichte, 1852.

Reden gehalten bei der Jahresfeier der Gesellschaft Numismatica.

Beschreibung der Münzen und Medaillen, welche vegen geschichtlicher Begebenheiten für Frankfurt gefertig wurden u. s. w. Frankfurt, 1857.

Frankfurter Münzen im Anfange des 13 *Jahrhunderts.* Arch. f. Frank. Geschichte, 1858, VIII-H.

Berichtigung und Fortsetzung der erstgenannten Abhandlung; ibidem, Bd. IV, der neuen Folge.

Vierter Aufsatz über Frankfurter Medaillen u. s. w., ibid., Bd. IV.

SOPRA UN PUNTO

DELLA

TEORIA DELLE FRAZIONI CONTINUE

del Socio Prof. Giuseppe Bruno

Lagrange, nelle sue addizioni all'algebra d'Eulero, trattando delle frazioni continue, dopo di aver dato il modo di formare due serie, una di frazioni di valor crescente, tutte minori di una frazione data e convergenti verso di essa, l'altra di frazioni di valor decrescente, tutte maggiori della stessa frazione data e convergenti pure verso di essa, serie entrambe composte di frazioni *principali* e di frazioni *intermediarie* della frazione *continua*, in cui può svolgersi la frazione data, e dopo di avere dimostrato che ciascuna delle frazioni di una determinata di quelle due serie si accosta al valore della frazione data più di qualunque frazione espressa in termini più semplici, la quale differisca da essa frazione data nello stesso senso, in cui ne differiscono le frazioni della serie considerata, soggiunge:

« Au reste il peut arriver qu' une des fractions *intermédiaires* d'une série n'approche pas si près de la fraction donnée qu' une des fractions de l'autre série, quoique conçue en termes moins simples que celle-ci; c' est pourquoi, etc. ».

L'asserzione contenuta in queste parole del Lagrange è vera; ma essa si può rendere più determinata aggiungendo che, fra le frazioni dell' altra serie, non ve n' ha che una sola, la quale possa essere espressa in termini più semplici, ed essere, ad un tempo, più prossima alla frazione continua data della *intermediaria* considerata nella prima serie, e che quella sola frazione

è la *principale*, compresa fra le due *principali*, che nella prima serie sono più prossime, l'una da una parte l'altra dall'altra, alla detta intermediaria.

Anzi è vera la seguente proposizione più generale:

Una frazione *intermediaria* compresa fra le due frazioni *principali* d'ordine i ed $i+2$ di una frazione *continua* si accosta a questa frazione *continua* più di qualsivoglia frazione espressa in termini più semplici, ad eccezione solo, e solo in alcuni casi, della frazione *principale* d'ordine $i+1$.

Di questa proposizione io do la dimostrazione nella presente Nota.

Sia x_0 la frazione continua: a_i il suo i^{esimo} quoziente incompleto, x_i il suo i^{esimo} quoziente completo, $\frac{P_i}{Q_i}$ la sua i^{esima} frazione *principale*. Cosicchè sia:

$$P_0=1\ , \qquad Q_0=0\ ; \qquad P_1=a_0\ , \qquad Q_1=1\ ,$$

e, per ogni valore di i intero e positivo,

$$P_{i+2}=P_{i+1}\,a_{i+1}+P_i\ ; \qquad Q_{i+2}=Q_{i+1}\,a_{i+1}+Q_i\ ;$$

$$x_0=\frac{P_{i+1}\,x_{i+1}+P_i}{Q_{i+1}\,x_{i+1}+Q_i}\ .$$

Detto K un intero qualunque, positivo, non nullo e minore di a_{i+1}, e fatto

$$R=P_{i+1}\,K+P_i\ : \qquad S=Q_{i+1}\,K+Q_i\ ,$$

sarà $\frac{R}{S}$ un'*intermediaria* qualunque della frazione *continua* x_0 compresa fra le due frazioni principali $\frac{P_i}{Q_i}, \frac{P_{i+2}}{Q_{i+2}}$. E si tratta di dimostrare che se A e B sono due interi tali che la frazione $\frac{A}{B}$ sia più prossima ad x_0 della frazione $\frac{R}{S}$, e non sia $\frac{A}{B}=\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$, i numeri A e B sono rispettivamente maggiori di R ed S.

Come dicemmo, se $\frac{A}{B}$ si scosta da x_0 nello stesso senso, in cui se ne scosta $\frac{R}{S}$, la proposizione fu dimostrata da Lagrange nelle succitate sue addizioni all'algebra d'Eulero: anzi, ivi è anche dimostrato che, se il valore di $\frac{A}{B}$ è compreso fra quello di $\frac{R}{S}$ e quello di $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$, è ancora $A > R$ e $B > S$, cosicchè la proposizione è pure dimostrata nel caso in cui la $\frac{A}{B}$ differisce da x_0 in senso contrario a quello in cui ne differisce la $\frac{R}{S}$, purchè $\frac{A}{B}$ sia, più di $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$, prossima ad x_0.

Pertanto resta solo a provare la verità della proposizione nel caso, in cui il valore della $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$ sia compreso fra quello di x_0 e quello di $\frac{A}{B}$.

Per fare questa dimostrazione osservo che la quantità, che si scosta da x_0 di una quantità uguale e di segno contrario a quella, di cui si scosta la $\frac{R}{S}$ dalla stessa x_0, è $2x_0 - \frac{R}{S}$, e che perciò, la frazione $\frac{A}{B}$ differendo (in senso contrario) da x_0 meno di quanto ne differisca $\frac{R}{S}$, la frazione $\frac{A}{B}$ è compresa fra x_0 e $2x_0 - \frac{R}{S}$.

La differenza $\frac{A}{B} - \left(2x_0 - \frac{R}{S}\right)$ fra $\frac{A}{B}$ e $2x_0 - \frac{R}{S}$ sarà dunque positiva, o negativa, secondochè i è pari, od impari: cioè si avrà

$$(-1)^i \left[\frac{A}{B} - \left(2x_0 - \frac{R}{S}\right)\right] > 0 .$$

Ma si ha pure

$$(-1)^i \left(2x_0 - 2\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}\right) > 0 ,$$

epperciò, sommando, membro a membro, queste due ineguaglianze,

$$(-1)^i\left(\frac{A}{B}+\frac{R}{S}-2\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}\right)>0\ ,$$

ossia

$$(-1)^i\left(\frac{A}{B}-\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}\right)+\frac{1}{Q_{i+1}S}>0\ .$$

Il primo termine del primo membro di quest'ultima ineguaglianza, per le ipotesi fatte che $\frac{A}{B}$ non sia uguale a $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$, e che inoltre $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$ sia compreso fra x_0 ed $\frac{A}{B}$, è negativo e non nullo: e quindi, rappresentando con I un intero positivo, uguale o superiore all'unità, esso primo termine varrà $\frac{-I}{Q_{i+1}B}$.

L'ineguaglianza precedente può dunque scriversi così:

$$\frac{1}{Q_{i+1}S}-\frac{I}{Q_{i+1}B}>0\ ,$$

e trarsene quest'altra:

$$B>IS\ ,$$

ed, in conseguenza, anche

$$B>S\ ,$$

come si voleva dimostrare.

Operando, in modo analogo, sulle frazioni reciproche di x_0 e di $\frac{R}{S}$, si troverebbe similmente

$$A>R\ .$$

Fu, nell'enunciato della proposizione, fatta eccezione pel caso, in cui sia $\frac{A}{B}=\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$; ed invero la frazione $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$, sebbene abbia i suoi termini più semplici di quelli della frazione $\frac{R}{S}$, può approssimarsi, più di questa *intermediaria*, alla x_0, perchè, onde ciò avvenga, basta che si abbia

$$(-1)^i\left(\frac{R}{S}-x_0\right)>(-1)^i\left(x_0-\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}\right)\ ,$$

ossia

$$-1)^i\left(\frac{P_{i+1}K+P}{Q_{i+1}K+Q_i}-\frac{P_{i+1}x_{i+1}+P_i}{Q_{i+1}x_{i+1}+Q_i}\right)>(-1)^i\left(\frac{P_{i+1}x_{i+1}+P_i}{Q_{i+1}x_{i+1}+Q_i}-\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}\right),$$

od ancora

$$\frac{x_{i+1}-K}{Q_{i+1}K+Q_i}>\frac{1}{Q_{i+1}}\ :$$

ora quest'ultima ineguaglianza si può trasformare nella seguente

$$K<\frac{x_{i+1}}{2}-\frac{Q_i}{2\,Q_{i+1}}\ ,$$

alla quale esistono valori di K che soddisfano, sempre quando sia a_{i+1} uguale o superiore a 3, e talvolta anche quando sia $a_{i+1}=2$.

Adunanza del 24 Gennaio 1886.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ARIODANTE FABRETTI
VICEPRESIDENTE

Sono presenti i Soci: FABRETTI, COSSA, LESSONA, SALVADORI, BRUNO, SIACCI, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, MOSSO, SPEZIA e BASSO, che, in assenza del Socio SOBRERO, fa le veci di Segretario.

Il Socio SIACCI, per incarico del Presidente Prof. Angelo GENOCCHI ed a nome dell'autore, presenta in dono all'Accademia due Memorie del Socio straniero C. HERMITE, intitolate, l'una: *Remarques sur les formes quadratiques de determinant negatif*; e l'altra: *Sur une application de la théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.*

Il Socio COSSA presenta una Nota del Prof. Icilio GUARESCHI *Sulla γ dicloronaftalina e l'acido ortomonocloroftalico*: il quale lavoro è la continuazione di altri importanti studi dall' autore precedentemente eseguiti sullo stesso argomento.

Il Socio LESSONA presenta una sua Nota *Intorno al valore specifico della Rana agilis Thomas.*

Il Socio SPEZIA presenta un lavoro del Dott. F. VIRGILIO, Assistente al Museo di Geologia dell'Università di Torino, intitolato: *Di un antico lago glaciale presso Cogne in Valle d'Aosta.*

Per incarico del Socio DORNA il Socio NACCARI presenta per la pubblicazione negli *Atti:*

1° *Nozioni intorno all'equatoriale con refrattore Merz di trenta centimetri d'apertura e quattro metri e mezzo di distanza focale:* Nota dello stesso Socio DORNA, Direttore dell'Osservatorio.

2° *Osservazioni meteorologiche del mese di novembre* 1885 *eseguite nel R. Osservatorio di Torino.*

3° *Riassunti delle Osservazioni dei mesi di novembre e dicembre* 1885.

4° *Diagrammi delle Osservazioni meteorologiche del mese di dicembre* 1885.

Il Socio BIZZOZERO presenta una Nota del Prof. Piero GIACOSA, intitolata: *Un ricettario del secolo* XI *nell'Archivio capitolare d'Ivrea.* Questo lavoro viene affidato ad una Commissione perchè lo esamini e ne riferisca in una prossima adunanza.

LETTURE

SULLA

γ DICLORONAFTALINA

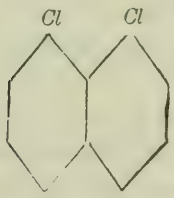
E

L'ACIDO ORTOMONOCLOROFTALICO (*).

Nota del Prof. Icilio Guareschi,
presentata dal Socio A. Cossa

Considerando i diversi modi di formazione della γ dicloronaftalina ne consegue che essa deve contenere i due atomi di cloro in due nuclei diversi ed assai probabilmente in posizione α. Potrà essere quindi:

I.



oppure

II.

Ed invero si forma: dalla α dinitronaftalina fusibile a 214-217° per l'azione del percloruro di fosforo (1); dalla α mononitronaftalina per l'azione del cloro (2); dall'acido cloronaftalinsolforico col percloruro di fosforo (3). Armstrong l'ottenne trattando con per-

(*) Una brevissima Nota su questo acido ho pubblicato nei *Berichte der deut. Chem. Gesell.*, 1886, t. XIX, pag. 134.

(1) Atterberg, *Berichte*, 1876, pag. 1187 e 1730.

(2) Ibid., pag. 316 e 726.

(3) *Bull. Soc. Chim.*, t. XXVI, pag. 540.

cloruro di fosforo il cloruro naftalinbisolforico $C^{10}H^6(SO^2Cl)^2$ fusibile a 183° (1).

Cléve (2) e poi Ekstrand (3) vanno più innanzi e credono assai probabile che la bicloronaftalina fusibile a 107° sia rappresentata dalla formola II, mentre la formola I spetterebbe alla bicloronaftalina fusibile a 83° ossia ζ dicloronaftalina.

Atterberg ossidando la γ bicloronaftalina con acido nitrico bollente osservò la formazione di un acido nitrocloroftalico, ma non potè ottenere un acido monocloroftalico, per cui rimase in dubbio sulla costituzione di questa bicloronaftalina (4).

Io invece ho ottenuto risultati decisivi impiegando, quale ossidante, l'acido cromico in soluzione acetica, come già adoperai per la bibromonaftalina fusibile a 82° e per le altre bicloronaftaline, come dirò in successivi lavori. Risultati questi importanti specialmente per la formazione del nuovo acido ortocloroftalico.

La γ bicloronaftalina adoperata fu preparata col metodo indicato da Atterberg (5), cioè si trattò ripetutamente la α binitronaftalina fusibile a 214-217° con percloruro di fosforo. Ricristallizzata varie volte all'alcool dimostrò costantemente il punto di fusione 107-107°,5. Atterberg trovò 107°. Aveva tutti i caratteri della γ dicloronaftalina pura.

Una parte di γ bicloronaftalina fu sciolta in 40 a 50 volte il suo peso di acido acetico glaciale e la soluzione mescolata con 3 a 3,5 parti di acido cromico sciolto in 15 a 20 volte il suo peso d'acido acetico glaciale. In generale impiegavo 1 gr. di bicloronaftalina in ogni operazione. Se si mette meno acido cromico resta della bicloronaftalina inalterata insieme ad un prodotto giallo che sembra un derivato chinonico. Si compie la reazione scaldando a bagnomaria sino a che il liquido sia di un bel verde smeraldo. Trattato il liquido con molt'acqua non si precipita quasi nulla, oppure un poco di bicloronaftalina inalterata. Il liquido verde filtrato, si evapora a bagnomaria, poi il residuo sciolto in acqua si evapora nuovamente sino a scacciare quasi tutto l'acido acetico libero; il che però non è necessario. Il residuo verde sciolto in acqua e filtrato, si alcalinizza con

(1) *Berichte*, 1882, pag. 205
(2) Ibid., 1876, IX, pag. 1735.
(3) Ibid., 1885, XVIII, pag. 2886.
(4) Ibid., 1877, pag. 547.
(5) Ibid., 1876, pag. 1188.

carbonato sodico e soda caustica, si fa bollire, si filtra per separare l'idrato cromico, poi si acidula con acido solforico e si estrae replicate volte con etere.

Il liquido acquoso contiene del cloro, che fu dosato. In due dosamenti ottenni:

I. Gr. 0,910 di bicloronaftalina, ossidata, fornirono 0,655 di cloruro d'argento.

II. Gr. 1,124 di bicloronaftalina fornirono 0,864 di $Ag\,Cl$, ossia 0,213 di cloro.

Da cui:

	I.	II.
Cl %	17,85	18,85.

Per la *metà* del cloro della bicloronaftalina si dovrebbe avere:

$$Cl = \quad 18{,}02.$$

Distillato l'etere ottenni un residuo cristallino, un poco colorato in rossastro che trattato con acqua si sciolse quasi tutto lasciando un piccolo residuo rosso fusibile verso 150°, del quale non mi sono occupato. La soluzione acquosa acida fu scolorata con carbone ed evaporata. Il nuovo acido cristallizza benissimo dall'acqua bollente nella quale è molto solubile, mentre è poco solubile a freddo.

Analizzato diede i risultati seguenti:

I. Gr. 0,2325 di sostanza disseccata a 100° diedero 0,1652 di $Ag\,Cl$.

II. Gr. 0,3248 di sostanza disseccata a 100° fornirono 0,5710 di CO^2 e 0,0750 di H^2O.

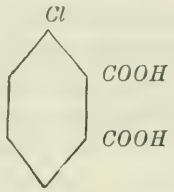
Da cui:

	I.	II.
C =	—	47,92
H =	—	2,56
Cl =	17,54	—

Per $C^6H^3Cl(COOH)^2$ si calcola:

$$C = 47{,}88$$
$$H = 2{,}44$$
$$Cl = 17{,}70.$$

Stante il suo modo di formazione ed il suo punto di fusione quest' acido deve essere senza dubbio l'acido α od ortomonocloroftalico:



L'acido ortomonocloroftalico cristallizza dall'acqua in lunghi aghi setacei, incolori; fonde a 184° in un liquido incoloro sviluppando bollicine e trasformandosi in anidride (1). Si scioglie facilmente nell'acqua bollente ed assai meno nell'acqua fredda.

Gr. 5,340 di soluzione acquosa satura a 14° lasciarono un residuo che disseccato a 100° pesava 0,1130, cioè: 100 p. d'acqua a 14° sciolgono 2,16 p. di acido, oppure 1 p. di acido si scioglie in 46 a 47 p. d'acqua a 14°. È più solubile dunque che non l'acido ftalico. Si scioglie bene nell'alcool e nell'etere.

Scaldato con fenolo ed acido solforico concentrato fornisce una ftaleina che si scioglie nella potassa con bellissima colorazione violetta.

La soluzione del sale ammonico non precipita col cloruro di bario, a freddo; precipita col nitrato d'argento. Scaldando però la soluzione si precipita il sale di bario cristallizzato.

Il *sale d'argento* $C^6H^3Cl(COOAg)^2$ si ottiene precipitando la soluzione ammoniacale dell'acido con nitrato d'argento.

Analizzato, diede il risultato seguente:

Gr. 0,4368 di sostanza secca a 100° fornirono gr. 0,3055 di $AgCl$ cioè 0,2290 di Ag.

Da cui:

$$Ag\ ^0/_0\ \ldots\ 52{,}42.$$

Per la formola $C^6H^3Cl(COOAg)^2$ si calcola:

$$Ag\ ^0/_0\ \ldots\ 52{,}13.$$

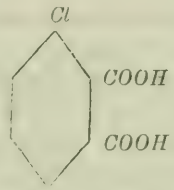
(1) I punti di fusione indicati in questo lavoro, pei corpi da me ottenuti, furono determinati con un buon termometro di Baudin.

È un precipitato microcristallino pochissimo solubile nell'acqua fredda, solubile nell'acqua bollente dalla quale cristallizza in piccoli aghi. È solubile nell'ammoniaca e nell'acido nitrico. Si altera difficilmente alla luce. Scaldato, fornisce un sublimato cristallino che si scioglie nell'acqua bollente con reazione acida e dalla quale cristallizza in aghi duri incolori.

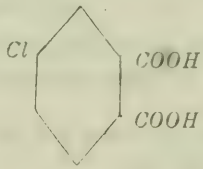
L'*anidride ortocloroftalica* sublima in aghi incolori che fondono a 124°,5 - 125°,5.

Non fu analizzata.

La formazione di un acido monocloroftalico dimostra in modo diretto che questa bicloronaftalina contiene i due atomi di cloro separatamente ne' due nuclei ed inoltre che quest'acido è l'acido monocloroftalico α; contiene cioè il cloro in posizione *orto* rispetto ai carbossili; è l'*acido ortocloroftalico*, non ancora bene conosciuto, cioè:



Un acido monocloroftalico fusibile a 148° e la cui anidride fonde a 95° fu ottenuto da Alén (1) ossidando la δ e la ε dicloronaftalina fusibile a 135° e poi da Claus e Dehne (2) anche dal cloro β naftol Quest'acido deve essere senza dubbio il β, cioè metacloroftalico:



essendo la ε dicloronaftalina stata preparata dall'acido $\beta\, C^{10}H^6 (SO^3H)^2$ col percloruro di fosforo.

Un acido cloroftalico la cui anidride fondeva a 89° fu ottenuto da Cléve (3) ossidando con acido nitrico la γ diclor-

(1) *Berichte*, XIV, pag. 2830, e *Bull. Soc. Chim.*, t. 36, pag. 453.
(2) *Berichte*, XV, pag. 319.
(3) *Bull. Soc. Chim.*, t. 29, pag. 499.

naftalina fusibile a 48°. Quest'acido però era impuro di acido nitroftalico e stante il punto di fusione della sua anidride deve essere identico a quello di Alén.

L'acido cloroftalico di Auerbach ottenuto clorurando l'acido ftalico (1) fonde a 149-150° e la sua anidride fonde a 140-143°, ed è considerato, anche nei trattati, come il secondo isomero. Dopo le mie ricerche riesce chiaro il comprendere che l'acido di Auerbach non deve essere un composto puro, ma una miscela dei due isomeri, quando non si voglia ammettere l'esistenza di più di *due* acidi monocloroftalici isomeri. Bisogna quindi che sia studiato più accuratamente l'acido di Auerbach.

A. Krüger (2) ottenne, ossidando gli acidi cloroortotoluici $C^6H^3Cl.CH^3\ COOH$, due acidi monocloroftalici, uno fusibile a 130-134° e l'anidride a 95°, l'altro fusibile a 179°-181° e l'anidride a 122°. Questo secondo è, assai probabilmente, identico col mio, cioè l'acido orto, ma per l'acido meta trova il punto di fusione 130-134°, mentre tutti i precedenti esperimentatori hanno trovato 148°; anche A. Rée (3) trovò per l'acido β il punto di fusione 148° e l'anidride a 96° ed egli l'ottenne con un metodo diverso, partendo dall'acido β solfoftalico. La questione dell'acido β sarebbe dunque ancora indecisa.

Ora ho ripreso lo studio della bibromonaftalina fusibile a 130-131° ed ho ottenuto, per ossidazione con acido cromico, nelle identiche condizioni della γ diclornaftalina, un *acido monobromoftalico* fusibile a 176-178° e la cui anidride fonde a 133-134°. Quest'acido è senza dubbio identico con quello già da me ottenuto ossidando la bromonitronaftalina fusibile a 122°,5; allora trovai per quest'acido il punto di fusione 174-176° e per l'anidride 132°. Questo acido deve essere l'acido α e resta così confermato il mio dubbio che l'acido monobromoftalico di Faust e Pechmann non fosse l'acido orto, ma bensì il meta (4). Sull'acido α bromoftalico darò tra poco maggiori notizie. Intanto mi piace di far osservare che in seguito all'aver io scoperto i due acidi α monocloro ed α monobromoftalico resta ben definita la costituzione dei derivati monosostituiti dell'acido ftalico.

---

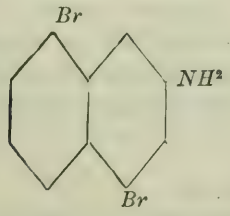
(1) Fittica's, *Jahresb. f. Chem.*, 1880, pag. 862.
(2) *Berichte d. deut. Chem. Gesell.*, 1885, pag. 1759.
(3) Ibid., 1885, pag. 3359.
(4) Mia Memoria del 1883, pag. 24.

Eccone la tabella:

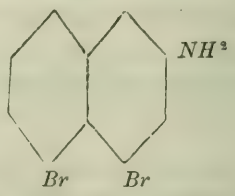
	Punto di fusione.	Autori.
Acido ortocloroftalico	184°	Guareschi
Anidride	124-125° 5	Id.
Acido metacloroftalico	148° (1)	Alén
Anidride	95°	Id.
Acido ortobromoftalico	176-178°	Guareschi
Anidride	133-134°	Id.
Acido metabromoftalico	138-140° (?)	Faust e Pechmann
Anidride	60-65°	Id.
Acido ortonitroftalico	212°	Laurent
Anidride	?	
Acido metanitroftalico	161°	Miller
Anidride	114°	Id.

Benchè io abbia de' dubbi sulla purezza dell'acido bromoftalico di Pechmann (l'anidride avendo un intervallo di punto di fusione troppo notevole per corpi di questa natura) pure si scorge da questa tabella una certa relazione tra i derivati orto e meta, tra gli acidi e le corrispondenti anidridi, il che non era possibile osservare coi dati imperfetti od erronei che si avevano prima di queste mie ricerche.

Resta forse da ottenersi ancora l'acido β bromoftalico allo stato di vera purezza. Ad ogni modo non vi ha più dubbio, l'acido fusibile a 176-178° è l'acido α ossia orto e bisogna quindi correggere le formole dei derivati della naftalina che furono dedotte considerando, come si è fatto sino ad ora da tutti, l'acido bromoftalico di Faust e Pechmann come l'acido α, mentre invece l'acido di Faust e Pechmann deve essere il β od una miscela dei due. Ad esempio la bibromoamidonaftalina fusibile a 105° di R. Meldola (*Journ. of the Chem. Soc.*, 1885, pag. 511) deve essere:

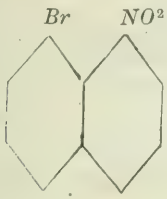


oppure

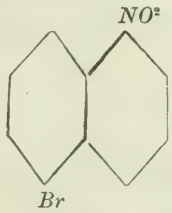


(1) A 130-134° secondo Krüger. Stante però la differenza dei punti di fusione tra l'acido e l'anidride, sembra più probabile il punto di fusione 148°.

La mia bromonitronaftalina fusibile a 122°,5 deve quindi contenere l'atomo di bromo in posizione α e quindi:



oppure



Così dicasi della bromoamidonaftalina che ne deriva.

Ora mi riserbo lo studio comparativo degli acidi bromoftalici e specialmente dell'acido α bromoftalico ottenuto da me partendo dalla nitrobromonaftalina fusibile a 122°,5 (1), dalla amidobromonaftalina fusibile a 63-64° (2) e dalla γ dibromonaftalina (e dalla α monobromonaftalina se riuscirò ad ottenerlo), coll'acido bromoftalico ottenuto poi da R. Meldola (acido e anidride che hanno il medesimo punto di fusione del mio acido e della mia anidride) e quello che si forma dal tetrabromoβnaftolo.

Era importante conoscere bene questi acidi per stabilire la costituzione di molti derivati α e β della naftalina.

Torino, R. Università, gennaio 1886.

---

(1) Mia Memoria, loc. cit., pag. 22.
(2) Loc. cit., pag. 27.

NOTA INTORNO AL VALORE SPECIFICO

DELLA

RANA AGILIS THOMAS

del Socio Prof. MICHELE LESSONA.

Lo studio delle Rane rosse di Europa venne fatto in questi ultimi anni con molta diligenza da parecchi naturalisti, fra i quali vogliono principalmente essere menzionati il Fatio, il Leydig, il Boulanger, il Camerano.

Questi autori, mercè ricerche accuratissime e minuziose fatte sopra un materiale copioso e proveniente da luoghi diversi, vennero nella conclusione che la specie antica linneana di Rana rossa, la *Rana temporaria* LIN. si deve scindere in parecchie specie, che sono le seguenti: 1° *Rana fusca* ROESEL (*muta* LAUR.) (*Rana temporaria* part. LIN. e alt.). 2° *Rana arvalis* NILS. 3° *Rana sylvatica* LECOMTE. 4° *Rana iberica* BOUL. 5° *Rana latastei* BOUL. (1). 6° *Rana japonica* BOUL. 7° *Rana agilis* TH. 8° *Rana pensylvanica* KARL. 9° *Rana macrocnemis* BOUL. (2).

In un suo recentissimo lavoro (3) il signor De Betta nega tutte queste divisioni, cercando di dimostrare che una sola sia la Rana rossa, e questa appunto la *Rana temporaria* di Linneo.

Egli tratta principalmente delle specie italiane, *Rana muta* LAUR., *Rana agilis* THOMAS, *Rana latastii* BOUL.

(1) O più grammaticalmente *Rana Latastii*.

(2) *Proceedings of Zool. Soc.*, 1885, tav. III.

(3) *Sulle diverse forme della Rana temporaria in Europa e più particolarmente nell'Italia.* Atti dell'Istituto veneto, Scienze, Lett., sez. VI, vol. IV, 1885.

Quella minutezza di analisi che condusse gli autori sopra menzionati alle divisioni specifiche fatte, non fu in tutto di guida al signor De Betta in questo suo lavoro, nel quale i caratteri più importanti su cui si fondano le divisioni specifiche non vennero tenuti nel conto voluto.

Il carattere invocato dal sig. De Betta della presenza o della mancanza dei sacchi vocali interni nei maschi non venne da lui esattamente osservato. Questo carattere, colla sua mancanza nella *Rana agilis*, e nella *Rana latastii*, come hanno giustamente osservato il Boulanger, il Leydig, e il Camerano, segna una separazione sicura fra la *Rana muta* LAUR. e le altre due.

Quando io faceva un lavoro sugli Anfibi anuri del Piemonte (1), ebbi campo ad esaminare molti individui di *Rana muta* LAUR., e di *Rana agilis* THOMAS in tutti gli abiti e provenienti da molte località. Molti altri individui ho esaminato dal 1877 ad oggi. Nel laboratorio del Museo zoologico di Torino, per ricerche anatomiche e zoologiche, vennero esaminati moltissimi altri individui di queste due specie, e non si venne mai a capo di riconoscere quella grande variabilità dei caratteri della *Rana agilis* di cui parla il sig De Betta nel suo lavoro. Questa specie è sempre stata facilmente e sicuramente determinabile coi caratteri che le assegnano gli autori. Per la qual cosa io non posso a meno di confermare la distinzione specifica della *Rana agilis* dalla *Rana muta*, distinzione che io aveva già ritenuta giusta nel lavoro sopra menzionato sugli Anfibi anuri del Piemonte.

Il sig. De Betta lamenta in me il difetto di troppa minuziosità nella esposizione dei caratteri. Invero, di questo difetto non mi so pentire, nè correggere. Parmi che oggi nei lavori della sistematica, e sovratutto negli studi di faune locali, non si richieda soltanto l'esposizione concisa dei caratteri principali di una specie in una buona diagnosi; parmi che l'indirizzo moderno della sistematica richieda pure l'esame minuto e la minuta esposizione dei caratteri sopra un grande numero di esemplari. Parmi che solo per tal modo si possa realmente progredire nella conoscenza delle variazioni delle forme.

La *Rana latastii* è pure, secondo il mio parere, caratterizzata in modo sufficiente, perchè possa prendere posto come specie

(1) *Studi sugli Anfibi anuri del Piemonte.* Atti della R. Accademia dei Lincei. Mem., sez. III, vol. 1°, 1877.

equipollente alla *Rana muta* e alla *Rana agilis*, e anche per essa devo dire che non ho osservato la grande variabilità di caratteri di cui parla il sig. De Betta.

In Piemonte la *Rana muta* è comunissima nelle regioni alpine, mentre la *Rana agilis* è comunissima nelle pianure.

È meno nota in Piemonte la distribuzione della *Rana latastii*, la quale tuttavia vi si trova, secondo ciò che ha fatto conoscere recentemente il sig. Peracca (1).

Concludo ripetendo una cosa ben nota, cioè che se per un verso il moltiplicare soverchiamente il numero delle specie ingenera confusione, per un altro verso nuoce il riunire insieme forme diverse, ingenerando confusione non minore.

---

(1) Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XX, pag. 827, 1885.

Limiti degli antichi ghiacciai
Limiti degli attuali ghiacciai
Cascate di ghiaccio
Morene
Scala di 1 a 200.000
Antico lago glaciale di Selvanera
Scala di 1 a 100000
Sezione della Sezione da 0 h 4b a 6 30 5
Piano di Selvanera
M. 1800 sul mare
Scala di 1 a 23 000
Scala chilometrica di 1 a 50.000
Antico ghiacciaio della Valle di Cogne
Grand Eyvia
Cogne
Champlong
Gollie
Chateretto
Valnontey
Bertolonneu
Bertolonneu
Bertolonneu

DI UN

ANTICO LAGO GLACIALE

PRESSO COGNE

IN VALLE D'AOSTA

Memoria del Dott. F. Virgilio,
presentata dal Socio G. Spezia

A venti minuti circa di salita da Cogne, ameno villaggio posto a metri 1534 sul livello marino in incantevole bacino ai piedi del massiccio alpino del Gran Paradiso, ed in direzione sud-est, incontrasi il così detto *Piano di Selvanera*. Esso è infatti un tratto di terreno pianeggiante diretto da nord-ovest a sud-est, di larghezza variabile fra 200 e 300 metri, di 3 chilometri circa di lunghezza, e leggiermente inclinato verso un secondo bacino, a monte di Cogne, nel quale giace il villaggio di Lilaz (m. 1607), allo sbocco dei valloni di Valeille e di Urtier; l'inclinazione è quindi in senso opposto a quella del tratto di valle compreso fra Cogne e Lilaz. La sua massima elevazione sul mare, corrispondente all'estremità a valle, è di metri 1679: esso presenta perciò un dislivello relativamente a Cogne di metri 145 e relativamente a Lilaz di metri 72, e conseguentemente una pendenza media di 2,4 %. Tale inclinazione però è quasi nulla nella metà circa a valle, mentre risulta bene accentuata nell'altra metà.

Tutto quel tratto di terreno è formato da un enorme accumulo di materiale morenico antico, adagiato lungo la base terminale del contrafforte divisorio dei valloni di Valnontey e di Valeille; morenico, che in origine doveva essere più ampio ed occupare tutto il tratto di valle compreso fra Cogne e Lilaz, inquantochè altri accumuli morenici, identici per natura lito-

logica, esistono ad eguale elevazione sull'altro versante della valle fra Champlong e Moline. Ma in seguito all'azione erodente del torrente Grand'Eyvia, le acque si scavarono un profondo alveo rasente il versante destro della valle, intaccando non solo tutto il morenico, ma in parte anche la roccia sottostante. Il Piano di Selvanera perciò termina a nord-est, nel tratto cioè corrispondente al versante fra Champlong e Moline, con ripido ed accidentato pendìo, sotto forma di immane rovina: è un accatastamento caotico di sabbia, di fango glaciale e di massi rocciosi di varia natura litologica e di grossezza variabile, fra cui alcuni di qualche centinaio di metri cubi. Nello stesso modo, ma in grado minore, presentasi pur foggiata l'estremità rivolta verso Cogne, la cui conformazione però è dovuta, oltre all'erosione torrenziale avvenuta posteriormente nel piano di Cogne, in parte anche alla speciale disposizione che assumono in genere i materiali costituenti cordoni morenici laterali e frontali.

In seguito a minuto esame tanto della località in discorso quanto dei varî valloni, che ad essa terminano, per ciò che riguarda le numerose ed evidenti traccie lasciatevi dagli antichi ghiacciai, non che in seguito all'esame litologico dello speciale ammasso morenico di Selvanera e di quelli ad esso concomitanti, credo poter stabilire, che il Piano di Selvanera dovette un tempo costituire fondo di un lago, il quale ebbe la sua origine al periodo glaciale e specialmente durante la fase di ritiro degli antichi ghiacciai.

Per esporre quindi gli argomenti adatti a spiegare il suaccennato fenomeno sarà mestieri di rimontare a detto periodo geologico e di accennare per sommi capi ai fatti che in quel tempo e posteriormente avvennero in quel tratto della Valle di Cogne.

Verso la seconda metà dell'êra cenozoica, come è noto, le nevi, accumulandosi dapprima sulle più alte sommità sotto forma di vasti nevati, e poscia scendendo lentamente nelle regioni inferiori, si trasformarono in ghiacciai, i quali colmarono le valli, e spinsero le loro colossali fronti terminali fino nelle adiacenti pianure.

Fra le più potenti di tali fiumane glaciali ammantanti il versante meridionale delle Alpi eravi certamente quella, che occupava la gran Valle d'Aosta. Dagli ampî bacini glaciali formati dai numerosi contrafforti, che irraggiano dai quattro eccelsi

massicci montuosi del Gran Paradiso, del Monte Bianco, del Gran Combin e del Monte Rosa, enormi accumuli di masse glaciali convergevano per le numerose valli laterali nella valle principale, e formavano quella imponente corrente di ghiaccio, che spinse la sua bifida scarpa terminale nella pianura del Po, dando origine al classico anfiteatro glaciale d'Ivrea. Il ghiacciaio di Valle d'Aosta misurava perciò non meno di 120 chilometri in lunghezza, 3 chilometri in media larghezza e 800 metri in potenza media.

Il ghiacciaio, formato in alto della valle dalla unione delle masse glaciali discendenti dalle valli di Ferret, di Veni, della Thuille, di Grisanche, di Rhêmes e di Savara, in corrispondenza di Aymaville riceveva la gran fiumana di ghiaccio della Valle di Cogne.

Il ghiacciaio della Valle di Cogne a sua volta risultava formato dal complesso delle correnti glaciali provenienti dai circhi e valloni di Valnontey, di Valeille, di Bardoney, di Urtier e di Grauson, oltre alle minori correnti laterali dei valloni di Nomenon, del Trajo, del Pousset e di Vermiana a sinistra, di Arpisson a destra e di Acquarossa in fondo del Vallone di Urtier. Esso misurava complessivamente in lunghezza circa 30 chilometri.

Della antica corrente glaciale del Gran Nomenon oggidì non rimane che il ghiacciaio della Grivola rivestente la parete nord di questa svelta piramide. Il ghiacciaio del Gran Nomenon misurava non meno di metri 5000 in lunghezza e metri 3000 in massima larghezza.

Il ghiacciaio del Trajo (N° I.), che attualmente occupa solo l'alto del vallone omonimo e spinge la sua fronte terminale fino a metri 2500 circa sul mare, originatosi nel circo glaciale limitato dalla Cresta del Pousset (m. 3200), dalla Punta Rossa (m. 3652), dalla Punta Nera (m. 3692), dalla Punta Bianca (m. 3801) e dalla Grivola (3969), al periodo glaciale doveva misurare approssimativamente metri 5000 in lunghezza e metri 1500 in massima larghezza.

Delle minori correnti glaciali dei valloni del Pousset e di Vermiana non rimane oggidì traccia alcuna di ghiaccio.

Il ghiacciaio discendente dal Vallone di Valnontey (N° II.), che può dirsi del Gran Paradiso, punto culminante dell'intiero massiccio, doveva essere certamente il più grandioso di tutti gli

altri della Valle di Cogne, tenendo conto della maggiore ampiezza del corrispondente circo glaciale, non che del numero ed ampiezza degli attuali ghiacciai ivi esistenti. Esso doveva misurare non meno di metri 12500 in lunghezza e metri 7000 in massima larghezza. In questo vallone contansi attualmente nove ghiacciai, dei quali alcuni veramente ampî e fra i più grandi di tutto il gruppo montuoso, oltre ad alcuni ghiacciai minori sotto forma di semplici nevati. A cominciare dall'ovest hanvi i ghiacciai del Lauzon, di Gran Valle, dell'Herbetet, di Montandejne orientale o di Dzasset, della Tribolazione, di Grancrou, di Money, di Patri e della Valletta. Il solo ghiacciaio della Tribolazione, compreso fra la Becca di Montandejne (m. 3350), il Gran Paradiso (m. 4061), la Punta di Ceresole (m. 3762) e la Testa della Tribolazione (m. 3642), ha una lunghezza di metri 3500 ed una larghezza di metri 2500, e spinge la sua fronte terminale fino a metri 2200 circa sul livello del mare (1).

Questa gran corrente glaciale, che allo sbocco del vallone nel bacino di Cogne presentava uno spessore di 800 metri circa, dopo aver ricevuto le correnti di Valeille, di Bardoney, d'Urtier e di Grauson riunite si spingeva in curva a nord e nord-ovest contro lo sperone roccioso, sul quale sorgono i casolari di Gimilian, rivestendolo fino a grande elevazione.

L'antico ghiacciaio di Valeille (N° III.), della lunghezza di metri 8500 e della larghezza massima di metri 4000 circa,

---

(1) I tre maggiori ghiacciai del massiccio del Gran Paradiso, compresi appunto nel Vallone di Valnontey, quelli cioè della Tribolazione, di Grancrou e di Money, hanno subìto in questi ultimi venti anni una marcatissima diminuzione. Nel 1865 le loro estremità riunivansi in una fronte terminale unica; ma dopo il 1875 esse si erano ritirate e disgiunte. Tale periodo di ritiro continua tuttora per il solo ghiacciaio di Money, mentre per gli altri due si è già iniziato dal 1881 circa il periodo di avanzamento, per cui questi sono di nuovo uniti per le loro fronti terminali.

La ragione di questa differenza nelle variazioni periodiche di tre ghiacciai vicinissimi fra di loro, per cui uno trovasi in ritardo circa l'iniziarsi del suo periodo di avanzamento, periodo già cominciato negli altri due, sta, a parer mio, nella conformazione ed orientazione dei rispettivi bacini di raccoglimento delle masse di ghiaccio. Infatti i bacini glaciali della Tribolazione e di Grancrou sono ampî, pochissimo accidentati e rivolti a nord, mentre quello di Money è molto accidentato, interrotto da speroni rocciosi e rivolto ad ovest. In conseguenza di ciò deve risultare una maggiore ablazione per quest'ultimo ghiacciaio.

originatosi nel circo compreso fra il Pic Patri (m. 3583), il Grand Saint-Pierre (m. 3692), il Picco d'Ondezzana (m. 3482), la Punta delle Sengie (m. 3408) e la Grand'Arolla (m. 3226), allo sbocco del vallone nella comba di Lilaz si univa alla corrente complessa proveniente dai valloni di Bardoney, di Acquarossa e di Urtier. Di questo ghiacciaio rimangono attualmente confinati in alto del vallone i ghiacciai di Valeille, delle Sengie e dell'Arolla.

Dal relativamente limitato circo del Vallone di Bardoney, nel quale hanvi ancora i tre piccoli ghiacciai di Bardoney, della Lavina e di Acquarossa, discendeva pure una corrente glaciale (N° IV.) avente metri 5000 di lunghezza e metri 2000 di larghezza massima.

Un piccolissimo nevato in alto del Vallone di Acquarossa è il residuo del rispettivo antico ghiacciaio, che misurava una lunghezza di metri 3500 ed una larghezza massima di metri 1500 circa.

Pur meschini sono gli avanzi dell'antica corrente glaciale di Urtier (N° V.), quali i nevati della Nouva e delle Roccie della Balma. Quella corrente aveva una lunghezza di circa metri 5000 ed una massima larghezza di metri 4000.

E non ampî certamente sono i ghiacciai di Tessonet, della Pène Blanche e di Garin, residui dell'antico ghiacciaio di Grauson (N° VI.), il quale misurava approssimativamente metri 10500 in lunghezza e metri 2000 in massima larghezza.

Dell'antico ghiacciaio d'Arpisson infine, della lunghezza di metri 5000 e della larghezza massima di metri 2500 circa, non rimane che un piccolissimo nevato in alto del vallone, al piede meridionale della Punta di Garin.

Tutti quei ghiacciai, riuniti in una corrente sola, davano, nel periodo di loro massimo sviluppo, un forte contingente di masse glaciali al ghiacciaio principale. A cagione però del restringersi della valle in corrispondenza del Colle del Drinc, il ghiacciaio di Cogne, aumentando in potenza, in parte scavalcava il versante destro della valle e raggiungeva il ghiacciaio primario per il Colle del Drinc, Pierre, Champcheneille e Turlin (1).

(1) M. Baretti, *Studi geologici sul gruppo del Gran Paradiso*, Memorie della R. Acc. dei Lincei, serie 3ª, vol. I, 1877.

Numerose sono le traccie lasciate da quegli antichi ghiacciai. Ovunque ed a grande elevazione osservansi ampie superficie di roccie arrotondate, levigate e striate: allo sbocco della valle, al Pont d'Aël, a Vieyes, a Silvenoire, a Nomenon, a Sisoret, al Ponte di Laval, a Trajo, a Cretaz, al Pousset, a Vermiana, al Lauzon, al Money, a Champlong, a Lilaz, alla Teppa Lunga, nel Vallone d'Acquarossa, in quello d'Urtier, alla Susse, a Grauson, a Gimilian, ecc. In altre località incontransi marcate terrazze glaciali: bellissima quella, su cui stanno i *chalets* di Tavirone (m. 2300) nel Vallone d'Urtier superiormente a Gollie. Numerosi infine e più o meno sviluppati sono gli accumuli morenici abbandonati, dei quali è mestieri far cenno.

A cominciare dallo sbocco della Valle di Cogne nella valle principale trovasi il potentissimo rivestimento morenico di Aymaville, il quale, spingendosi in alto fino a Turlin (m. 1450) ed Ozein (m. 1361) e continuandosi a monte verso Villeneuve ed a valle verso Jovençan, venne costruito in parte dal ghiacciaio primario e da quello di Cogne riuniti ed in parte da quest'ultimo soltanto sia durante il massimo sviluppo (Turlin, Ozein), sia durante il periodo di regresso (Aymaville). Continuandosi il periodo di ritiro avvenne il distacco del ghiacciaio di Cogne dal primario; per la qual cosa il primo costruiva la bella morena frontale di Pont d'Aël (m. 837) in un temporaneo arresto della sua fronte terminale, e posteriormente abbandonava la morena di Vieyes (m. 1132). In seguito la corrente glaciale discendente dal Vallone del Gran Nomenon, separatasi, formava la morena di Plan Plessey (m. 1361), mentre il ghiacciaio maggiore costruiva successivamente le morene di Silvenoire (m. 1319), di Senagy (m. 1278), di Plan Bois (m. 1585) e di Sisoret (m. 1750). Accumuli morenici incontransi pure nel Vallone del Trajo, formati in parte dal ghiacciaio principale ed in parte da quello del Trajo soltanto: quali le morene di Géofré (m. 1600), delle Grangette (m. 1700), di Chinaz (m. 1800) e di Pianesse (m. 1700). Nello stesso modo il ghiacciaio principale abbandonava un accumulo morenico sull'altro versante della valle in alto del Vallone di Tza-Sèche a metri 1900 circa.

Il ghiacciaio principale, dopo aver abbandonato nei proprî valloni prima la corrente glaciale del Trajo e poscia quella di Arpisson, si ritirò colla sua fronte terminale fino al punto in cui sorge attualmente il villaggio di Epinel (m. 1452). E qui

comincia il maggiore accumulo morenico, il quale si estende a monte fino allo sbocco del Vallone di Grauson, si continua colla morena del versante destro di questo vallone fino all'alpe Pila (m. 2017), punto in cui il vallone stesso piega ad est, e raggiunge una elevazione di oltre 2000 metri sul livello marino, formando il piano a lieve pendìo in alto dei casolari di Gimilian e di Terrabouc. Sul versante sinistro della valle principale invece scarsi lembi morenici incontransi a Recougier (m. 1700), alle Fontane (m. 1600), agli Ors (m. 1800), al Ronc (m. 1600), al Rubat (m. 1700), ecc.

L'enorme accumulo morenico Epinel-Gimilian, che certamente fu originato durante il periodo di ritiro del ghiacciaio, prova la grandiosità di quella fiumana di ghiaccio e dimostra ad un tempo il fatto, per cui la diminuzione in lunghezza e conseguentemente in larghezza e potenza del ghiacciaio nella sua parte terminale si operò in quel tratto della valle con assai maggiore lentezza che non in altri, quasichè le correnti glaciali ancora unite di Valnontey, di Valeille, di Bardoney, di Urtier e di Grauson opponessero una certa resistenza alla incessante forza del ritiro, che le voleva presto o tardi separate e confinate nei rispettivi valloni. Il fatto poi del massimo accumulo morenico operatosi sul tratto di versante destro Epinel-Gimilian, prospiciente allo sbocco del Vallone di Valnontey, e della sua maggiore elevazione sul *thalweg* relativamente agli scarsi lembi morenici, precedentemente accennati, del corrispondente tratto del versante sinistro della valle, dimostra chiaramente, come le maggiori masse di ghiaccio, provenienti dal Vallone di Valnontey in direzione da sud-ovest a nord-est, raggiunto il piano di Cogne, venivano ad accumularsi contro lo sperone roccioso di Gimilian, il quale le obbligava, unitamente alla spinta delle altre masse glaciali provenienti dall'alto della valle, a mutare direzione verso nord-ovest; per cui in quella località dovevano verificarsi una maggiore elevazione della superficie del ghiacciaio per aumento del suo spessore, un marcato rallentamento nel movimento di discesa delle sue masse glaciali ed una maggiore facilità quindi nell'accumularsi colà i materiali morenici trasportati sul suo dorso.

Ma perdurando le cause del ritiro avvenne anche la separazione di quelle correnti glaciali fino allora riunite. In conseguenza di ciò il ghiacciaio di Grauson, isolatosi e ritirandosi, lasciava a destra la morena che si estende senza interruzione da Terra-

bouc e Monro a Pila, ed a sinistra quella di Moline; e contemporaneamente il ghiacciaio ancora complesso Valeille-Bardoney-Urtier, pur ritirandosi, abbandonava gli accumuli morenici di Moncuc e di Selvanera-Moline-Champlong.

Mentre però compivasi tale indietreggiamento nelle fronti terminali delle accennate correnti glaciali di Grauson e di Valeille-Bardoney-Urtier, il ghiacciaio proveniente dal Vallone di Valnontey, siccome formato dalle ingenti masse di ghiaccio discendenti dal più ampio circo glaciale di tutta la Valle di Cogne, doveva opporre maggiore resistenza al ritiro generale, per cui continuò ad occupare per un certo tempo ancora colla sua parte terminale tutto il bacino di Cogne.

Un fatto analogo si può osservare oggidì nel ghiacciaio di Miage sul versante sud-ovest del Monte Bianco. Infatti questo ghiacciaio, separato da tempo remotissimo dai ghiacciai dell'Allée Blanche e d'Estellette, continua tuttora non solo ad occupare tutto il Vallone di Miage, ma si protende ancora colla sua parte terminale per un buon tratto nella Val Veni, piegandosi ad angolo retto. E l'esempio, a parer mio, può reggere, giacchè si verifica anche una certa analogia sia nei relativi sviluppi che nelle rispettive disposizioni dei valloni di Miage, dell'Allée Blanche, d'Estellette e dell'alta Val Veni da una parte e di quelli di Valnontey, di Valeille, di Bardoney e di Urtier dall'altra. Sta per dippiù in favore del Vallone di Valnontey, e quindi del suo antico ghiacciaio, la condizione della sua orientazione, inquantochè, essendo questo vallone aperto a nord-nord-est, l'ablazione, che cooperava a fare indietreggiare la fronte terminale del suo antico ghiacciaio, doveva certo essere di una intensità relativamente minore di quella, che nelle condizioni normali deve verificarsi dell'ablazione sul ghiacciaio di Miage, di cui il vallone trovasi invece aperto a sud-est.

In tal modo barricato lo sbocco della valle nel bacino di Cogne, le acque di fusione dei ghiacciai di Grauson, di Valeille, di Bardoney e di Urtier in ritiro incontrarono un ostacolo al libero loro fluire tanto nelle masse glaciali ancora occupanti il piano di Cogne, quanto nel materiale morenico costituito in parte dalla morena laterale destra e dalla morena frontale del ghiacciaio di Valnontey ed in parte dalla morena frontale del ghiacciaio complesso Valeille-Bardoney-Urtier.

Ciò risulta dalla varia predominanza di alcune specie di roccie in quegli accumuli morenici. Infatti, sull'estremità prospiciente a Cogne del Piano di Selvanera sono frequenti massi erratici di gneiss antico granitoide porfiroide, caratteristico del nucleo centrale del massiccio del Gran Paradiso, mentre subito a monte tali massi gneissici diventano rari e si fanno invece preponderanti massi di gneiss recenti, di ovardite, di serpentina, di micaschisti, con alcuni di calcare e di anfibolite granatifera. Tale varietà in quegli elementi rocciosi erratici trova la sua spiegazione nel fatto, per cui nel Vallone di Valnontey è più sviluppato il gneiss antico, il quale, salvo in quello di Valeille, nella sua parte alta, manca negli altri valloni, che sono invece incisi in roccie cristalline meno antiche, quali gneiss recenti, serpentine, dioriti, micaschisti, calcari, ecc.; l'anfibolite granatifera incontrasi solo in fondo del Vallone di Urtier, intercalata a serpentina schistosa, a costituire la Punta Nera.

Per siffatta barriera quelle ingenti masse acquee, accumulandosi, cominciarono a formare un lago, il quale estendevasi sempre più a monte di mano in mano che il ghiacciaio Valeille-Urtier si ritirava colla sua fronte terminale. L'accumulo delle acque fu anche facilitato dalla stessa morena profonda, abbandonata dal ghiacciaio, per la sua impermeabilità. Il tratto di valle quindi compreso fra Cogne e Lilaz, dapprima occupato dalle masse glaciali, colla scomparsa di queste si convertì in lago, ed in un vero lago per sbarramento glaciale.

Lo stesso fenomeno avvenne nel Piano di Combal alla base del Monte Bianco ed a monte dello sbocco del Vallone di Miage nella Val Veni. Quel tratto di valle, dapprima occupato dai ghiacciai dell'Allée Blanche e d'Estellette, che si univano al ghiacciaio di Miage, si convertì in lago in seguito al distacco e ritiro dei primi ghiacciai, mentre quello di Miage continuò, come continua tuttora ad invadere per un certo tratto la Val Veni, formando così barriera, pur colla sua morena laterale destra, al libero fluire delle acque di fusione scendenti da monte, le quali furono perciò obbligate ad aprirsi un passaggio tra il versante destro della valle e la base della morena. L'area però occupata dalle acque del lago diminuisce continuamente per colmata progressiva da monte a valle della preesistente depressione, dovuta ai materiali detritici trasportati dalle acque stesse che alimentano il lago. Per la qual cosa il suolo presentasi con una

inclinazione nello stesso senso della valle non solo nella parte già emersa, ma anche in quella costituente ancora fondo del lago; e la diminuzione costante del lago si compie da monte a valle per il fatto stesso del riempimento (1).

La progressiva diminuzione del lago di Selvanera avvenne invece in altro modo.

Il ghiacciaio di Valnontey, dopo aver dimorato per un certo tempo colla sua parte terminale nella comba di Cogne e dato origine al lago di Selvanera, cominciò esso pure a subire la sorte degli altri ghiacciai, vale a dire cominciò a ritirarsi lasciando sull'area dapprima occupata abbondante materiale morenico. Venne quindi a mancare in gran parte la barriera che aveva formato il lago di Selvanera, per cui le acque, non più tanto impedite a fluire in basso della valle, si aprirono gradatamente un più ampio passaggio attraverso il materiale morenico abbandonato dal ghiacciaio di Valnontey. A ciò concorsero grandemente le acque provenienti dal Vallone di Grauson, le quali, colla erosione, riuscirono a farsi strada, unitamente alle ingenti masse acquee del lago, immediatamente allo sbocco del vallone, cioè all'estremità nord-ovest del lago stesso, per cui questo si vuotò in massima parte. Per la speciale configurazione però del suo fondo esso rimase limitato alla sua parte a valle, la quale, non ricevendo più sufficiente alimentazione, cominciò pur essa lentamente a diminuire, fino a scomparire del tutto, per semplice fatto di prosciugamento dovuto all'evaporazione delle sue acque.

Dall'istante poi, in cui avvenne lo sbrecciamento del morenico attraverso il piano di Cogne, le grandi masse acquee, colla loro potente forza erosiva, cominciarono a demolire e trasportare i materiali morenici abbandonati nella comba di Lilaz, e ad intaccare con vigoria il morenico di Selvanera, formandosi un alveo sempre più profondo rasente il versante destro della valle e corrispondente alla sbrecciatura avvenuta allo sbocco del Vallone di Grauson. L'accentuarsi della erosione sul limite destro dell'accumulo morenico di Selvanera avvenne per il fatto, che, sboccando il Vallone di Valeille normalmente alla direzione del Vallone di Urtier, le ingenti masse acquee da esso discendenti non potevano piegare subitamente a sinistra per l'incontro delle

(1) M. Baretti, *Il Ghiacciaio del Miage*, Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, serie II, t. XXXII, 1880.

stesse masse moreniche; esse furono quindi obbligate a cangiare direzione a grado a grado, descrivendo un'ampia curva colla convessità rivolta a nord-est nel piano di Lilaz. Nè questa curva potè essere ostacolata dalle acque provenienti dal Vallone di Urtier, inquantochè un cordone morenico abbandonato a sud-est di Lilaz e prospiciente allo sbocco del Vallone di Urtier nella comba di Lilaz, costrinse quelle acque a rasentare il versante destro della valle.

Di tal modo l'accumulo morenico di Selvanera rimase nella sua parte a valle con superficie regolare a lievissima inclinazione verso monte ed a tratti quasi orizzontali, e nell'altra parte invece con superficie accidentata ed a più forte inclinazione nello stesso senso fino a continuarsi col piano di Lilaz.

Una consimile inclinazione fu osservata negli anfiteatri morenici di Rivoli e d'Ivrea dal Gastaldi (1), il quale, partendo dal principio, che la estremità terminale di un ghiacciaio tende generalmente a rialzarsi quando essa non poggia su di un suolo molto inclinato, conchiuse col dire, che quella specie di piano inclinato che parte dal piede del versante interno di un cordone morenico frontale e si protende verso l'imboccatura della valle, è prodotto dall'azione erodente della massa di ghiaccio, che, avanzandosi, tende ad elevarsi verso la morena frontale. Io credo però che la spiegazione di siffatta inclinazione a monte debba ricercarsi piuttosto nel ritiro stesso della fronte terminale del ghiacciaio.

Infatti, dalle numerose ed accurate osservazioni che il *Gletscher-Collegium*, nominato dal Club Alpino Svizzero, sta compiendo senza interruzione dal 1874 sul ghiacciaio del Rodano, il quale dal 1856 è in continuo ritiro, si è potuto constatare, che le variazioni in lunghezza dei ghiacciai sono dovute al fattore della velocità di discesa delle masse glaciali e non al fattore, molto variabile, dell'ablazione; vale a dire, si è potuto conchiudere, che quando un ghiacciaio nella sua regione terminale scorre veloce ed ha grande portata, esso si allunga; quando invece il ghiacciaio ha poca portata e scorre lentamente, esso discende meno basso nella valle, si raccorcia (2). Inoltre dalle misure fatte sulla

(1) B. Gastaldi, *Sulla riescavazione dei bacini lacustri per opera degli antichi ghiacciai*, Memorie della Società Italiana di scienze naturali, t. I, n. 3, Milano, 1865.

(2) F.-A. Forel, *Les travaux du Club Alpin Suisse au Glacier du Rhone*. L'Echo des Alpes, n. 1, 1883, Genève.

fronte terminale del ghiacciaio stesso del Rodano dal 1874 al 1880 risulta una notevolissima diminuzione annuale nella sua velocità di discesa (1). Ammesso quindi il principio, che nel periodo di raccorciamento di un ghiacciaio la sua velocità di discesa è in continua diminuzione, si comprende facilmente come i materiali morenici trasportati sul dorso del ghiacciaio fino alla sua fronte terminale e da questa abbandonati sul suolo, debbano accumularsi in ragione appunto del ritiro del ghiacciaio, e quindi in ragione della velocità di discesa delle stesse masse glaciali. Se questa velocità è tale da non superare il valore dell'ablazione, la fronte del ghiacciaio potrà rimanere stazionaria, ed allora il morenico verrà ad accumularsi in maniera da formare un vero cordone frontale, una vera collina: ma se poscia, per decrescente velocità di discesa del ghiacciaio, la sua fronte viene ad indietreggiare, il nuovo materiale morenico, sempre più lentamente trasportato, sarà dal ghiacciaio scaglionato su di una superficie di suolo sempre più estendentesi a monte di mano in mano, che procederà il ritiro della fronte del ghiacciaio, e si distribuirà quindi in modo da costituire una specie di piano inclinato dalla morena frontale preformata fin verso l'estremità del ghiacciaio; inclinazione che sarà tanto più accentuata quanto più rapido si compirà il ritiro del ghiacciaio.

Rimasto il bacino di Cogne pur sgombro del ghiacciaio di Valnontey, il quale sempre più ritiravasi nel rispettivo vallone, le considerevoli acque di fusione da esso provenienti colla loro potente forza erosiva demolirono ed asportarono in gran parte le masse moreniche abbandonate dal ghiacciaio nel bacino. Incontrando però esse sulla destra maggiore resistenza per maggiore accumulo morenico, e formando, in seguito della diminuita lor mole, cono di deiezione allo sbocco del vallone, cominciarono gradatamente a piegare a sinistra di mano in mano che accentuavasi detto cono di deiezione, e finirono col riunirsi in un corpo solo confinato contro il versante sinistro della valle, sul lato ovest cioè del bacino, per raggiungere la Grand' Eyvia verso Cretaz, 1500 metri circa a valle di Cogne.

Durante il ritiro del ghiacciaio di Valnontey venivano abbandonati due cordoni morenici concentrici e paralleli all'estremità

(1) F.-A. Forel, *Essai sur les variations périodiques des glaciers*, Archives d. Scien. phys. et nat. de Genève, t. VI, 1881.

ovest del piano di Selvanera, nonchè quello di Buttier, e successivamente le morene di Reppiaz, di Bova e di Babein.

Similmente il ghiacciaio di Valeille, ritirandosi dal bacino di Lilaz, abbandonava un cordone morenico a destra e la morena di Chelerette a sinistra.

Il ghiacciaio di Urtier infine, lasciando ampiamente arrotondate e levigate le roccie costituenti la forra, per la quale quel vallone sbocca a Lilaz, abbandonava presso l'imboccatura del Vallone di Bardoney la morena frontale di Cret.

Da tutto quello che ho precedentemente esposto si possono dedurre le seguenti brevi conclusioni:

I. L'attuale *Piano di Selvanera* presso Cogne, formato da antico materiale morenico, fu un tempo fondo di lago;

II. Il lago di Selvanera fu originato durante la fase di regresso del periodo glaciale dall'antico ghiacciaio di Valnontey, il quale, rimasto solo ad occupare colla sua parte terminale per un certo tempo il bacino di Cogne, formò barriera insieme colle sue morene laterale destra e frontale al libero fluire delle acque di fusione dei ghiacciai in ritiro di Grauson, di Urtier, di Acquarossa, di Bardoney e di Valeille.

Il lago di Selvanera fu quindi un lago per sbarramento glaciale.

III. In seguito del ritiro del ghiacciaio di Valnontey avvenne lo sbrecciamento del morenico abbandonato nel bacino di Cogne verso lo sbocco del Vallone di Grauson per opera specialmente delle acque di questo vallone; per cui il lago si vuotò in massima parte. La porzione di esso rimasta a valle scomparve lentamente per evaporazione delle sue acque.

IV. L'inclinazione infine verso monte del Piano di Selvanera fu prodotta dal ritiro della fronte terminale del ghiacciaio nell'atto stesso che con decrescente velocità di discesa delle sue masse glaciali abbandonava il materiale morenico.

NOZIONI

INTORNO

ALL'EQUATORIALE

CON REFRATTORE MERZ

di 30 centimetri d'apertura e metri 4 $^1/_2$ di distanza focale

del Socio ALESSANDRO DORNA

In base ad un contratto da me stipulato in principio del 1883 col Comm. Breda, Presidente della Società Veneta, proprietaria dell'officina Osservatorio Astronomico di Padova, questa nel 1883-84 costruì l'equatoriale, lo espose alla Mostra Nazionale del 1884, nel primo quadrimestre del 1885 vi lavorò qui attorno, all'Osservatorio, per ultimarlo e collocarlo, ed il 25 aprile ottenne l'approvazione dell'Astronomo Comm. Pietro Tacchini scelto, nel contratto, come arbitro, e venuto appositamente a collaudarlo.

In seguito, dopo avere fatte delle prove col costruttore Cavignato, capo meccanico dell'officina, e provato da solo, scrissi le seguenti nozioni, che possono servire di istruzione per adoperare lo strumento.

I.

Movimenti dal piede dello strumento.

I moti in ascensione retta e declinazione dal piede dello strumento si ottengono coi tre congegni *A*, *B*, *C* che seguono:

CONGEGNO *A*.

È il *disco indicatore*. Si compone di un cerchio di ottone concentrico ad una corona-manubrio girevole a mano. Sulla periferia interna della corona vi sono quattro marche che chiamo *a*, *b*, *c*, *d*.

La marca a non ha indicazione,
» » b è segnata FA (freno per l'AR),
» » c » » MD (moto in declinaz.),
» » d » » FD (freno per la declinaz.).

Alla periferia del disco havvi una marca-indice unica che chiamo α.

Congegno B.

È il *manubrio di scambio*. Sta sotto ad A ed agisce quale cursore, parallelamente all'asse polare dello strumento, tenuto da una molla che preme contro un cilindretto munito di tre gole circolari parallelo all'asse polare medesimo. Si fa scorrere B a mano.

Congegno C.

È il *grande manubrio volante*. Sta sotto B e si fa girare a mano.

Avvertenza 1ª.

Girando la corona A si fa scorrere la ruota d'ingranaggio che agisce sulle armille con cui si producono e si impediscono i due moti in AR e declinaz. (Vedi la descrizione dello strumento, pubblicata a Padova nel 1884, dall'officina che lo ha costruito).

Ponendo a su α la ora menzionata ruota mobile è fuori del contatto colle altre ruote, alla sua massima distanza dal cannocchiale. In tal posizione può darsi a questo una rivoluzione intera attorno all'asse di declinazione per entrambi i versi, ma solamente a mano, dopo aver aperto il freno FD. (Si possono fare questi moti rapidamente anche con due funicelle attaccate alle estremità del tubo del cannocchiale).

Avvertenza 2ª.

Il congegno B serve a far scorrere parallelamente all'asse polare una ruota la quale ingrana, a volontà dell'operatore, su una o l'altra di due ruote che sono portate da un asse parallelo al polare e mobile colla parte interna di A. Con quella di queste due ruote che è più in alto si prepara il moto in AR, e coll'altra più vicina all'operatore si prepara il moto in declinazione e si dispongono i freni per entrambi i movimenti.

Avvertenza 3ª.

Tutti i moti e l'apertura e la chiusura dei freni si producono girando il manubrio *C*. Si chiudono i freni girando *C* ad EST e si aprono girandolo ad OVEST; la rotazione necessaria per queste due operazioni è indicata dall'impedimento che si finisce con incontrare girando.

Quando il freno per l'*AR* o per la DECL. è aperto, si ottiene il moto rispettivo girando continuamente *C* pel verso conveniente finchè siasi ottenuta la posizione che si vuol dare al cannocchiale (salvo i piccoli moti finali occorrenti che bisognerà dare dopo essere passati all'oculare).

L'obbiettivo può dirigersi con *C* al *Nadir* solamente girando il cannocchiale dalla parte del *Nord*; girandolo dalla parte del *Sud* lo si può solamente abbassare di alcuni gradi sotto l'orizzonte del centro di rotazione.

Avvertenza 4ª.

La manovra dei manubrii si fa nell'ordine *A*, *B*, *C*, ripetendola intercalatamente quando occorra su qualcuno di questi congegni, come infra:

Movimento in ascensione retta.

Si fa colle cinque operazioni seguenti:

1° Si porta *b* su α,
2° Si tira in basso *B* (finchè si può),
3° Si apre il freno *FA* girando *C* ad Ovest,
4° Si spinge *B* in su (finchè si può),
5° Si manovra il cannocchiale in *AR* a piacimento girando *C*.

Movimento in declinazione.

Si fa colle sette operazioni che seguono:

1° Si porta *b* su α,
2° Si tira giù *B* (finchè si può),
3° Si chiude il freno *FA* girando *C* ad Est,
4° Si porta *d* su α,

5° Si apre il freno FD girando C ad Ovest,

6° Si porta c su α,

7° Si muove il cannocchiale in declinazione a piacimento girando C.

Avvertenza 5ª.

Accesa la lampada all'estremità dell'asse di declinazione, e letto il circolo che è in vista nell'asse polare in cui si fanno le letture alla sua estremità inferiore col cannocchiale lettore prismatico apposito, si gira questo di 90° con un manico di cui è fornito e si fa la lettura dell'altro circolo. Havvi una sola lettura per circolo. Quale di essi sia è mostrato dalla loro numerazione differente; avendo l'orario le ore e minuti di tempo e l'altro i gradi.

Avvertenza 6ª.

Prima di passare all'oculare si fa coincidere a con α.

II.

Movimenti stando all'oculare.

I moti in ascensione retta ed in declinazione dall'oculare si ottengono con quattro manubrii.

1° I due più lontani dal cannocchiale sono per l'ascensione retta. Il manico di uno di essi termina con faccette piane ed è quello del freno che si apre per i grandi movimenti a mano e si chiude per i piccoli moti che si dànno coll'altro manubrio il cui manico è rotondo.

2° I due manubrii più vicini al cannocchiale sono per la declinazione. Come i precedenti uno ha il manico con faccette piane ed è per frenare e sfrenare, l'altro ha il manico rotondo ed è per i piccoli movimenti.

Avvertenza 1ª.

La manovra dei freni dall'oculare è molto più spedita che dal piede, ed aperti si possono dare i grandi movimenti spin-

gendo a mano il cannocchiale, e chiusi gli si dànno i piccoli moti coi due manubrii rotondi (*).

Avvertenza 2ª.

All'oculare havvi una cordicella senza fine per muovere di 90° in 90° un prisma che permette di leggere i due nonii opposti di ciascun circolo graduato, col cannocchiale prismatico apposito, parallelo all'asse del tubo del cannocchiale presso al cannocchiale cercatore. Bisogna procedere come segue:

1° Prima di tirare la cordicella si fa la lettura del circolo che è nel campo del cannocchiale prismatico suddetto.

2° Si tira la cordicella per un verso finchè si senta uno spostamento del prisma, poi si tira pel verso opposto finchè si senta un altro spostamento. Dopo questi moti opposti, che riuniti chiamo *una manovra della cordicella senza fine*, si legge di nuovo e la lettura è sull'altro circolo.

3° Si fa una seconda manovra della cordicella senza fine per leggere il nonio non ancora letto del primo circolo.

4° Si fa una terza manovra della cordicella senza fine per leggere l'altro nonio non ancora letto del secondo circolo.

Avvertenza 3ª.

Per illuminare il campo serve la stessa lampada con cui si leggono i circoli. La luce passa per una finestrina che si può aprire o chiudere, tutta od in parte, a piacimento, con una testa di vite collocata all'estremità del tubo del cannocchiale dalla parte dell'oculare.

(*) Un inconveniente passato inosservato è questo di cui ebbi una prova nella sera del 3 maggio; che non in tutte le posizioni si può muovere il cannocchiale dall'oculare coi manubrii perchè non abbastanza forti per resistere ad una torsione, essendo in parte formati con tubi di lastra d'ottone troppo sottile. Col cannocchiale ad Est rivolto alla Polare dovetti per muoverlo in angolo orario ricorrere al manubrio volante.

Avvertenza 4ª.

Si può facilmente accendere la lampada così: si aprono i freni dall'oculare, si pone il cannocchiale parallelo all'asse polare coll'obbiettivo al Nord, e messa b su α, e spinto in su B, si gira con C finchè il cannocchiale sia sul piano inclinato del basamento e per conseguenza la lampada in basso più che si può; in tal posizione, con due soli gradini di salita, è facile levare la lampada, accenderla e rimetterla al suo posto.

Posizione di riposo dell'equatoriale.

La posizione più conveniente dello strumento quando non si adopera è questa: il cannocchiale verticale coll'obbiettivo rivolto allo Zenith, la marca a su α, ed i freni aperti.

III.

Il 28 aprile 1885 cominciai a misurare gli ingrandimenti degli oculari semplici e dei due con anelli micrometrici servendomi di un dinametro di Ramsden. Il valore delle parti della scala incisa sulla lastretta di mica è: $0^{mm}.2540$, ed ottenni i seguenti risultati:

Oculari semplici.		Parti del dinametro.	Ingrandimenti.
N°	1	18.0	65
»	2	12.3	96
»	3	8,2	144
»	4	5,7	207
»	5	3,8	311
»	6	2,5	472
»	7	1,8	656
Ocul. con 2 anelli micrometrici			
»	8	11,2	106
Ocul. con 1 anello micrometrico			
»	9	7,3	162

Nel 1883 in occasione delle osservazioni di cui è fatto parola nelle mie due Note intorno agli anelli micrometrici (Vol. IX), trovai per i due ultimi oculari applicati al cercatore di comete, la cui distanza focale mi risultò di $0^m,8295$, gli ingrandimenti 20 e 31 rispettivamente; la distanza focale del refrattore Merz dell'equatoriale risultò, calcolata, di m. 4,458. Deducendo gli ingrandimenti con questi numeri si trovano 107 invece di 106 e 166 invece di 162; con sufficiente accordo, avendo io dovuto misurare il diametro dell'anello oculare col dinametro tenuto a mano senza appoggiarlo al cannocchiale.

Torino, 24 gennaio 1886.

LAVORI *eseguiti dall'Assistente Prof.* A. CHARRIER *nel R. Osservatorio di Torino presentati dal Socio* DORNA, *Direttore dell'Osservatorio stesso.*

Anno XX **1885**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Novembre.

La media delle altezze barometriche osservate in questo mese è 37,16; essa è superiore di mm. 0,17 alla media delle altezze barometriche osservate in Novembre negli ultimi diciannove anni.

Le variazioni dell'altezza barometrica furono frequenti ed anche di ragguardevole ampiezza.

Il quadro seguente contiene i massimi ed minimi valori osservati.

Giorni del mese.	Minimi.	Giorni del mese.	Massimi.
1	31,94	3	40,05
6	29,96	11	45,79
15	33,27	17	45,49
23	24,64	28	41,88

La temperatura ha per valor medio 8°,0: essa supera di 1°,8 la temperatura media di Novembre degli ultimi diciannove anni. — Le temperature estreme +2°,2 e +13°,9 si ebbero nei giorni 16 e 7.

Si ebbe frequentemente nebbia. Diciassette furono i giorni piovosi, e l'acqua caduta raggiunse l'altezza di mm. 146,4.

La frequenza dei singoli venti è data dal seguente quadro:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
2	4	18	10	4	3	1	2	9	17	13	7	2	1	3	1

Anno XX **1885**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Dicembre.

La media delle pressioni barometriche osservate nel mese è 41, 44. Essa supera di mm. 4, 27 la media di Dicembre degli ultimi diciannove anni.

Il quadro seguente contiene i valori estremi della pressione barometrica.

Giorni del mese.	Minimi.	Giorni del mese.	Massimi.
1	34,69	3	47,47
6	29,63	8	34,46
10	29,14	16	50,20
17	40,49	19	49,32
26	37,51	27	51,13
30	28,81		

La media della temperatura è di $+1^{\circ},8$, superiore di $0^{\circ}.7$ alla media temperatura di Dicembre degli ultimi diciannove anni. Le temperature estreme $-4^{\circ},3$ e $+12^{\circ},2$ si ebbero: la prima nel giorno 12, e nei giorni 15, 23 e 27 la seconda. — L'altezza dell'acqua caduta in nove giorni fu di mm. 7, 0. Essa proviene da pioggia, da nebbia e da neve.

La tabella seguente dà la frequenza di ciaschedun vento:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
6	9	14	3	1	0	2	1	5	16	31	9	1	0	0	1

Gli altri lavori accennati a pag. 183 vedranno la luce nel solito fascicolo annuale, che si pubblica per cura dell'Accademia.

L'Accademico Segretario
A. Sobrero.

ERRATA-CORRIGE

Nell'Elenco dei Soci, unito alla dispensa 1ª, *alla* Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale, *si aggiungano i seguenti nomi:*

SACHS (Giulio von), Prof. nell'Università di Würzburg.
NAEGLI (Carlo), Prof. nell'Università di Monaco (Baviera).
DELPINO (Federico), Prof. nella R. Università di Bologna.

A pag. 29 *della disp.* 1ª, *nella nota dei* MORTI *si aggiunga:*

CURTIUS (Giorgio), Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia).

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 10 Gennaio 1886 . . . . . *Pag.* 161

BELLARDI — Relazione sulla Memoria del sig. Marchese DE GREGORIO, intitolata: *Fossili di monte Erice di Sicilia del piano Alpiniano* DE GREG. . . . . » 163

SIACCI — Sulla rotazione di un corpo intorno a un punto . . . . . » 165

LESSONA — Breve commemorazione di Edoardo RUEPPELL . . . . . » 170

BRUNO — Sopra un punto della teoria delle frazioni continue . . . » 177

ADUNANZA del 24 Gennaio 1886 . . . . . » 182

GUARESCHI — Sulla γ dicloronaftalina e l'acido ortomonocloroftalico » 184

LESSONA — Nota intorno al valore specifico della *Rana agilis* THOMAS. » 192

VIRGILIO — Di un antico lago glaciale presso Cogne in valle d'Aosta » 195

DORNA — Nozioni intorno all'equatoriale con refrattore Merz, di 30 centimetri d'apertura e metri 4 $^1/_2$ di distanza focale . . . . » 208

—— Lavori dell'Osservatorio astronomico di Torino . . . . . » 215

ERRATA-CORRIGE . . . . . » 217

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXI, DISP. 3ª (*Febbraio* **1886**)

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

—

Febbraio

1886

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 7 Febbraio 1886.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANGELO GENOCCHI

Sono presenti i Soci: Genocchi, Cossa, Lessona, Dorna, Salvadori, Berruti, Curioni, D'Ovidio, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia e Basso, che, in assenza dell'Accademico Segretario Sobrero, ne fa le veci.

Letto ed approvato l'atto verbale della seduta precedente, il Presidente pronunzia parole di rammarico per la morte testè avvenuta del Socio Nazionale residente Nicomede Bianchi, e fa dar lettura di una lettera del Prof. Cav. Pietro Vayra, colla quale la triste notizia è comunicata all'Accademia a nome della famiglia dell' illustre estinto.

Vengono in seguito presentate in dono all'Accademia da parte dei rispettivi autori le opere seguenti:

dal Presidente, il fascicolo di aprile 1885 del *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche*, pubblicato dal Principe B. Boncompagni;

dal Socio Cossa, la 15ª edizione della *Anleitung zur qualitativen chemischen Analyse für Anfaüger und Geübtere* del Socio Corrispondente Remigio Fresenius;

dal Socio SALVADORI, gli *Annali del Museo civico di storia naturale di Genova*, 1885, pubblicati per cura di G. DORIA e R. GESTRO.

Accogliendo le conclusioni della Relazione fatta nell'adunanza del 10 gennaio p. p. dalla Commissione composta dei Soci BELLARDI, BERRUTI e SPEZIA, la Classe ammette alla lettura, e quindi approva per la pubblicazione nelle *Memorie*, un lavoro del Marchese Antonio DE GREGORIO di Palermo *Intorno a taluni fossili di Monte Erice di Sicilia*, ecc.

Il Socio DORNA legge una sua Nota, che fa seguito ad altra precedente, intitolata: *Nozioni intorno all'equatoriale con refrattore Merz di trenta centimetri d'apertura e quattro metri e mezzo di distanza focale.*

Lo stesso Socio DORNA presenta pure per la consueta pubblicazione i seguenti lavori eseguiti nel R. Osservatorio dell'Università di Torino dall'Assistente Prof. Angelo CHARRIER:

1° *Osservazioni meteorologiche dei mesi di novembre e dicembre* 1885;

2° *Diagrammi di dette Osservazioni;*

3° *Osservazione meteorologica fatta all'una pomeridiana, tempo medio di Roma, nel* 2° *semestre* 1884 *e nell'anno successivo* 1885;

4° *Riassunto delle Osservazioni meteorologiche dell'anno* 1885;

5° *Osservazioni meteorologiche rilevate dai registratori;*

a) *Barografo — Secondo trimestre* (*aprile, maggio, giugno*) 1885;

b) *Termografo — Secondo trimestre* (*aprile, maggio, giugno*) 1885.

Infine il Socio BIZZOZERO, anche a nome del Socio condelegato LESSONA, così riferisce alla Classe intorno alla Nota del

Prof. Piero GIACOSA *Su di un ricettario del secolo* XI *esistente nell'Archivio capitolare d'Ivrea*, presentata nell'adunanza del 24 gennaio p. p.

« Il manoscritto copiato e commentato dal Dott. Giacosa contiene un numero considerevole di ricette, colle relative indicazioni morbose, e ci rivela assai bene lo stato della medicina in Italia verso la fine del 900; quanto alla data esso è il 3° documento autentico di medicina medioevale, e rischiara un'epoca in cui mancano assolutamente tutti gli altri indizii di coltura scientifica.

« L'importanza di questo documento, che non era sfuggita ai pochissimi che per altre cause avevano sfogliati i codici Eporediesi, i quali però non lo avevano copiato, è dimostrata dalle seguenti considerazioni:

« I. La massima parte dei rimedii e delle indicazioni risulta desunta da Plinio e da Dioscoride, il che prova la continuità della tradizione classica in Italia, trasmessasi direttamente senza che fosse d'uopo che essa venisse importata di nuovo dagli Arabi; questo smentisce l'opinione di coloro che ammettono che il risorgere della medicina in Italia colla scuola Salernitana sia dovuto agli Arabi.

« II. Alcuni rimedi non conosciuti agli antichi (la canfora p. e.) si trovano citati per la prima volta nel ricettario eporediese, e ci provano l'estensione presa dal commercio col Levante.

« III. Sotto il punto di vista linguistico il manoscritto è utile, perchè ci fa assistere a certe forme affatto popolari, trattandosi di documento per sua natura destinato ad essere divulgato e comprensibile a tutti.

« IV. Per ciò che riguarda la storia dell'Italia del Nord, questo documento contribuisce a darci un'idea della coltura della seconda città del reame (Ivrea) nell'epoca più splendida della sua storia politica, cioè ai tempi del re Arduino, quando il seggio episcopale era occupato dal vescovo Wormondo, della cui dottrina ed amore per le arti fanno fede i codici ed i ristauri del Duomo d'Ivrea. Questo fiorire della coltura durante quest'epoca di fortunose vicende spiega la persistenza della tradizione Arduinica in tutto il Canavese moderno.

« Il manoscritto, che per la prima volta si stampa, è accompagnato da una notizia esplicativa del Dott. Piero Giacosa, e da una copia di un frammento assai più antico (VIII sec.), esso pure relativo ai rimedii.

« Per queste considerazioni i relatori vi propongono che il lavoro del Dott. Giacosa venga letto all'Accademia per essere inserito nelle *Memorie* ».

La Classe accoglie la conclusione dei Commissarii, e approva il lavoro del sig. Dott. P. Giacosa per la stampa nei volumi delle *Memorie* dell'Accademia.

LETTURE

NOZIONI

INTORNO

ALL'EQUATORIALE

CON REFRATTORE MERZ

di 30 centimetri d'apertura e metri 4 $^1/_2$ di distanza focale

del Socio ALESSANDRO DORNA

NOTA SECONDA.

Il 1° maggio 1885 dalle 10 alle 11 $^1/_2$ di sera osservai Giove ed i suoi quattro satelliti. Questi erano tutti da una stessa parte del pianeta ed uno vicinissimo al medesimo. Guardai cogli ingrandimenti 144, 207, 311, 472 e 656. Coi due primi il pianeta, le sue fascie ed i suoi satelliti si vedevano stupendamente. Cogli altri tre notai delle nebulosità e deformazioni crescenti coll'ingrandimento. Ma l'atmosfera era poco tranquilla ed il cielo alquanto velato, sebbene azzurrognolo ad occhio nudo.

Nel pomeriggio del giorno successivo, per sperimentare il moto di orologieria osservai il Sole durante dieci minuti consecutivi, ricevendone l'immagine sopra un foglio bianco che applicai all'oculare. Il moto dell'orologio è regolare e dalla proiezione immobile del Sole sopra il foglio dedussi che l'astro, durante l'osservazione, non cambiò sensibilmente di posto nel campo del refrattore.

Il tubo di questo non ha un coperchio fornito di diverse aperture per l'osservazione diretta del Sole con elioscopi; essendo il costruttore persuaso che si possa osservare direttamente anche il Sole con tutto l'obbiettivo (cosa non contradetta da un illustre osservatore, alludendo forse alle osservazioni spettroscopiche). Mi avventurai ad applicare all'oculare un vetro nero, che dovetti subito levare, sentendo un leggiero *cricch* indizio di rottura. Ho

messo al suo posto la mano e dovetti ritirarla per l'eccessivo calore. Ordinai immediatamente cinque coperchi di cartone colle aperture circolari del diametro di 5, 10, 15, 20 e 25 centimetri; non essendo il caso di far fare un coperchio metallico con diverse aperture chiudibili a cerniera, come quello del circolo meridiano, perchè per le dimensioni che dovrebbe avere per l'equatoriale, riescirebbe troppo pesante.

Nel mattino del giorno seguente cominciai a leggere i circoli graduati dall'oculare e dal piede dello strumento per farmi un criterio della precisione delle letture, dipendente dal grado di perfezione con cui sono state incise le divisioni, e dal modo con cui sono illuminate (mediante specchi e prismi) dalla lampada a petrolio che il costruttore collocò, per l'illuminazione dei cerchi graduati e del campo, alla estremità dell'asse di declinazione opposta a quella dove è attaccato il cannocchiale. — Di questo studio, lungo e noioso, renderò conto in un'altra Nota.

Nella sera dello stesso giorno, quantunque il cielo fosse poco propizio perchè non perfettamente sereno e l'aria alquanto agitata, rivolsi il refrattore alla Polare; successivamente cogl'ingrandimenti 96, 144, 207, 311, 472 e 656. Con 96 rimarcai una piccola stelletta vicinissima che mi parve di grandezza inferiore all'11ª e con luce planetaria molto viva; la vidi ad est in alto (immag. rovesc.). Con 144 la medesima apparenza di luce planetaria, meno intensa, in essa più lontana nella direzione primitiva. Con 207 la vidi vieppiù lontana, dalla stessa parte, in forma di un piccolo dischetto, nettamente contornato e con luce tranquilla. Queste apparenze mi sono anche state confermate dallo studente C. B. a cui le mostrai.

A me che guardavo per la prima volta una stella con un obbiettivo Merz di trenta centimetri, la Polare sembrava essere di prima grandezza tanto era il suo splendore, come se avessi rivolto il cannocchiale ad una delle stelle più lucenti. — Fui sorpreso non meno della volta che, avvicinandomi all'equatore nel 1874, vidi ad occhio nudo la splendida Canopo, dove, rispetto al zenit, non mi era mai occorso di vedere stella così lucente. — Con 311 ho veduto meno bene, le deformazioni crebbero con 472 e diventarono così grandi con 656 che se l'atmosfera fosse stata più tranquilla avrei senz'altro conchiuso che questo oculare di maggior ingrandimento è cattivo. Col penultimo potei ancora vedere a stento il compagno della Polare,

ma coll'ultimo non lo vidi più e la Polare aveva l'apparenza di una ruota di raggi.

Il cannocchiale cercatore è fornito di un reticolo quadrato fatto con dei fili metallici eccessivamente grossi che converrà cambiare. Nella sera del 4, puntando a Regolo coll'oculare con due anelli micrometrici, di ingrandimento 106, vidi che avendo la stella al centro del reticolo del cercatore essa non era nel grande cannocchiale. Ho corretto la direzione del primo, in modo che la stella essendo nel mezzo del campo del refrattore, col l'orologio in moto si manteneva anche quasi centrata nel cercatore, ossia in vicinanza del lato superiore del piccolo quadrato del suo reticolo. Non cercai di ottenere subito il perfetto concentramento, avuto riguardo che anche la più sottile delle punte di ferro fornite dal costruttore è troppo grossa per imperniarvi bene i buchi delle teste di vite di rettifica del cercatore. Ma per avere nel gran cannocchiale un astro visibile nel quadrato del reticolo del cercatore, questo è adesso abbastanza rettificato.

Osservando Regolo avevo messo lo strumento nelle posizione di *circolo precede*, ed ho fatto le seguenti letture sui circoli graduati:

	Dall'oculare.	Dal piede.
Circolo orario	$15^h\ 29^m\ 5^s$	15 29 10
	3 29 10	
Circolo di declinazione	348° 2′	
	168 1	168° 1′

Il tempo siderale, nell'istante dell'osservazione, era $1^h\ 31^m\ 50^s$ all'incirca. — Per avere il tempo esatto nel gran cupolo dell'equatoriale siamo ancora in condizioni sfavorevoli. Ma col sussidio largitoci dal Consorzio Universitario nel bilancio del 1886, avremo, prima che scada tale anno, un pendolo siderale apposito. Nel frattempo ci conviene dedurre il tempo dal pendolo siderale Dent della sala meridiana, mediante confronti col medesimo di un orologio trasportabile che ci dia l'ora per l'equatoriale.

Non avendo nulla di meglio dal 1° al 19 maggio 1885, tempo in cui feci coll'equatoriale alcune osservazioni, procedetti nella seguente maniera:

Accelerando per parecchi giorni consecutivi il mio orologio tascabile ordinario Ricard, ne ridussi per comodità l'andamento

a quello del Dent sudetto, di cui si determina giornalmente la correzione con osservazioni meridiane.

Il tempo siderale summentovato dell'osservazione di Regolo è stato da me dedotto dal seguente confronto fatto prima dell'osservazione:

Dent	$12^h\ 20^m\ 13^s$	Correz.	$+\ 15^s$
Ricard	(12) 23 0		
D-R	— 2 47		— 2 47
		Correz. *R*	$-\ 2^m 32^s$

Dopo non avendo potuto fare un secondo confronto, ritenni che la correzione di *R* nell'istante dell'osservazione fosse questa trovata prima.

L'ora *R* dell'osservazione è stata		$1^h\ 34^m\ 22^s$
Correz. *R*		— 2 32
Tempo siderale	$\theta =$	1 31 50
Dal *N A* ascensione retta	$\alpha =$	10 2 16
Angolo orario vero	$\tau =$	15 29 34

Se tiensi anche conto della lettura fatta dal piede dello strumento, facendone la media colla corrispondente dello stesso nonio letto dall'oculare, la lettura del circolo orario in numeri interi è mediamente $15^h\ 29^m\ 9^s$, inferiore di 25^s all'angolo orario vero.

Si vedrà meglio più innanzi che, colla posizione di *circolo precede* dell'equatoriale di cui parlo, una delle letture dell'altro circolo corrisponde al supplemento della declinazione, il cui valore vero dato dal *NA* è $\delta = 12°\ 32'$.

La media delle letture del circolo di declinazione, riferita più sopra, è $168°\ 1'$. Adunque, essendo $180 - \delta = 167°\ 28'$ la lettura superò di $33'$ il supplemento della declinazione vera.

Nel pomeriggio del 5 ho diretto il cannocchiale al Sole. Dentro lo strato d'aria che il Sole illuminava, nel cupolo, dalla finestra si vedeva sospeso un pulviscolo che se accadrà di frequente, ci metterà in fastidio per tenere puliti i vetri ed altre parti dello strumento. Ordinai un pennello finissimo per l'obbiettivo.

Il tubo oculare del cannocchiale non può scorrere fuori abbastanza per l'oculare di minore ingrandimento 65. È una prova

che l'Officina, la quale si fece mandare tutta la parte ottica per adattarvi il tubo, non se ne curò abbastanza.

Con tutto l'obbiettivo e coll'oculare di ingrandimento 96 (pel quale bisogna già tirar fuori quasi interamente la parte che può uscire del tubo oculare) vidi assai distintamente disseminate sulla superficie del Sole una grande quantità di macchie e di fori, sebbene il pulviscolo depositatosi sull'obbiettivo necessitasse già di spolverarlo ed abbia usato il vetro nero menzionato più sopra, la cui minima frattura non impedisce ancora di adoperarlo.

Pel Sole notai un inconveniente relativo alle lettura dei cerchi, ed è che col cannocchiale rivolto al Sole penetra della luce solare nel tubo in cui si fanno le letture dall'oculare, per modo che è difficilissimo distinguere bene le divisioni dei cerchi e dei nonii. Ed anche dal piede dello strumento le letture sono difficili.

Essendo stati portati i coperchi ordinati con diverse aperture rivolsi di nuovo, il 9 maggio, il cannocchiale al Sole coll'apertura di 5 centimetri e con *circolo precede.*

Constatai la stesso difetto d'illuminazione confusa dei cerchi graduati, per la luce solare su alcuni punti, la quale non potei togliere, nemmeno ponendo un ostacolo fra il Sole ed il tubo in cui si legge. Nè si attenua il difetto aprendo e chiudendo la finestrina con cui si regola la luce nel campo del cannocchiale.

Nel giorno 9, osservando il Sole, potei fare a stento una lettura di cerchi, che per lo studio dello strumento non è inutile che io riferisca, quantunque poco precisa. L'oculare adoperato non avendo reticolo mi servii di quello del cercatore per centrare il Sole nel grande cannocchiale. Pel tempo avevo fatto qualche ora prima la seguente determinazione della correzione dell'orologio:

D	$1^h\ 45^m\ 13^s$	Correzione	$+\ 16^s$
R	1 48 0		
	$-\ 2\ 47$		$-\ 2^m\ 47$
		Correz. di R	$-\ 2^m\ 31^s$
L'ora di R in cui osservai è			$4^h\ 58\ 20$
Onde il tempo siderale		$\theta =$	4 55 49
Dal NA l'ascen. retta vera		$\alpha =$	3 6 23
Epperciò l'angolo orario vero		$\tau =$	1 49 26

Le letture del circolo orario furono:

dall'oculare	dal piede
$13^h\ 49^m\ 10^s$	$13^h\ 49^m\ 25^s$

Il valore di una delle parti minime del nonio del circolo orario essendo di 5^s havvi fra le due letture la differenza di tre delle medesime; in parte dovuta anche certamente al difetto di illuminazione suaccennato. Confrontando queste osservazioni del Sole con quella di Regolo della sera del 4, fatta 30° circa più ad ovest, la lettura del circolo orario non è molto scorretta rispetto all'angolo orario vero. Non mi è stato possibile leggere il circolo di declinazione dall'oculare. Dal piede ho letto $163^\circ\,4'$. Nel NA la declinazione vera è $\delta = 17^\circ\,30'$. Onde $180^\circ - \delta = 162^\circ\,30'$. La lettura del circolo di declinazione supera adunque di $34'$ il supplemento della declinazione vera, differenza quasi identica a quella trovata con Regolo il giorno 4.

Nella sera del 9 maggio osservai Giove, Regolo e la Spica. Per il tempo ho fatto i seguenti confronti:

	Prima delle osservazioni	Dopo le osservazioni
D	$10^h\ 38^m\ 31^s$	$13^h\ 36^m\ 36^s$
R	$10\ \ 41\ \ \ 0$	$1\ \ 39\ \ \ 0$
D-R	$-\ \ 2\ \ 29$	$-\ 2\ \ 24$

La correzione di D sul tempo siderale

a mezzodì del 9 è stata	$+\ 16^s\ 3$
» 11 »	$+\ 17\ \ 9$
Ritardo in 24 ore	$1\ \ 6$

Dal primo mezzodì all'ora media dei due confronti trascorsero 9 ore ed in tal tempo D ritardò di $0^s,3$; si può quindi prendere $16^s,6$ per correzione costante di D durante le osservazioni. Dai due confronti risulta che in $2^h\ 58^m$ di R, D-R aumentò di 5^s, si ha quindi ad y ore di R dopo le $11^h\ 41^m$ di R che la sua correzione pel tempo siderale è $-2^m 29^s + 16^s,6 + 5^s \frac{9^h}{2^h 58^m}$, ossia al tempo $10^h\ 41^m + y^h$ di R la correzione di R è $-2^m 12^s,4 + 1^s,7\ y$.

Da questa formola dedussi il tempo a meno di $\frac{1^s}{2}$ come nei confronti, e basta poichè, come già dissi, l'indicazione minima del nonio del circolo orario è di 5^s.

In quanto alle letture dei cerchi, nello schema seguente delle osservazioni, avverto che dal piede dello strumento ve ne ha una sola per circolo e che ora si legge uno dei due nonii di cui è fornito ciascun circolo ora si legge l'altro; mentre dall'oculare si possono leggere entrambi i nonii dei due circoli. In modo che uno dei nonii si legge due volte, una dall'oculare e l'altra dal piede, e l'altro nonio una volta sola dall'oculare. Il disaccordo che si vede di una, due e perfino di tre unità del nonio nelle letture di uno stesso nonio, può (come si vedrà nella Nota in cui parlo dei circoli graduati) attribuirsi in gran parte al grado d'illuminazione molto differente da una lettura ad un'altra.

Schema delle osservazioni.

ASTRO α δ	R θ τ	CIRCOLO PRECEDE LETTURE oculare	 piede	R θ τ	CIRCOLO SEGUE LETTURE oculare	 piede
GIOVE 9h 55m 52s 13° 50′ 0	11h17m20s 11 15 9 1 19 17 [a]	1h19m 0s 13 19 0 346° 45′ 166 44	13h19m 0s 160° 41′	11h44m48s 11 42 37 1 46 45 [a1]	1h45m50s 13 46 0 13° 49′ 193 47	1h45m55s 13° 47′
REGOLO 10h 2m 16s 12° 31′ 5	11h24m 8s 11 21 57 1 19 41 [b]	1h19m20s 13 19 20 168° 2′ 348 3	13h19m20s 168° 2′	11h53m27s 11 51 17 1 49 1 [b1]	1h48m 5s 13 48 10 192° 28′ 12 28	1h48m 0s 12° 27′
SPICA 13h 19m 10s —10° 33′ 8	0h58m2s5 12 55 54 23 36 44 [c]	11h36m 0s 23 36 10 191° 1′ 11 1	11h36m10s 191° 0′	0h29m 7s 12 26 58 23 7 48 [c1]	11h 6m35s 23 6 25 169° 33′ 349 32	23h 6m30s 349° 32′
SPICA	1h 3m11s 13 1 3 23 41 53 [c′]	11h41m10s 23 41 10 191° 0′ 11 2	11h41m10s 191° 0′	0h39m24s 12 37 15 23 18 5 [c1′]	11h16m55s 23 16 50 169° 30′ 349 30	23h16m55s 349° 31′
SPICA [c″]	1h 8m 0s 13 5 52 23 46 42	11h46m 0s 23 46 0 191° 0′ 11 2	11h46m 0s 191° 0′			
SPICA [c‴]	1h11m15s 13 9 7 23 49 57	11h49m15s 23 49 15 11° 3′ 191 1	11h49m10s 191° 0′			
SPICA [cIV]	1h17m30s 13 15 22 23 56 12	23h55m30s 11 55 30 11° 2′ 191 2	11h55m30s 191° 1′			
SPICA [cV]	1h20m 45s5 13 18 38 23 59 28	23h58m40s 11 58 40 191° 2′ 11 3	11h58m40s 191° 1′			
SPICA [cVI]	1h23m48s 13 21 40 0 2 30	12h 0m50s 0 1 50 191° 1′ 11 3	12h 1m50s 191° 1′			

α Ascensione retta vera.
δ Declinazione id.
R Ora dell'orologio Ricard.
θ Tempo siderale.
τ Angolo orario.
[a], ecc. Notazioni di riscontro per i calcoli da eseguirsi.

NB. In queste osservazioni ed in altre fatte nelle sere del 16 e 19, delle quali parlerò in una terza Nota, adoperai l'oculare con due anelli micrometrici, d'ingrandimento 106, mettendo ad occhio le stelle osservate al centro comune delle periferie degli anelli, cosa che può ottenersi in una maniera abbastanza precisa.

Dal confronto delle letture dei circoli colle ascensioni rette e colle declinazioni degli astri osservati risulta che uno dei nonii del circolo orario corrisponde sempre all'angolo orario dell'astro e che uno dei nonii del circolo di declinazione corrisponde al

supplemento della declinazione quando *circolo precede*, ed alla declinazione aumentata di 180° quando *circolo segue*. Nelle note equazioni approssimate dell'equatoriale si dovrà quindi per quello di cui parlo (se è già abbastanza ben collocato da poterle applicare al medesimo) mettere al primo membro $180^\circ - \delta$ e τ quando il circolo di declinazione precede il cannocchiale, e $180^\circ + \delta$ e τ allorchè tal circolo lo segue.

Ammesso che non si verifichi il caso improbabile in cui essendo le costanti strumentali considerevoli, si abbia tuttavia, coll'elidersi dei loro effetti, un discreto accordo fra le coordinate apparenti e le letture dei cerchi dello strumento in diverse posizioni, siccome le coordinate vere non possono differire molto dalle apparenti, è lecito farsi una idea sommaria del grado di precisione con cui lo strumento è collocato, confrontando le letture istrumentali colle corrispondenti coordinate vere degli astri osservati; e se le differenze sono piccole, arguire che le costanti strumentali non sono grandi, ed in una prima ricerca delle medesime, dedurle applicando le equazioni approssimate dell'equatoriale.

Trascrivo qui sotto le differenze che ottenni tenendo solamente conto delle letture dall'oculare.

Differenze fra le coordinate vere e le letture dei cerchi.

		CIRCOLO PRECEDE		CIRCOLO SEGUE	
		$\tau - \tau'$	$(180 - \delta) - \delta'$	$\tau_1 - \tau_1'$	$(180 + \delta) - \delta_1'$
4 Maggio	Regolo	$+ 25^s$	$- 33'$		
9 Idem	Sole	$+ 16$	$- 34$		
»	Giove	$+ 17$	$- 34,5$	$+ 50^s$	$+ 2',0$
»	Regolo	$+ 21$	$- 34,0$	$+ 53$	$+ 3,5$
»	Spica	$+ 39$	$- 27,2$	$+ 78$	$+ 6,3$
»	»	$+ 43$	$- 27,2$	$+ 72,5$	$+ 3,2$
»	»	$+ 42$	$- 27,2$		
»	»	$+ 42$	$- 28,2$		
»	»	$+ 42$	$- 28,2$		
»	»	$+ 48$	$- 28,7$		
»	»	$+ 40$	$- 28,2$		

Torino, 7 febbraio 1886.

Adunanza del 21 Febbraio 1886

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ARIODANTE FABRETTI
VICEPRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Fabretti, Cossa, Lessona, Dorna, Salvadori, Berruti, Curioni, Siacci, D'Ovidio, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso e Basso, che, in assenza del Socio Sobrero, fa le veci di Segretario.

Vien letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio Berruti fa dono all'Accademia del *Manuel du galvanisme* del Prof. Giuseppe Izarn, edito a Parigi nel 1805, nel quale, oltre molte altre notizie interessanti per la storia della fisica, si trova pure un cenno sulle prime osservazioni fatte in Italia dal Romagnosi sulla deviazione dell'ago magnetico, e dal Prof. Mojon di Genova sulla magnetizzazione dell'acciaio prodotta dalla corrente elettrica.

Il Socio Basso legge una sua breve Commemorazione in morte dell'eminente fisico Giulio Jamin, Professore alla Scuola politecnica ed alla Facoltà di Scienze di Parigi, Segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia, e Socio Corrispondente dell'Accademia di Torino.

Il Socio Cossa presenta: 1° una Nota del Dott. G. Mazzara, intitolata: *Ricerche sulla trasformazione del timol in carvacrol;*

2° un'altra Nota dei Dottori G. MAZZARA e G. DISCALZO, intitolata: *Bromoderivati del timol, del timochinone, dell'ossitimol.*

Il Socio DORNA legge una sua Nota, che fa seguito a due altre già lette in sedute precedenti, *Intorno all'equatoriale con refrattore Merz di trenta centimetri d'apertura e quattro metri e mezzo di distanza focale.*

Infine il Socio LESSONA presenta, a nome del Socio SPEZIA assente, un lavoro manoscritto del Dott. Federico SACCO, intitolato: *I terreni quaternari della collina di Torino.* Desiderando l'autore che il suo lavoro sia accolto nei volumi delle *Memorie*, viene affidato ad una Commissione coll'incarico di esaminarlo e riferirne in una prossima seduta.

LETTURE

COMMEMORAZIONE

DI

GIULIO JAMIN

del Socio Prof. GIUSEPPE BASSO

Il giorno 14 febbraio 1886 moriva in Parigi nell'età di 63 anni l'insigne fisico Giulio Jamin, il quale apparteneva anche alla nostra Accademia in qualità di Socio corrispondente.

Nato a Termes nelle Ardenne, Giulio Jamin entrò a 25 anni nella Scuola Normale di Parigi ed in questa, tre anni dopo, fu accolto aggregato per la Fisica. L'indole della sua mente, acuta, immaginosa e precisa ad un tempo, lo trasse fin dalla prima giovinezza a coltivare con ardore quegli studi che non abbandonò neppure in questi ultimi anni, quando ripetute sventure domestiche e la malattia cardiaca, della quale fu alla fine vittima, avevano incominciato a fiaccarne la operosità instancabile e maravigliosa.

Le ricerche di laboratorio, i lavori originali dei quali si occupò in ogni tempo egli seppe felicemente associare alle fatiche dello insegnamento. Dopo di aver professato, nei primi anni della sua carriera, nel collegio Borbone, ora liceo Condorcet, il Jamin fu ben presto chiamato alla cattedra di fisica nella Scuola Politecnica, poscia, nel 1863, anche alla cattedra di fisica presso la Facoltà di Scienze di Parigi. Le sue eminenti qualità di docente ebbero campo di risplendere, non solo negli insegnamenti regolari a cui dava opera indefessa, ma anche in frequenti Conferenze

popolari nelle quali le difficoltà dei gravi argomenti trattati venivano attenuate dalla forma chiarissima, spigliata, elegante della esposizione.

Nel 1868 il Jamin fu nominato socio dell'Accademia delle Scienze di Parigi in sostituzione di Pouillet per la sezione di Fisica e due anni or sono succedette a G. B. Dumas nell'eminente ufficio di Segretario perpetuo dell'Accademia stessa.

Il parlare degnamente dello Jamin come scienziato, lo esaminare i molti suoi lavori originali che sparsero viva luce sopra diverse questioni di fisica generale ed applicata, sarebbe opera che di gran lunga sorpasserebbe i confini del modesto còmpito che ora mi sono assunto. Accenno soltanto di volo alle ricerche da lui eseguite nel campo dell'elettrologia e specialmente a quelle che riguardano il magnetismo e la conduttività magnetica dei corpi atti ad essere calamitati: agli ampi suoi studi di Ottica fisica e segnatamente a quelli sulle interferenze luminose che lo condussero all'invenzione del *rifrattometro interferenziale:* ai suoi lavori di termologia colle applicazioni speciali alla meteorologia: infine al prezioso suo *Cours de Physique de l'École Polytechnique* che il compianto autore andò man mano completando e perfezionando nelle edizioni successive.

La perdita d'un tanto uomo è certamente gravissima sciagura; però ad alleviarne il dolore deve contribuire il pensiero che i servigi da lui resi alla scienza ed ai buoni studi non si arrestano completamente collo spegnersi di Lui. Oltre ai suoi scritti, che saranno sempre consultati ed ammirati come modelli di monografie scientifiche, rimane, monumento durevole della sua sapiente operosità, una istituzione importante, al cui ordinamento egli consacrò le ultime sue cure; rimangono cioè i laboratorii della *École pratique des hautes études*, che sono un vero semenzaio di giovani fisici, dei quali parecchi seguono già con passo sicuro le orme del loro venerato maestro.

RICERCHE

SULLA

TRASFORMAZIONE DEL TIMOL IN CARVACROL

del Dott. G. Mazzara,

presentate dal Socio Prof. Alfonso Cossa

La trasformazione del nitrotimol e del nitrocarvacrol nello stesso timochinone ha indotto i chimici ad ammettere tanto nel primo che nel secondo non solamente l'identità del gruppo C_3H_7, ma anche la posizione para del gruppo NO_2 rispetto all'ossidrile.

A confermare questa opinione, che lascia taluni chimici dubitare della sua esattezza, malgrado che sia avvalorata da altre reazioni, ho tentato passare dal nitrotimol al cloro o bromocarvacrol, sostituendo l'OH al Cl o Br e trasformando il gruppo NO_2, che si trova al posto orto rispetto al metile, in ossidrile; e viceversa, dal nitrocarvacrol che ha il gruppo NO_2 al posto orto rispetto al C_3H_7, per identiche trasformazioni, al cloro o bromotimol.

Per preparare i corrispondenti cloronitrocimeni ho fatto agire il percloruro di fosforo sul nitrotimol e sul nitrocarvacrol; la clorurazione però con questo metodo, malgrado che l'operassi in diverse condizioni e seguissi esattamente le norme prescritte da Ladenburg ed Engelbrecht a proposito della preparazione del dinitroclorocimene, mi diede dei prodotti in così piccole quantità da non poter venire utilizzate in ulteriori ricerche.

È noto, che nella nitrazione degli idrocarburi il nitrile va d'ordinario a prendere l'identica posizione rispetto ai gruppi sostituenti, tanto che essi siano l'ossidrile od un alogeno. Siccome questa legge vale non solo per la benzina, ma anche pel toluene, credo che si possa considerare come generale ed estenderla quindi al cimene. In base a ciò ho preparato i nitrobromocimeni nitrando

direttamente i corrispondenti bromocimeni, sperando così di poter passare dal timol al carvacrol, o almeno da un derivato del primo ad uno del secondo e viceversa. Pel momento non posso assicurare se queste trasformazioni siansi effettuate, ma riserbandomi di continuare nelle mie esperienze, credo opportuno di descrivere sin da ora alcuni nuovi corpi ottenuti.

AZIONE DELL'ACIDO NITRICO SUL BROMOCIMENE

Dinitrobromocimene.

Il bromocimene adoperato in queste ricerche è stato ottenuto col metodo di Gerichten, riscaldando cioè quattro molecole di timol con una di pentabromuro di fosforo. Il prodotto della reazione, trattato con potassa diluita, si distillò in una corrente di vapor d'acqua, la quale trasportò un olio che venne rettificato per distillazione. Il bromocimene così preparato venne versato a poco per volta nell'acido nitrico fumante (miscuglio fatto a parti uguali di acido nitrico della densità 1,48 e di acido 1,52). Si osserva che appena il bromocimene viene in contatto dell' acido si colora in rosso ed agitando il miscuglio vi si scioglie. Per non fare elevare di troppo la temperatura si raffredda il pallone in cui si fa la reazione, immergendolo nell'acqua. — Il prodotto della reazione coll'aggiunta di acqua precipita come olio, che dopo un certo tempo si rapprende in una poltiglia ricca di cristalli. Per separare questi dalla parte liquida, il miscuglio, ben lavato con potassa diluita, si tratta con benzina di petrolio o con etere, nei quali solventi la parte cristallizzata non si scioglie; oppure si distilla in una corrente di vapor d'acqua che trasporta solo la parte oleosa. I cristalli separati così dalla parte liquida si asciugano fra carta, e si cristallizzano dall'alcool bollente, dal quale per raffreddamento si separano sotto forma di piccoli aghi gialli, fusibili a 94° e dotati di odore di muschio.

All'analisi hanno dato i seguenti risultati:

Gr. 0,5206 fornirono gr. 0,3240 di *Ag Br*.

Bromo per cento:

trovato	calcolato per $C_6H(NO_2)_2CH_3C_3H_7Br$
26,08	26,40.

Questo dinitrobromocimene è isomero con quello ottenuto da Gerichten facendo agire il bromocimene, ottenuto bromurando il cimene sopra un miscuglio di ac. solforico ed ac. nitrico.

Esso si riduce facilmente sciogliendolo in alcool e trattando la soluzione con ac. cloridrico e polvere di zinco. Il cloridrato è solubilissimo in alcool con colorazione rossa: è poco solubile nell'acqua; ossidato con cloruro ferrico e distillato in una corrente di vapor d'acqua lascia passare una sostanza rosso arancio che cristallizza dall'alcool in pagliette giallo d'oro fusibili parte a 140° e parte a temp. più elevata. Esse si sciolgono negli idrati alcalini con colorazione violetta.

All'analisi mi hanno dato una perdita considerevole di bromo. Dall'insieme dal loro comportamento ho potuto dedurre che esse risultano da un miscuglio di *bromoossitimochinone* e di diossitimochinone; vale a dire che il diamidobromocimene si comporta agli ossidanti come il diamidoclorocimene che fornisce diossitimochinone e cloroossitimochinone.

Nitrobromocimene.

Precedentemente ho accennato che dall'azione dell'acido nitrico sul bromocimene, a lato del dinitrobromocimene si forma una sostanza oleosa che è volatile col vapor d'acqua. Questa sostanza lasciata anche per molto tempo a bassa temperatura non si solidifica; essa si presenta sotto l'aspetto di un olio giallo più pesante dell'acqua avente forte odore di muschio. Solubile nella benzina e nell'etere, è poco solubile nell'alcool specialmente se diluito.

Separata dall'acqua ed asciugata lasciandola parecchi giorni nel vuoto sull'acido solforico, diede all'analisi i seguenti risultati:

grammi 0,4694 di sostanza fornirono
grammi 0,3467 di $Ag\ Br$

e Br per cento:

trovato	calcolato per $C_6H_2CH_3C_3H_7NO_2Br$
31,40	31,00.

Questo composto è isomero a quello ottenuto da Gerichten facendo agire il bromocimene sull'ac. nitrico.

Amidobromocimene.

La bromocimidina venne preparata riducendo con stagno ed acido cloridrico il bromonitrocimene. In ogni operazione s'impiegarono da 10 a 15 gr. di nitroderivato che si versavano a poco a poco in un palloncino in cui reagiva stagno con acido cloridrico. Scaldando per un certo tempo a bagnomaria ed agitando, la parte oleosa, dopo raffreddamento, si rapprese in un ammasso pastoso, formato da laminette madreperlacee, che lavate con acqua vennero cristallizzate dall'alcool diluito. Esse sono pochissimo solubili nell'acqua, e la soluzione acquista una colorazione violetta; esposte alla luce si colorano pure in violetto, più facilmente quando sono secche.

Decomposte con soluzione di carbonato sodico od idrato separano un olio che è volatile con vapor d'acqua. Distillata di recente con vapor d'acqua, la base ha un color rosso che dopo un certo tempo diventa bruno violetto. Ha odore di cimidina. Sospesa nell'acqua e trattata con acido solforico si rapprende in una poltiglia di cristalli bianco-violetti. La base, come anche il cloridrato ed il solfato, sono poco solubili nell'acqua, e la soluzione acquosa diventa facilmente violetta.

L'amidoderivato, separato dall'acqua ed asciugato nel vuoto sull'acido solforico, diede all'analisi i seguenti risultati:

grammi 0,6488 di sostanza diedero
grammi 0,5395 di $Ag\ Br$

e di Br per cento:

trovato	calcolato per $C_6H_2NH_2CH_3C_3H_7Br$
35,38	35,08.

Bromoossicimene.

Per avere il corrispondente bromofenol dalla bromocimidina ho operato nel seguente modo. Il cloridrato di bromocimidina si scioglie in alcool, e la soluzione si tratta colla quantità equivalente di nitrito potassico sciolto in poca acqua, e diluito con molto alcool. Mescolando le due soluzioni si osserva la separazione di una sostanza gialla che è il sale di diazobromocimene.

Si tratta il tutto con acido solforico diluito, si aggiunge molta acqua, e si distilla in una corrente di vapor d'acqua che trasporta il bromoossicimene. Il bromofenol così ottenuto si presenta sotto l'aspetto di una sostanza liquida rosso-bruna. Per purificarlo l'ho sciolto nella potassa concentrata, filtrata la soluzione l'ho decomposta con HCl ed ho distillato in corrente di vapor d'acqua. Si ottiene così sotto forma di un olio giallo, di odore aggradevole, molto più pesante dell'acqua.

Asciugato nel vuoto sull'acido solforico all'analisi diede i seguenti risultati:

1° grammi 0,2762 di sostanza fornirono
grammi 0,2237 di $Ag\ Br$;
2° grammi 0,4290 di sostanza fornirono
grammi 0,1163 di acqua e
grammi 0,8266 di CO_2.

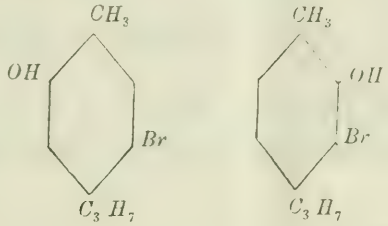
Trovato per cento		calcolato per $C_6H_2OHCH_3C_3H_7Br$.
Carbonio	52,54	52,40
Idrogeno	5,6	5,6
Bromo	34,46	34,75.

Sottoposto alla distillazione si decompone con sviluppo di acido bromidrico.

Si constatò che la sostanza non conteneva azoto. Raffreddando anche fortemente non si solidificò.

Escludendo nel nitrotimol e nel nitrocarvacrol la posizione meta del nitrile rispetto all'ossidrile, poichè tanto il primo che il secondo non potrebbero trasformarsi nello stesso timochinone, ed

ammettendo che l'acido nitrico agendo sul bromocimene deve dare prodotti di costituzione analoga a quelli che si ottengono col timol, il bromoossicimene sopradescritto non potrebbe avere che le due seguenti formole:



In ambedue i casi esso sarebbe bromoderivato del carvacrol.

Questo bromoossicimene deve, se la legge sopra accennata è esatta, trasformarsi in carvacrol; a tale intento vi feci agire per parecchi giorni l'amalgama di sodio, ma senza alcun risultato.

Fallita questa via, tentai l'inversa, vale a dire di ottenere dal carvacrol un bromoderivato identico a quello sopradescritto.

Ho fatto agire quindi sopra una molecola di carvacrol una molecola di bromo sciolti in acido acetico, raffreddando fortemente le soluzioni. Trattando con acqua il prodotto della reazione, si ottiene un olio denso volatile con vapor d'acqua. Analizzando porzioni provenienti da due diverse preparazioni ottenni in una 40,5 % di bromo, nell'altra 42 %, numeri che indicano il prodotto essere un miscuglio di monobromo che richiede 34,9 % di bromo, e di bibromo che ne richiede 51,9.

Io sono attualmente occupato a determinare la posizione del gruppo *OH* dell'ossibromocimene sopradescritto, per riconoscere se realmente s'è effettuata la trasformazione del timol in un derivato dal carvacrol.

Torino, febbraio 1886.

BROMODERIVATI

del Timol, del Timochinone e dell'Ossitimol

Nota dei Dottori G. Mazzara *e* G. Discalzo
presentata dal Socio Prof. Alfonso Cossa

Carstanjen per l'azione dell'acqua di bromo sul timochinone ottenne insieme a dibromotimochinone un timochinone solido. Anche Andresen facendo agire l'acido bromidrico sul cloroimidotimochinone trovò che insieme allo stesso dibromotimochinone, si forma un altro bromotimochinone liquido.

Per chiarire la natura di questi monobromoderivati abbiamo creduto conveniente di tentare di ottenerli per altra via, vale a dire partendo dal bromonitrosotimol per riduzione e successiva ossidazione.

In questa Nota ci proponiamo di descrivere i derivati del timol naturale, e ci riserviamo fra breve di rendere di pubblica ragione quelli del carvacrol.

Bromonitrosotimol.

Questo composto fu preparato facendo agire una molecola di bromo sopra una molecola di nitrosotimol sciolti in acido acetico e raffreddando le soluzioni. Coll'aggiunta di acqua si separò una sostanza solida che si purificò cristallizzandola dall'alcool diluito.

Si ottiene così sotto forma di lunghi aghi splendenti, di color giallo d'oro; questi aghi riscaldati verso i 135° si decompongono.

All'analisi diede i seguenti risultati:

grammi 0,6608 di sostanza diedero
grammi 0,4840 di bromuro d'argento

e *Br* per cento:

trovato	calcolato per $C_6H.CH_3.C_3H_7.OH.Br.NO$
31,16	31,01.

Bromonitrotimol.

Sul nitrotimol, ottenuto dall'ossidazione del nitroso con ferricianuro di potassa, si fece agire il bromo nelle condizioni descritte nella preparazione del bromonitroso.

Trattando la soluzione acetica con acqua si precipitò una sostanza solida che venne purificata cristallizzandola dall'alcool diluito. Cristallizza in aghi, gialli, fusibili a 100°-101°.

All'analisi diede i seguenti risultati:

grammi 0,5541 di sostanza diedero
grammi 0,3766 di bromuro d'argento

e Br per cento:

trovato	calcolato per $C_6H.CH_3.C_3H_7.OH.Br.NO_2$
28,92	29,19.

Bromoamidotimol.

Fu preparato riducendo il bromonitrosotimol in soluzione alcoolica con polvere di zinco ed acido cloridrico, e decomponendo quindi con carbonato sodico il cloridrato così ottenuto.

Questa base cristallizza dall'alcool diluito in iscaglie rosee che si colorano rapidamente alla luce. Fonde verso i 90°.

All'analisi:

grammi 0,4551 di sostanza diedero
grammi 0,3614 di bromuro d'argento

e Br per cento

trovato	calcolato per $C_6H.CH_3.C_3H_7.NH_2.OH.Br$
32,74	32,78.

Questa base probabilmente sarà identica a quella ottenuta da Andresen per l'azione dell'acido bromidrico sull'imidotimochinone.

Il cloridrato si presenta sotto forma di aghi prismatici color carne, solubili nell'alcool, poco solubili nell'acqua.

Bromotimochinone.

Sopra dieci grammi di cloridrato di bromoamidotimol sospesi in due litri d'acqua si fecero agire quattro grammi di nitrito potassico, ed indi acido solforico diluito sino a reazione acida.

Distillando quindi in una corrente di vapor d'acqua passò un olio giallo, più pesante dell'acqua che si rapprese in pagliette fusibili a 48°.

Cristallizzato dall'alcool diluito diede all'analisi:

grammi 0,6677 di sostanza diedero
grammi 0,5144 di bromuro d'argento

e *Br* per cento	calcolato per
trovato	$C_6H.CH_3.C_3H_7.Br.O_2$
32,75	32,92.

Questo bromotimochinone sembra corrispondere a quello ottenuto da Carstanjen per l'azione dell'acqua di bromo sul timochinone.

Bromoidrotimochinone.

Sul bromotimochinone sospeso nell'acqua si fece passare sino a saturazione una corrente di anidride solforosa.

Si osservò che i cristalli gialli si sciolsero formando un liquido bruno che dopo alcuni giorni si rapprese in una massa di cristalli bianchi fusibili a 52°-53°. Detti cristalli dopo un certo tempo diventano rossi e fondono a 37°. Sembra che questa trasformazione avvenga difficilmente, quando i cristalli non sono in presenza dell'acqua.

Ossitimochinone.

Facendo bollire il bromotimochinone con idrato potassico, dopo l'aggiunta di acido cloridrico, si formò un precipitato rosso di ossitimochinone. Sulle proprietà di questo composto torneremo quando avremo studiato l'azione dell'idrato potassico sul bromotimochinone ottenuto dall'amidocarvacrol.

Torino, febbraio 1886.

NOZIONI

INTORNO

ALL' EQUATORIALE

CON REFRATTORE MERZ

di trenta centimetri d'apertura e metri 4 $^1/_2$ di distanza focale

del Socio Prof. ALESSANDRO DORNA

NOTA TERZA.

I.

La sera del 16 maggio 1885 osservai Arturo nelle due posizioni dello strumento. Prima e dopo ho fatto i seguenti confronti del mio orologio Ricard col pendolo siderale Dent:

Prima delle osservazioni.				Dopo le osservazioni.		
D	12^h	39^m	$54^s,5$	14^h	16^m	$57^s,5$
R	(12)	44	0	(14)	21	0
D-R =	—	4	5, 5	—	4	2, 5

A mezzodì del 16 correz. di D: $21^s, 8$ ora di D : $3^h\ 33^m\ 8^s,9$
» » » 17 » » » : 22 , 8

Ritardo in un giorno : 1 , 0 .

Risulta da questi numeri che la correzione di D nell'istante medio fra i due confronti è di $22^s,2$ e si può considerare come costante. Onde a $12^h\ 44^m$ di R la correzione di quest'orologio sul tempo siderale è $-3^m\ 43^s,3$. Fra i due confronti, ossia in $1^h, 6$ la quantità $D-R$ aumentò di 3^s. Adunque al tempo $12^h\ 44^m + y^s$ di R la correzione di questo è data dalla formola:

$-3^m\,43^s,3 + 1^s,9y$, di cui mi servii per dedurre il tempo siderale delle osservazioni che qui trascrivo:

Osservazioni fatte nella sera del 16 *maggio* 1885.

ASTRO α δ	R θ τ	CIRCOLO PRECEDE LETTURE		R θ τ	CIRCOLO SEGUE LETTURE	
		oculare	piede		oculare	piede
Arturo	$13^h23^m57^s$	$11^h\ 9^m40^s$	$11^h\ 9^m45^s$	$13^h53^m\ 1^s$	$11^h38^m29^s$	
$14^h10^m27^s$	13 20 15	23 9 45		13 49 20	23 38 29	$23^h38^m29^s$
$19^o46',9$	23 9 48	340° 44′		23 38 53	19° 50′	19 49
	[d]	160 41	160° 40′	[d_1]	199 50	
Arturo	$13^h34^m\ 2^s$	23^h19^m45		$14^h\ 3^m29^s$	$23^h48^m50^s$	$23^h48^m50^s$
	13 30 20,5	11 19 40	$11^h19^m45^s$	13 59 48	11 48 50	
	23 19 53,5	340° 44′		23 49 21	199° 50′	
	[d']	160 41	160° 40′	[d_1']	19 50	19° 49′

α Ascensione retta vera.
δ Declinazione. »
R Ora dell'orologio Ricard.
θ Tempo siderale.
τ Angolo orario vero.
[d], ecc. Notazioni di riscontro per i calcoli da eseguirsi.

La sera del 19 maggio, in compagnia di alcune persone, osservai la Luna coll'ingrandimento 96, tenendo in azione il movimento di orologieria per aver ferme nel campo del cannocchiale le parti del disco che guardavamo. È mirabile la chiarezza con cui si vedono le gradazioni di luce e di ombra dei crateri, dei coni che sporgono da alcuni di essi e delle montagne, segnatamente ai corni e nelle vicine parti oscure, nitidissime, del lembo.

Rimasto solo collo studente C. B. osservai β ed α della Grand'Orsa col cannocchiale nella posizione di circolo precede, e la Polare nelle due posizioni dello strumento. Mentre facevo girare il cupulo per ispostarne la fessura di quanto mi occorreva per osservare le altre due stelle con circolo segue, movendomi all'oscuro nel cupolo, caddi nella bottola della scala d'accesso in pietra, la qual bottola, discese le persone venute a guardare la Luna, per inavvertenza non venne richiusa. Nell'impossibilità di osservare, potei ancora, sorretto dallo studente e dal custode,

dare la posizione di riposo allo strumento che solamente io sapevo adoperare alla Specola. Ma con cinque contusioni, di cui due alla testa, fui assalito da violentissima febbre, foriera di una congestione cerebrale, che mi tenne parecchi giorni in pericolo di vita, e nell'inazione per molto tempo.

Nella sera di cui parlo confrontai, prima delle osservazioni, col pendolo siderale Dent, il mio Ricard, e per maggior garanzia anche il cronometro a tempo medio Frodsham della Specola. Dopo le osservazioni venne fatto un secondo confronto dallo studente. Ecco i numeri che abbiamo scritto:

	Prima delle osservazioni.	Dopo le osservazioni.
D	$12^h\ 41^m\ 13^s,5$	$14^h\ 35^m\ 0^s$
R	(12) 47 0	14 40 44
D-R =	— 5 46,5	— 5 44
D	$12^h\ 43^m\ 34^s$	$14^h\ 36^m\ 40^s$
F	9 11 0	11 3 47
	3 32 34	3 32 53

A mezzodì del 19 correz. di D: 25,1, ora di D: $3^h\ 45^m\ 1^s,4$
» » » 20 » » »: 26,3

Ritardo in un giorno: 1,2.

Dal mezzodì del 19 all'istante medio fra i confronti avendo D ritardato solamente di $0^s,5$, la sua correzione per quest'istante è $25^s,6$ e, nell'intervallo di tempo trascorso dal primo confronto all'ultimo, si può considerare come costante.

Il cronometro F, il quale segna regolarmente il tempo medio, avendo mostrato durante le osservazioni che R camminava abbastanza bene, seguitai a servirmi di questo per registrare i tempi. A $12^h\ 47^m$ di R la sua correzione era $-5^m\ 20^s,9$, e siccome fra i due confronti, ossia in 1^h9 del medesimo la quantità D-R aumentò di $2^s,5$ la correzione di R a $12^h\ 47^m + y^h$ di esso è data dalla formola: $-5^m\ 20^s,9 + 1^s,3y$ che mi servì a dedurre il tempo siderale delle osservazioni contenute nella seguente tabella. In essa l'indicazione di *Sottopolo* che applicai alla Polare è per mettere in avvertenza che, per la posizione in cui l'osservai,

bisogna, nelle differenze $(180^\circ - \delta) - \delta_1$ e $(180^\circ + \delta) - \delta_1'$, di cui ho parlato nella Nota precedente, sostituire a δ il suo supplemento (Vedi Chauvenet, vol. II, pagine 375 e 376).

Osservazioni fatte nella sera del 19 *maggio* 1885.

ASTRO α δ	R θ τ	CIRCOLO PRECEDE LETTURE oculare	 piede	R θ τ	CIRCOLO SEGUE LETTURE oculare	 piede
β Grand'Orsa	$13^h26^m9^s$	$2^h25^m40^s$				
$10^h54^m55^s$	13 20 49	14 25 40	$14^h25^m45^s$			
57° 0′	2 25 54	303° 36′				
	[*e*]	123 36	123° 36′			
α Grand'Orsa	$13^h35^m16^s$	$2^h32^m55^s$				
$10^h50^m38^s$	13 29 56	14 32 55	$14^h33^m0^s$			
62° 22′	2 33 18	298° 15′				
	[*f*]	118 15	118° 15′			
Polare	$13^h52^m13^s$	$23^h41^m40^s$		$14^h5^m42^s$	$23^h47^m45^s$	$23^h47^m40^s$
(Sottopolo)	13 46 53,5	11 41 40	$11^h41^m40^s$	14 0 23	11 47 45	
$1^h16^m26^s$	12 30 27,5	89° 15′	89° 15′	12 43 57	91° 18′	91° 18′
88° 46′, 6	[*g*]	269 16		[g_1]	271 19	

Confrontando, come per le osservazioni date nella seconda Nota, le coordinate vere colle letture corrispondenti dei cerchi graduati si ha:

1885	ASTRO	CIRCOLO PRECEDE $\tau - \tau'$	 $(180^\circ - \delta) - \delta'$	CIRCOLO SEGUE $\tau_1 - \tau_1'$	 $(180^\circ + \delta) - \delta_1'$
16 magg.	Arturo	+ 5ˢ, 5	− 29′, 4	+ 24ˢ, 0	− 3′, 1
» »	»	+ 11, 0	− 29, 4	+ 31, 0	− 3, 1
19 magg.	β G. Orsa	+ 14, 0	− 36, 0		
» »	α » »	+ 23, 0	− 37, 0		
» »	Polare (Sottopolo)	$+48^m47^s,5$	− 33, 9	$+56^m12^s,0$	− 0, 1

Queste differenze e quelle delle osservazioni, in maggior numero, della Nota che precede, quantunque considerevoli, non sono tanto grandi da non potersi applicare le formole approssimate dell'equatoriale alla prima ricerca delle costanti per rettificare lo strumento. Non mi è stato possibile di confermare con una nuova osservazione della Polare, nell'identica posizione in cui la osservai il 19 maggio, le letture dell'angolo orario che mi diedero le due grosse differenze scritte nella tabella. Però la tangente e la secante di δ, che moltiplicano alcune delle suddette costanti nella formola dell'angolo orario, essendo per la Polare uguali a 44,06 e 44,65, la grandezza di quelle differenze non prova che le costanti strumentali sieno anche molto grandi.

II.

Il mattino del 3 maggio 1885 cominciai, come dissi nella Nota precedente, a leggere i circoli dal piede dello strumento e dall'oculare dando al cannocchiale varie posizioni, collo scopo di farmi un giusto criterio della precisione delle graduazioni e del modo con cui sono illuminate.

Il circolo orario è diviso in ventiquattro ore, colle rispettive indicazioni. Le ore sono divise in dodici parti di cinque minuti, colla indicazione dei minuti in tutte le divisioni. Ogni intervallo di cinque minuti è diviso in cinque parti di un minuto e ciascun minuto in due parti di trenta secondi. Sei divisioni del nonio corrispondono a cinque delle più piccole del circolo in modo che la lettura minima è di cinque secondi di tempo.

Il circolo di declinazione è diviso in trecentosessanta gradi colle rispettive indicazioni. Ogni grado è diviso in due parti di trenta primi, e ciascuna di queste in tre di dieci primi. Dieci divisioni del nonio corrispondono a nove delle più piccole del circolo; cosicchè la lettura minima è di un primo d'arco.

Nel leggere i circoli graduati notai degli inconvenienti, che qui indico, affinchè sieno possibilmente evitati dall'abile meccanico costruttore. Secondochè si legge un circolo o l'altro, occorre, segnatamente dal piede dello strumento, una diversa disposizione dell'apparato ottico con cui si legge; la qual cosa è incomoda per l'osservatore. L'illuminazione che i cerchi graduati ricevono dalla lampada per mezzo degli specchi e dei prismi nascosti all'osservatore, in certe letture è troppo debole, segnatamente per il

circolo orario letto dal piede dello strumento, in altre invece è eccessiva, segnatamente per il circolo di declinazione letto dall'oculare. Dal piede, girando un poco il manico con cui si passa dalla lettura di un circolo a quella dell'altro, qualche volta (dico qualche volta, però accade certe fiate di non poter nemmeno leggere) si può regolare la luce in modo soddisfacente; ma dall'oculare, dal quale si fanno le letture più importanti essendovi due nonii opposti per ciascun cerchio, l'osservatore non ha modo per regolare la luce, e questa è talvolta così viva che abbaglia e non si può legger bene, e talvolta è così scarsa che leggesi a stento o non si può leggere.

Notai leggendo i cerchi ed i nonii nelle varie loro parti, che i nonii, invece di abbracciare una parte costante dei cerchi, vi sono delle discrepanze piuttosto gravi. Per esempio: sul cerchio di declinazione a 292° dieci parti del nonio corrispondono bene a nove parti del cerchio, ed al punto opposto di questo quattordici parti del nonio corrispondono a dodici del circolo. A 280° dodici parti del nonio corrispondono ad undici del cerchio. Siccome il meccanico costruttore è indubitatamente molto abile, ritengo che la macchina con cui ha diviso i circoli non sia abbastanza precisa.

Eccettuati i mezzi poco sicuri per i piccoli moti e per le letture dall'oculare, la solidità e la precisione con cui sono lavorati i vari congegni della montatura, per cui in tutte le posizioni si ha sempre un attrito dolce e costante, sono una prova indubbia che qui in Italia la meccanica di precisione sta bene nelle mani del Cavignato, meccanico capo dell'officina dell'Osservatorio astronomico della Società Veneta in Padova.

Le incisioni delle divisioni si vedono ora grosse, ora fine e talvolta troppo larghe e malfatte. False immagini inerenti al sistema di illuminazione per via di specchi e prismi a riflessione totale, nella quasi impossibilità di un perfetto collocamento di questi, danno alle parti visibili dei cerchi graduati e dei nonii una chiarezza ed uno splendore differenti; in modo che talvolta è come se il cerchio od il nonio fosse in ombra Fra cerchio e nonio si forma una striscia oscura, in certe posizioni molto grande, la quale nuoce assai alle letture, forse prodotta in parte da asperità e discontinuità delle superficie su cui sono incise le divisioni ed in parte da un qualche fenomeno di polarizzazione della luce riflessa da specchio.

In conseguenza degli inconvenienti che accennai è difficile e

molte volte impossibile, leggendo, distinguere quale delle divisioni dei nonii è in coincidenza con una delle divisioni dei circoli, sembrando che possa esser anche l'una o l'altra delle laterali od entrambe.

Dirò adesso della lettura dei cerchi:

Circolo orario. — Ho diretto l'obbiettivo verso il polo Nord colla lettura 90° 0′ del circolo di declinazione e diedi al cannocchiale, leggendo dal piede dello strumento, per prima posizione $18^h\ 0^m\ 0^s$ del circolo orario, nella qual posizione il cannocchiale sta sopra l'asse polare. Ho mosso di cinque in cinque minuti, prima pel verso Ovest, pel quale la lettura del cerchio orario è crescente, manovrando dal piede col manubrio volante. L'ordine che seguii nella lettura è il seguente: Lessi, 1° il circolo orario dal piede; 2° il circolo di declinazione dal piede; 3° dall'oculare alternativamente i due nonii dei due circoli, come si presentano manovrando la corda senza fine. Ho trovato che col cannocchiale parallelo all'asse polare bisogna, girando ad Ovest in angolo orario, fermarsi alla lettura $2^h\ 25^m$ (al di là di 24^h) per evitare, movendo di qualche minuto di più, un urto possibile e dannoso del tubo del cannocchiale contro il basamento dell'equatoriale. Dalla posizione $18^h\ 0^m\ 0^s$, girando invece ad Est, anche col cannocchiale parallelo all'asse polare, bisogna fermarsi alla lettura $9^h\ 15^m$ perchè, movendo ancora di qualche minuto, un contrappeso urterebbe contro il basamento suddetto. I moti possibili in angolo orario col cannocchiale parallelo all'asse polare sono adunque di $8^h\ 25^m$ ad Ovest ed $8^h\ 45^m$ ad Est, ossia in complesso di un po' meno dei tre quarti dell'intero giro attorno all'asse polare. Per continuare ad Est le letture del circolo orario rivolsi l'obbiettivo all'equatore colla lettura 180″ 0′ 0″ del circolo di declinazione (fatta dal piede dello strumento); con tale lettura potei diminuire ancora quella del circolo orario fino a $6^h\ 0^m$. Per finir di leggere il circolo orario inclinai diversamente il cannocchiale portando la lettura del circolo di declinazione (sempre dal piede dello strumento) da 180° a 135°.

Circolo di declinazione. — Ho mosso il cannocchiale in declinazione dall'oculare, di grado in grado cominciando ad Est dalla posizione che è determinata dalle letture $12^h\ 0^m\ 0^s$ e 180° 0′ fatte dal piede, ed abbassando gradatamente di 45° l'obbiettivo, ossia dall'equatore al punto Sud dell'orizzonte. Dopo rivolsi di

nuovo l'obbiettivo all'equatore nella primitiva posizione e lo girai gradatamente a Nord, attraverso allo zenith ed al polo per 115°, lettura a cui mi arrestai, nella impossibilità, per motivi di salute, di continuare questo studio. Non trovai opportuno di ultimarlo più tardi, perchè, avendo nel frattempo gli specchi e prismi riflettori perduto della loro pulitezza e forse anche cambiato un tantino di posizione, adesso le letture sono difficili e non abbastanza precise. Cosicchè è necessaria una pulitura e forse anche un aggiustamento dal meccanico, non avendoli, come dissi, l'osservatore a disposizione perchè nascosti.

Le letture, di cui rendo conto, sono state fatte in più volte nel 1885. Alla fine di ciascuna operazione ho sempre rimesso lo strumento nella sua posizione di riposo. Distinguo le letture fatte di seguito con delle righe trasversali. Le lineette al posto di letture significano che mi è stato impossibile di leggere essendo troppo debole l'illuminazione delle divisioni.

21 febbraio 1886.

Letture dei circoli graduati movendo in angolo orario

DAL PIEDE					DALL'OCULARE									
90°	0′	18h	0m	0s	90°	0′	270°	0′	6h	0m	0s	18h	0m	0s
»	0	»	5	»	»	0	»	0	»	5	5	»	5	5
»	0	»	10	»	»	0	»	0	»	10	0	»	10	0
»	0	»	15	»	»	0	»	0	»	15	0	»	15	5
»	0	»	20	»	»	0	»	0	»	20	0	»	20	0
»	0	»	25	»	»	0	»	1	»	25	0	»	25	0
»	0	»	30	»	»	0	»	0	»	30	0	»	30	0
»	0	»	35	»	»	0	»	0	»	35	5	»	35	0
»	1	»	40	»	»	0	»	0	»	40	0	»	40	0
»	0	»	45	»	»	0	»	0	»	45	0	»	45	5
»	0	»	50	»	»	0	»	2	»	50	0	»	50	0
»	1	»	55	»	»	0	»	0	»	55	0	»	55	0
»	1	19	0	»	»	0	»	0	7	0	0	19	0	0
»	1	»	5	»	»	0	»	0	»	5	0	»	5	5
»	1	»	10	»	»	0	»	1	»	10	0	»	10	0
»	1	»	15	»	»	0	»	0	»	15	0	»	15	0

Letture dei circoli graduati movendo in angolo orario

DAL PIEDE					DALL'OCULARE								
90°	2′	19h	20m	0s	90°	1′	270°	1′	7h	20m	0s	19h	20m	0s
»	1	»	25	»	»	0	»	0	»	25	0	»	25	0
»	1	»	30	»	»	0	»	0	»	30	0	»	30	0
»	0	»	35	»	»	0	»	2	»	35	0	»	35	0
»	2	»	40	»	»	0	»	0	»	40	0	»	40	0
»	1	»	45	»	»	1	»	3	»	45	0	»	45	0
»	2	»	50	»	»	1	»	3	»	50	0	»	50	0
»	1	»	55	»	»	1	»	3	»	55	0	»	55	0
»	1	20	0	»	»	1	»	3	8	0	0	20	0	0
»	1	»	5	»	»	1	»	3	»	5	0	»	5	0
»	1	»	10	»	»	2	»	3	»	10	0	»	10	0
»	1	»	15	»	»	1	»	4	»	15	0	»	15	0
»	2	»	20	»	»	2	»	3	»	20	0	»	20	0
»	1	»	25	»	»	2	»	3	»	25	0	»	25	0
»	2	»	30	»	»	2	»	3	»	30	0	»	30	0
90°	0′	20h	35m	0s	90°	0′	270°	0′	8h	35m	0s	20h	35m	0s
»	0	»	40	»	»	0	»	0	»	40	0	»	40	0
»	0	»	45	»	»	0	»	0	»	45	0	»	45	0
»	0	»	50	»	»	0	»	0	»	50	0	»	50	0
»	0	»	55	»	»	0	»	0	»	55	0	»	55	0
90°	0′	21h	0m	0s	90°	1′	270°	2′	9h	0m	0s	21h	0m	0s
»	0	»	5	»	»	0	»	2	»	5	0	»	5	0
»	0	»	10	»	»	0	»	0	»	10	0	»	10	0
»	0	»	15	»	»	1	»	3	»	15	0	»	15	0
»	0	»	20	»	»	1	»	0	»	20	0	»	20	0
»	0	»	25	»	»	0	»	1	»	25	0	»	25	0
»	1	»	30	»	»	0	»	2	»	30	0	»	30	0
»	0	»	35	»	»	0	»	1	»	34	55	»	34	55
»	1	»	40	»	»	1	»	2	»	39	55	»	39	55
»	0	»	45	»	»	0	»	2	»	45	0	»	45	0
»	0	»	50	»	»	0	»	0	»	50	0	»	50	0
»	0	»	55	»	»	1	»	2	»	55	0	»	55	0
»	0	22	0	»	»	0	»	2	10	0	0	22	0	0

Letture dei circoli graduati movendo in angolo orario

DAL PIEDE					DALL'OCULARE								
90°	0′	22h	5m	0s	90°	0′	270°	0′	10h	5m	0s	22h	5m	0s
»	0	»	10	»	»	0	»	1	»	10	0	»	10	0
»	0	»	15	»	»	0	»	1	»	15	0	»	15	0
»	0	»	20	»	»	0	»	1	»	20	0	»	20	0
»	0	»	25	»	»	0	»	2	»	25	0	»	25	0
»	0	»	30	»	»	0	»	1	»	30	5	»	30	5
»	1	»	35	»	»	0	»	1	»	34	55	»	34	55
»	0	»	40	»	»	1	»	2	»	40	0	»	40	0
»	1	»	45	»	»	0	»	1	»	44	55	»	45	0
»	0	»	50	»	»	1	»	2	»	50	0	»	50	0
»	1	»	55	»	»	0	»	2	»	55	0	»	55	0
90°	0′	23h	0m	0s	90°	0′	270°	2′	11h	0m	0s	23h	0m	0s
»	0	»	5	»	»	1	»	2	»	5	0	»	5	0
»	0	»	10	»	»	0	»	3	»	10	0	»	10	0
»	0	»	15	»	»	1	»	2	»	15	0	»	15	0
90°	0′	23h	20m	0s	90°	1′	270°	1′	11h	20m	0s	23h	20m	0s
»	0	»	25	»	»	1	»	2	»	25	0	»	25	0
»	1	»	30	»	»	1	»	2	»	30	0	»	30	0
»	1	»	35	»	»	0	»	2	»	35	0	»	35	0
»	0	»	40	»	»	0	»	2	»	40	0	»	40	0
»	1	»	45	»	»	0	»	2	»	45	0	»	45	0
»	1	»	50	»	»	2	»	3	»	50	0	»	50	0
»	1	»	55	»	»	2	»	3	»	55	0	»	55	0
»	1	0	0	»	»	1	»	3	12	0	0	0	0	0
90°	0′	0h	5m	0s	90°	0′	270°	2′	12h	5m	0′	0h	5m	0s
»	0	»	10	»	»	0	»	2	»	10	0	»	10	0
»	0	»	15	»	»	0	»	2	»	15	0	»	15	0
»	0	»	20	»	»	0	»	2	»	20	0	»	20	0
»	0	»	25	»	»	0	»	2	»	25	0	»	25	0
»	0	»	30	»	»	0	»	2	»	30	0	»	30	0
»	0	»	35	»	»	0	»	2	»	35	0	»	35	0
»	0	»	40	»	»	1	»	2	»	40	0	»	40	0
»	0	»	45	»	»	0	»	2	»	45	0	»	45	0
»	0	»	50	»	»	0	»	2	»	50	0	»	50	0

Letture dei circoli graduati movendo in angolo orario

DAL PIEDE					DALL'OCULARE									
90°	0′	0h	55m	0s	90°	0′	270°	2′	12h	55m	5s	0h	55m	0s
»	0	1	0	»	»	0	»	1	13	0	0	1	0	0
89	59	»	5	»	»	0	»	1	»	5	0	»	5	0
»	59	»	10	»	»	0	»	2	»	10	0	»	10	0
90	0	»	15	»	»	0	»	1	»	15	0	»	15	0
89	59	»	20	»	»	0	»	1	»	20	0	»	20	0
90	0	»	25	»	»	0	»	1	»	25	0	»	25	0
89	59	»	30	»	89	59	»	2	»	30	0	»	30	0
90	0	»	35	»	90	0	»	2	»	35	0	»	35	0
»	0	»	40	»	»	0	»	2	»	40	0	»	40	0
89	59	»	45	»	»	0	»	2	»	45	0	»	45	0
90	0	»	50	»	»	0	»	1	»	49	55	»	50	0
89	59	»	55	»	»	0	»	1	»	55	0	»	55	0
»	59	2	0	»	»	0	»	1	»	59	55	»	59	55
90	0	»	5	»	»	0	»	2	14	5	0	2	5	0
»	0	»	10	»	89	59	»	1	»	10	0	»	10	0
»	0	»	15	»	»	59	»	1	»	14	55	»	14	55
»	0	»	20	»	90	0	»	2	»	20	0	»	19	55
»	0	»	25	»	89	59	»	2	»	25	0	»	24	55
90°	0′	17h	55m	0s	90°	0′	270°	0′	5h	55m	0s	17h	55m	0s
»	0	»	50	»	»	1	»	0	»	50	0	»	50	0
»	0	»	45	»	»	0	»	0	»	45	0	»	45	0
»	0	»	40	»	»	0	»	0	»	40	0	»	40	0
»	0	»	35	»	»	0	»	0	»	35	0	»	35	0
»	0	»	30	»	»	0	»	2	»	30	0	»	30	5
»	0	»	25	»	»	1	»	0	»	25	0	»	25	0
89	59	»	20	»	»	1	»	0	»	19	55	»	20	0
90	0	»	15	»	»	1	»	0	»	15	0	»	15	0
»	0	»	10	»	»	0	»	0	»	10	0	»	10	0
»	0	»	5	»	»	0	»	0	»	5	0	»	5	0
»	0	16	0	»	»	1	»	1	»	0	0	»	0	0
»	0	»	55	»	»	0	»	0	4	55	5	16	55	5
»	0	»	50	»	»	0	»	0	»	50	0	»	50	0
»	0	»	45	»	»	0	»	0	»	44	55	»	45	0

Letture dei circoli graduati movendo in angolo orario

DAL PIEDE					DALL'OCULARE								
90°	0′	16h	40m	0s	90°	0′	270°	0′	4h	40m	0s	16h	40m 5s
»	0	»	35	»	»	1	»	0	»	34	55	»	35 0
»	0	»	30	»	»	0	»	0	»	29	55	»	30 0
»	0	»	25	»	»	1	»	0	»	24	55	»	25 0
»	0	»	20	»	»	0	»	0	»	19	55	»	20 0
»	0	»	15	»	»	0	»	0	»	15	0	»	15 0
»	0	»	10	»	»	0	»	0	»	9	55	»	10 0
»	0	»	5	»	»	0	»	1	»	4	50	»	4 55
90°	0′	16h	0m	0s	90°	0′	270°	0′	3h	59m	55s	16h	0m 0s
»	0	15	55	»	»	0	»	0	»	0	0	15	55 0
»	0	»	50	»	»	0	»	0	»	49	55	»	50 0
»	0	»	45	»	»	0	»	1	»	44	50	»	44 55
»	0	»	40	»	»	0	»	0	»	40	0	»	40 0
»	0	»	35	»	»	0	»	0	»	35	0	»	35 0
»	0	»	30	»	»	0	»	0	»	30	0	»	30 0
»	0	»	25	»	»	0	»	0	»	24	55	»	25 0
»	0	»	20	»	»	1	»	0	»	19	55	»	20 0
»	0	»	15	»	»	0	»	0	»	15	0	»	15 0
»	0	»	10	»	»	0	»	0	»	10	0	»	10 0
»	0	»	5	»	»	1	»	0	»	5	0	»	5 0
»	0	»	0	»	»	1	»	0	»	0	0	»	0 0
»	0	14	55	»	»	0	»	0	2	55	0	14	55 0
»	0	»	50	»	»	0	»	0	»	50	0	»	50 0
»	0	»	45	»	»	0	»	0	»	45	0	»	45 0
»	0	»	40	»	»	0	»	0	»	40	0	»	40 0
»	0	»	35	»	»	1	»	0	»	35	0	»	35 0
89	59	»	30	»	»	0	»	1	»	30	0	»	30 0
90	0	»	25	»	»	0	»	1	»	25	0	»	25 0
»	0	»	20	»	»	0	»	0	»	20	0	»	20 0
»	0	»	15	»	»	0	»	1	»	15	5	»	15 5
»	0	»	10	»	»	0	»	1	»	10	0	»	10 0
»	0	»	5	»	»	0	»	0	»	5	0	»	5 0
»	0	»	0	»	»	0	»	1	»	0	0	»	0 0
»	0	13	55	»	»	0	»	1	1	55	0	15	55 0

Letture dei circoli graduati movendo in angolo orario

DAL PIEDE					DALL'OCULARE								
90°	0′	13h	50m	0s	90°	0′	270°	0′	1h	50m	0s	13h	50m	0s
»	0	»	45	»	»	0	»	0	»	45	0	»	45	0
»	0	»	40	»	»	0	»	0	»	40	0	»	40	0
89	59	»	35	»	»	0	»	0	»	35	0	»	35	0
90	0	»	30	»	»	0	»	0	»	30	0	»	30	0
90°	0′	13h	25m	0s	90°	0′	270°	0′	1h	25m	0s	13h	25m	0s
»	0	»	20	»	»	0	»	0	»	20	0	»	20	0
»	0	»	15	»	»	0	»	0	»	15	0	»	15	0
»	0	»	10	»	»	0	»	0	»	10	0	»	10	0
»	0	»	5	»	»	0	»	0	»	5	0	»	5	0
»	0	»	0	»	»	0	»	0	»	0	0	»	0	0
»	0	12	55	»	»	0	»	0	0	55	0	12	55	0
»	0	»	50	»	»	0	»	1	»	50	0	»	50	0
»	0	»	45	»	»	0	»	1	»	45	0	»	45	0
»	0	»	40	»	»	0	»	2	»	40	0	»	40	0
»	0	»	35	»	»	0	»	1	»	35	0	»	35	0
»	0	»	30	»	»	0	»	1	»	30	0	»	30	0
89	59	»	25	»	»	0	»	1	»	25	0	»	25	0
90	0	»	20	»	»	0	»	1	»	20	0	»	20	0
»	0	»	15	»	»	0	»	1	»	15	0	»	15	0
»	0	»	10	»	»	0	»	1	»	10	0	»	10	0
»	0	»	5	»	»	0	»	1	»	5	0	»	5	0
»	0	»	0	»	»	0	»	1	»	0	0	»	0	0
»	0	11	55	»	»	0	»	1	23	55	0	11	55	0
»	0	»	50	»	»	0	»	0	»	50	0	»	50	0
»	0	»	45	»	»	0	»	1	»	45	0	»	45	0
»	0	»	40	»	»	0	»	1	»	40	0	»	40	0
»	0	»	35	»	»	0	»	1	»	35	0	»	35	0
»	0	»	30	»	»	0	»	1	»	30	0	»	30	0
»	0	»	25	»	»	1	»	2	»	25	0	»	25	5
»	0	»	20	»	»	1	»	2	»	20	0	»	20	0
»	0	»	15	»	»	1	»	2	»	15	0	»	15	0
»	0	»	10	»	»	1	»	1	»	10	0	»	10	0
»	0	»	5	»	»	1	»	2	»	5	0	»	5	0

Letture dei circoli graduati movendo in angolo orario

DAL PIEDE					DALL'OCULARE								
90°	0′	11h	0m	0s	90°	1′	270°	2′	23h	0m	0s	11h	0m	5s
»	0	10	55	»	»	1	»	2	22	55	0	10	55	0
»	0	»	50	»	»	2	»	2	»	50	5	»	50	0
»	0	»	45	»	»	2	»	2	»	45	0	»	45	0
»	0	»	40	»	»	2	»	2	»	40	0	»	40	0
»	0	»	35	»	»	1	»	1	»	35	0	»	35	0
»	0	»	30	»	»	2	»	2	»	30	5	»	30	0
»	0	»	25	»	»	2	»	2	»	25	10	»	25	5
»	0	»	20	»	»	1	»	2	»	20	5	»	20	0
»	0	»	15	»	»	2	»	2	»	15	0	»	15	0
»	0	»	10	»	»	2	»	2	»	10	5	»	10	0
»	0	»	5	»	»	2	»	2	»	5	5	»	5	0
»	1	»	0	»	»	2	»	2	»	0	5	»	0	0
»	1	9	55	»	»	2	»	2	21	55	5	9	55	0
»	0	»	50	»	»	1	»	2	»	50	0	»	50	0
»	0	»	45	»	»	2	»	2	»	45	5	»	45	0
»	1	»	40	»	»	2	»	2	»	40	5	»	40	5
»	0	»	35	»	»	1	»	2	»	35	0	»	35	0
90°	0′	9h	30m	0s	90°	1′	270°	2′	21h	30m	0s	9h	30m	0s
»	0	»	25	»	»	2	»	2	»	25	0	»	25	0
»	0	»	20	»	»	2	»	2	»	20	0	»	20	0
»	0	»	15	»	»	1	»	2	»	15	0	»	15	0
180°	0′	9h	10m	0s	180°	0′	0°	1′	21h	10m	0s	9h	9m	55s
»	0	»	5	»	»	0	»	0	»	5	0	»	4	55
»	0	»	0	»	»	0	»	0	»	0	0	8	59	55
»	0	8	55	»	»	1	»	1	20	55	5	»	55	5
»	0	»	50	»	»	0	»	1	»	50	0	»	49	55
»	0	»	45	»	»	0	»	1	»	45	5	»	45	0
»	0	»	40	»	»	0	»	2	»	40	5	»	40	5
»	0	»	35	»	»	0	»	1	»	35	0	»	35	0
»	0	»	30	»	»	0	»	2	»	30	0	»	29	55
»	0	»	25	»	»	0	»	1	»	25	5	»	25	5
»	0	»	20	»	»	0	»	1	»	20	0	»	20	0

Letture dei circoli graduati movendo in angolo orario

DAL PIEDE					DALL'OCULARE									
180°	0′	8h	15m	0s	180°	1′	0°	2′	20h	15m	10s	8h	15m	10s
»	0	»	10	»	»	1	»	2	»	10	10	»	10	5
»	0	»	5	»	»	0	»	2	»	5	5	»	5	0
»	0	»	0	»	»	0	»	1	»	0	5	»	0	5
»	0	7	55	»	»	0	»	2	19	55	5	7	55	0
»	0	»	50	»	»	0	»	2	»	50	0	»	50	0
»	0	»	45	»	»	0	»	2	»	45	0	»	44	55
»	0	»	40	»	»	0	»	2	»	40	0	»	40	0
»	0	»	35	»	»	0	»	2	»	35	0	»	35	0
»	0	»	30	»	»	0	»	2	»	30	0	»	30	0
»	0	»	25	»	»	0	»	2	»	25	0	»	25	0
»	0	»	20	»	»	0	»	2	»	20	0	»	20	0
180°	0′	7h	15m	0s	180°	0′	0°	2′	19h	15m	0s	7h	15m	0s
»	0	»	10	»	»	0	»	2	»	10	0	»	10	0
»	0	»	5	»	»	0	»	3	»	5	0	»	5	0
»	0	»	0	»	»	0	»	3	»	0	0	»	0	0
»	0	6	55	»	»	0	»	2	18	55	0	»	55	0
»	0	»	50	»	»	0	»	3	»	50	0	»	50	0
»	0	»	45	»	»	0	»	3	»	45	0	»	45	0
»	0	»	40	»	»	0	»	3	»	40	0	»	40	0
»	0	»	35	»	»	0	»	3	»	35	0	»	35	0
»	0	»	30	»	»	0	»	3	»	30	0	»	30	0
»	0	»	25	»	»	0	»	3	»	25	0	»	25	0
»	0	»	20	»	»	0	»	3	»	20	0	»	20	0
»	0	»	15	»	»	0	»	3	»	15	0	»	15	0
»	0	»	10	»	»	0	»	3	»	10	0	»	10	0
»	0	»	5	»	»	0	»	3	»	5	0	»	5	0
»	0	»	0	»	»	0	»	3	»	0	0	»	0	0
135	0	5	55	»	135	0	315	3	17	55	0	5	54	55
»	0	»	50	»	»	0	»	3	»	50	0	»	49	55
»	0	»	45	»	»	0	»	3	»	45	0	»	45	0
»	1	»	40	»	»	1	»	3	»	40	0	»	39	55
»	0	»	35	»	»	1	»	3	»	35	0	»	35	0
»	0	»	30	»	»	1	»	3	»	30	0	»	30	0
»	0	»	25	»	»	1	»	3	»	25	0	»	25	0

Letture dei circoli graduati movendo in angolo orario

DAL PIEDE					DALL'OCULARE									
135°	0′	5^h	20^m	0^s	135°	0′	315°	3′	17^h	20^m	0^s	5^h	20^m	0^s
»	0	»	15	»	»	1	»	3	»	15	0	»	14	55
»	0	»	10	»	»	1	»	3	»	10	5	»	10	0
»	1	»	5	»	»	1	»	3	»	5	0	»	5	0
»	2	»	0	»	»	1	»	3	»	0	0	4	59	55
»	1	4	55	»	»	1	»	3	16	55	0	»	55	0
»	1	»	50	»	»	2	»	3	»	50	0	»	50	0
»	0	»	45	»	»	1	»	3	»	45	0	»	45	0
135°	0′	4^h	40^m	0^s	135°	0′	315°	3′	16^h	40^m	0^s	4^h	40^m	0^s
»	0	»	35	»	»	0	»	3	»	35	0	»	35	0
»	0	»	30	»	»	0	»	3	»	30	0	»	30	0
»	0	»	25	»	»	0	»	3	»	25	0	»	25	0
»	0	»	20	»	»	0	»	2	»	20	0	»	20	0
»	0	»	15	»	»	0	»	3	»	15	0	»	15	0
»	0	»	10	»	»	0	»	3	»	10	0	»	10	0
»	0	»	5	»	»	0	»	2	»	5	0	»	5	0
»	0	»	0	»	»	0	»	2	»	0	5	»	0	0
»	0	3	55	»	»	0	»	3	15	55	0	3	55	0
»	0	»	50	»	»	0	»	2	»	50	0	»	50	0
»	0	»	45	»	»	0	»	2	»	45	0	»	45	0
»	0	»	40	»	»	0	»	2	»	40	0	»	40	0
»	0	»	35	»	»	0	»	2	»	35	0	»	35	0
»	0	»	30	»	»	0	»	2	»	30	0	»	30	0
»	0	»	25	»	»	0	»	2	»	25	0	»	25	0
»	0	»	20	»	»	0	»	2	»	20	5	»	20	0
»	0	»	15	»	»	0	»	2	»	15	0	»	15	0
»	0	»	10	»	»	0	»	2	»	10	5	»	10	0
»	0	»	5	»	»	0	»	2	»	5	0	»	5	0
»	0	»	0	»	»	0	»	2	»	0	5	»	0	0
»	0	2	55	»	»	0	»	2	14	55	0	2	54	55
»	0	»	50	»	»	0	»	2	»	50	5	»	50	0
»	0	»	45	»	»	0	»	2	»	45	0	»	45	0
»	0	»	40	»	»	0	»	2	»	40	0	»	40	0
»	0	»	35	»	»	0	»	2	»	34	55	»	34	55
»	0	»	30	»	»	0	»	2	»	30	5	»	30	0

Letture dei circoli graduati movendo in declinazione

DAL PIEDE					DALL'OCULARE									
179°	59′	12h	0m	0s	0°	0′	179°	59′	12h	0m	0s	0h	0m	0
180	57	»	0	0	1	»	180	58	»	0	»	»	0	0
181	57	»	0	0	2	»	181	57	»	0	»	»	0	0
182	57	»	0	0	3	»	182	58	»	0	»	»	0	0
183	58	»	0	0	4	»	183	58	»	0	»	»	0	0
184	57	»	0	0	5	»	184	59	»	0	»	»	0	0
185	57	»	0	0	6	»	185	57	»	0	»	»	0	0
186	57	»	0	0	7	»	186	58	»	0	»	»	0	0
187	57	»	0	0	8	»	187	59	»	0	»	»	0	0
188	58	»	0	0	9	»	188	59	»	0	»	»	0	0
189	59	»	0	0	10	»	189	58	»	0	»	»	0	0
190	59	»	0	0	11	»	191	0	»	0	»	»	0	0
191	59	»	0	0	12	»	192	0	»	0	»	»	0	0
192	58	»	0	0	13	»	192	59	»	0	»	»	0	0
193	58	»	0	0	14	»	194	0	»	0	»	»	0	0
194	57	»	0	0	15	»	194	59	»	0	»	»	0	0
195	57	»	0	0	16	»	196	0	»	0	»	»	0	0
196	57	»	0	0	17	»	196	59	»	0	»	»	0	0
197	57	»	0	0	18	»	197	59	»	0	»	»	0	0
198	56	»	0	0	19	»	198	58	»	0	»	»	0	0
199	57	»	0	0	20	»	199	59	»	0	»	»	0	0
200	57	»	0	0	21	»	200	59	»	0	»	»	0	0
201	57	»	0	0	22	»	201	59	»	0	»	»	0	0
202	58	»	0	0	23	»	203	0	»	0	»	»	0	0
203	57	»	0	0	24	»	204	0	»	0	»	»	0	0
204	57	»	0	0	25	»	204	59	»	0	»	»	0	0
205	57	»	0	0	26	»	205	59	»	0	»	»	0	0
206	57	»	0	0	27	»	206	59	»	0	»	»	0	0
207	57	»	0	0	28	»	207	59	»	0	»	»	0	0
208	57	»	0	0	29	»	209	0	»	0	»	»	0	0
209	57	»	0	0	30	»	209	59	»	0	»	»	0	0
210	58	»	0	0	31	»	211	0	»	0	»	»	0	0
211	57	»	0	0	32	»	211	59	»	0	»	»	0	0
212	58	»	0	0	33	»	213	0	»	0	»	»	0	0
213	57	»	0	0	34	»	213	59	»	0	»	»	0	0
214	58	»	0	0	35	»	215	0	»	0	»	»	0	0
215	58	»	0	0	36	»	216	0	»	0	»	»	0	0

Letture dei circoli graduati movendo in declinazione

DAL PIEDE					DALL'OCULARE									
217°	0′	12h	0m	0s	37°	0′	217°	0′	12h	0m	0s	0h	0m	0s
217	59	»	0	0	38	»	218	0	»	0	»	»	0	0
218	58	»	0	0	39	»	219	0	»	0	»	»	0	0
219	59	»	0	0	40	»	220	0	»	0	»	»	0	0
221	0	»	0	0	41	»	221	0	»	0	»	»	0	0
221	58	»	0	0	42	»	222	0	»	0	»	»	0	0
222	58	»	0	0	43	»	223	0	»	0	»	»	0	0
223	58	»	0	0	44	»	224	0	»	0	»	»	0	0
224	59	»	0	0	45	»	225	0	»	0	»	»	0	0
178	57	»	0	0	359	»	178	58	»	0	»	»	0	0
177	57	»	0	0	358	»	177	58	»	0	»	»	0	0
176	58	»	0	0	357	»	176	59	»	0	»	»	0	0
175	57	»	0	0	356	»	175	58	»	0	»	»	0	0
174	57	»	0	0	355	»	174	58	»	0	»	»	0	0
173	57	»	0	0	354	»	173	58	»	0	»	»	0	0
172	57	»	0	0	353	»	172	58	»	0	»	»	0	0
171	58	»	0	0	352	»	171	58	»	0	»	»	0	0
170	57	»	0	0	351	»	170	58	»	0	»	»	0	0
169	57	»	0	0	350	»	169	57	»	0	»	»	0	0
169	0	»	0	0	349	»	168	59	»	0	»	»	0	0
167	57	»	0	0	348	»	167	57	»	0	»	»	0	0
166	58	»	0	0	347	»	166	58	»	0	»	»	0	0
165	57	»	0	0	346	»	165	57	»	0	»	»	0	0
164	58	»	0	0	345	»	164	58	»	0	»	»	0	0
163	58	»	0	0	344	»	163	57	»	0	»	»	0	0
162	57	»	0	0	343	»	162	57	»	0	»	»	0	0
161	57	»	0	0	342	»	161	57	»	0	»	»	0	0
160	57	»	0	0	341	»	160	57	»	0	»	»	0	0
159	58	»	0	0	340	»	159	57	»	0	»	»	0	0
158	57	»	0	0	339	»	158	57	»	0	»	»	0	0
157	59	»	0	0	338	»	157	58	»	0	»	»	0	0
156	58	»	0	0	337	»	156	58	»	0	»	»	0	0
155	57	»	0	0	336	»	155	57	»	0	»	»	0	0
154	58	»	0	0	335	»	154	58	»	0	»	»	0	0
153	58	»	0	0	334	»	153	58	»	0	»	»	0	0
152	57	»	0	0	333	»	152	57	»	0	»	»	0	0

Letture dei circoli graduati movendo in declinazione

DAL PIEDE					DALL'OCULARE								
151°	59′	12h	0m	0s	332°	0′	151°	58′	12h	0m	0s	0h	0m	0s
150	57	—	—	—	331	»	150	57	»	0	»	»	0	0
149	56	»	0	0	330	»	149	57	»	0	»	»	0	0
148	58	»	0	0	329	»	148	58	»	0	»	»	0	0
147	57	»	0	0	328	»	147	58	»	0	»	»	0	0
146	57	»	0	0	327	»	146	56	»	0	»	»	0	0
145	57	»	0	0	326	»	145	58	—	—	—	»	0	5
144	58	»	0	0	325	»	144	57	—	—	—	—	—	—
143	58	—	—	—	324	»	143	58	—	—	—	—	—	—
142	58	—	—	—	323	»	142	58	—	—	—	—	—	—
141	57	—	—	—	322	»	141	57	»	0	»	—	—	—
140	57	—	—	—	321	»	140	58	»	0	»	—	—	—
139	58	12	0	0	320	»	139	58	»	0	»	—	—	—
139	0	»	0	0	319	»	138	59	»	0	»	»	0	0
137	59	»	0	0	318	»	137	58	»	0	»	»	0	0
136	58	»	0	0	317	»	136	59	»	0	»	»	0	0
136	0	»	0	0	316	»	135	58	»	0	»	—	—	—
134	57	»	0	0	315	»	134	58	»	0	»	»	0	0
133°	57′	12h	0m	0s	314°	0′	133°	59′	12h	0m	0s	0h	0m	0s
132	59	»	0	0	313	»	132	59	»	0	»	»	0	0
131	58	»	0	0	312	»	131	59	»	0	»	»	0	0
130	58	»	0	0	311	»	130	59	»	0	»	»	0	0
129	59	»	0	0	310	»	130	0	»	0	»	»	0	0
128	58	»	0	0	309	»	128	59	»	0	»	»	0	0
127	57	»	0	0	308	»	127	59	»	0	»	»	0	0
126	59	»	0	0	307	»	127	0	»	0	»	»	0	0
125	59	»	0	0	306	»	126	0	»	0	»	»	0	0
124	57	»	0	0	305	»	124	59	»	0	»	»	0	0
123	58	»	0	0	304	»	123	59	»	0	»	»	0	0
122	58	»	0	0	303	»	122	59	»	0	»	»	0	0
121	57	»	0	0	302	»	121	59	»	0	»	»	0	0
120	57	»	0	0	301	»	120	59	»	0	»	»	0	0
119	58	»	0	0	300	»	119	59	»	0	»	»	0	0
118	57	»	0	0	299	»	118	59	»	0	»	»	0	0

Letture dei circoli graduati movendo in declinazione

DAL PIEDE					DALL'OCULARE								
117°	58′	12h	0m	0s	298°	0′	117°	59′	12h	0m	0s	0h	0m	0s
116	58	»	0	0	297	»	116	58	»	0	»	»	0	0
115	57	»	0	0	296	»	115	58	»	0	»	»	0	0
114	58	»	0	0	295	»	114	59	»	0	»	»	0	0
113	58	»	0	0	294	»	113	59	»	0	»	»	0	0
112	59	»	0	0	293	»	112	59	»	0	»	»	0	0
111	59	»	0	0	292	»	111	59	»	0	»	»	0	0
110°	58′	12h	0m	0s	291°	0′	110°	59′	12h	0m	0s	0h	0m	0s
110	0	»	0	0	290	»	110	0	»	0	»	»	0	0
108	59	»	0	0	289	»	108	59	»	0	»	»	0	0
107	58	»	0	0	288	»	108	0	»	0	»	»	0	0
106	58	»	0	0	287	»	106	59	»	0	»	»	0	0
105	58	»	0	0	286	»	105	59	»	0	»	»	0	0
104	58	»	0	0	285	»	104	59	»	0	»	»	0	0
103	57	»	0	0	284	»	103	59	»	0	»	»	0	0
102	59	»	0	0	283	»	102	59	»	0	»	»	0	0
101	59	»	0	0	282	»	102	0	»	0	»	»	0	0
100	58	»	0	0	281	»	100	59	»	0	»	»	0	0
99	58	»	0	0	280	»	99	58	»	0	»	»	0	0
99	0	»	0	0	279	»	99	0	»	0	»	»	0	0
97	59	»	0	0	278	»	98	0	»	0	»	»	0	0
96	59	»	0	0	277	»	96	59	»	0	»	»	0	0
95	59	»	0	0	276	»	95	59	»	0	»	»	0	0
94	58	»	0	0	275	»	94	58	»	0	»	»	0	0
93	59	»	0	0	274	»	94	0	»	0	»	»	0	0
92	58	»	0	0	273	»	93	0	»	0	»	»	0	0
91	57	»	0	0	272	»	91	58	»	0	»	»	0	0
90	59	»	0	0	271	»	91	0	»	0	»	»	0	0
89	58	»	0	0	270	»	89	59	»	0	»	»	0	0
88	58	»	0	0	269	»	88	59	»	0	»	»	0	0
87	59	»	0	0	268	»	88	0	»	0	»	»	0	0
86	58	»	0	0	267	»	86	59	»	0	»	»	0	0
85	58	»	0	0	266	»	85	59	»	0	»	»	0	0
84	58	»	0	0	265	»	84	59	»	0	»	»	0	0

Letture dei circoli graduati movendo in declinazione

DAL PIEDE					DALL'OCULARE								
83°	58′	12h	0m	0s	264°	0′	83°	59′	12h	0m	0s	0h	0m	0s
83	0	»	0	0	263	»	83	0	»	0	»	»	0	0
82	0	»	0	0	262	»	82	0	»	0	»	»	0	0
81	0	»	0	0	261	»	81	0	»	0	»	»	0	0
79	58	»	0	0	260	»	80	0	»	0	»	»	0	0
79°	0′	12h	0m	0s	259°	0′	79°	0′	12h	0m	0s	0h	0m	0s
78	0	»	0	0	258	»	78	0	»	0	»	»	0	0
76	59	»	0	0	257	»	77	0	»	0	»	»	0	0
75	59	»	0	0	256	»	76	0	»	0	»	»	0	0
75	0	»	0	0	255	»	75	0	»	0	»	»	0	0
73	55	»	0	0	254	»	74	0	»	0	»	»	0	0
72	59	»	0	0	253	»	73	0	»	0	»	»	0	0
71	58	»	0	0	252	»	71	59	»	0	»	»	0	0
71	0	»	0	0	251	»	71	0	»	0	»	»	0	0
70	0	»	0	0	250	»	70	0	»	0	»	»	0	0
68	58	»	0	0	249	»	69	0	»	0	»	»	0	0
68	0	»	0	0	248	»	68	0	»	0	»	»	0	0
66	59	»	0	0	247	»	67	0	»	0	»	»	0	0
65	58	»	0	0	246	»	60	0	»	0	»	»	0	0

L'Accademico Segretario
A. Sobrero.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 7 Febbraio 1886 . . . . . *Pag.* 221

BIZZOZERO — Relazione sulla Memoria del Dott. Piero GIACOSA *Su di un ricettario del secolo* XI *esistente nell'Archivio capitolare d'Ivrea* . . . . . » 223

DORNA — Nozioni intorno all'equatoriale con refrattore Merz, di 30 centimetri d'apertura e metri 4 $^1/_2$ di distanza focale – Nota seconda . . . . . » 225

ADUNANZA del 21 Febbraio 1886 . . . . . » 234

BASSO — Commemorazione di Giulio JAMIN . . . . . » 236

G. MAZZARA — Trasformazione del timol in carvacrol . . . . . » 238

MAZZARA e DISCALZO — Bromoderivati del timol, del timochinone e dell'ossitimol . . . . . » 244

DORNA — Nozioni intorno all'equatoriale con refrattore Merz, di 30 centimetri d'apertura e metri 4 $^1/_2$ di distanza focale – Nota terza . . . . . » 247

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXI, DISP. 4ª (*Marzo* 1886)

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

—

Marzo

1886

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE
ECONOMATO
TORINO

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 7 Marzo 1886.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ARIODANTE FABRETTI
VICEPRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Fabretti, Vicepresidente, Lessona, Dorna, Bruno, Gibelli e Basso, che, in assenza del Socio Sobrero, fa le veci di Segretario.

Il Presidente scusa l'assenza del Socio Cossa, Direttore della Classe, che dovette recarsi fuori di Torino.

Vien letto l'atto verbale dell'adunanza precedente, che è approvato.

Viene in seguito comunicata alla Classe una lettera del Dottore C. Winkler di Freiberg (Sassonia) in data del 21 scorso febbraio, nella quale lo scrivente annunzia in poche parole la scoperta da lui fatta di un nuovo corpo elementare analogo all'arsenico ed all'antimonio. Questo corpo, a cui lo scrivente impone il nome di *germanium*, sarebbe stato trovato in una specie minerale, detta *argyradis*, per la prima volta studiata da Weisbach, la quale consterebbe di rame, di zolfo, e di *germanium*. La Classe prende atto della comunicazione, e delibera che se ne ringrazi l'autore.

Viene accolto per la pubblicazione negli *Atti* un lavoro del Dott. O. MATTIROLO, presentato dal Socio GIBELLI: *Sullo sviluppo di due nuovi Hypocreacei e sulle spore bulbilli degli Ascomiceti.*

Il Socio DORNA presenta, come seguito di un'altra precedente sullo stesso argomento, una sua Nota che ha per titolo: *Ricerche per riconoscere se la deviazione della mira meridiana dell'Osservatorio di Torino a Cavoretto dal piano del meridiano è sensibilmente nulla come nel* 1828.

Il Socio LESSONA presenta una Memoria del signor Carlo POLLONERA, col titolo: *Molluschi fossili post-pliocenici del contorno di Torino.* Desiderando l'autore che questo suo lavoro sia accolto nei volumi delle *Memorie*, viene nominata una Commissione, cui si dà l'incarico di esaminarla e riferirne in una prossima adunanza.

LETTURE

SULLO SVILUPPO
DI DUE
NUOVI HYPOCREACEI
E SULLE
SPORE-BULBILLI DEGLI ASCOMICETI

del sig. Dott. O MATTIROLO
presentato dal Socio Prof. G. GIBELLI

Studiando unitamente al chiarissimo Prof. G. Gibelli i funghi parassiti delle castagne (1) in rapporto specialmente alla eziologia della malattia dell'Inchiostro e alla presenza sulle Cupulifere delle ora così dette *Mycorrhizae*, tra le molteplici forme che rinvenni, ho notato comune lo *Stysanus Stemonitis* CORDA accom-

(1) Oltre ai qui descritti furono sinora trovati sulle castagne (buccie dei semi) dal Prof. GIBELLI, dal Dott. MORINI e dal sottoscritto le specie seguenti:

Heliscus lugdunensis SACC. et TH.	(GIBELLI	e MORINI).
Mucor racemosus FRIES	»	»
Trichothecium roseum FRIC.	(GIBELLI	e MATTIROLO).
Trichoderma viride PERS.	»	»
Micrococcus prodigiosus EHR.	»	»
Verticillum epimyces BET. BR.	»	»
Rhizopus nigricans DE BY.	»	»
Botrytis vulgaris PERS.	»	»
Melanospora stysanophora MATTIROLO nov. sp.	»	»
Melanospora Gibelliana MATTIROLO nov. sp.	»	»
Volutella ciliata FRIES.....	»	»
Echinobotryum atrum CORDA	»	»
Eurotium aspergillus glaucus DE BY ...	»	»
Penicillum glaucum LINK	»	»
Stysanus stemonitis CORDA (nel ciclo della Melanospora)	»	»

pagnato da minutissimi Peritecii, appartenenti a due nuove forme di Hypocreacei.

La frequenza di questi funghi mi decise a studiarne la storia di sviluppo per sorprendere le relazioni che eventualmente potessero esistere fra di essi; tanto più che conoscevo numerosi i tentativi già fatti, ma non riusciti (Reinke, Berthold) per scoprire la forma ascofora dello *Stysanus*.

I risultati di questo studio, che durò ad intervalli oltre a tre anni consecutivi, furono soddisfacentissimi, tanto che mi inducono ora a farli sommariamente di pubblica ragione, prima di svilupparli in un lavoro speciale illustrato da tavole adatte.

Le forme studiate non erano ancora note nella scienza, come, oltre ai confronti ed agli studii, mi autorizzano a ritenere i pareri dei due sommi micologi Saccardo e Passerini — e furono raggruppate nel gen. Melanospora fra le *Hypocreaceae-Phacosporeae* considerandolo nel più ampio significato che gli si può oggi attribuire.

Le colture vennero tentate in liquidi e mezzi diversissimi. La decozione di fimo, convenientemente preparata e sterilizzata, si dimostrò adattatissima. — Le colture furono seguite in parte nella camera umida (De-Bary) e in parte in goccia libera dove riescono meglio; esse furono apparecchiate con ben diretto metodo di frazionamento.

Alle due Melanospore pleomorfe, di cui riassumerò brevemente il ciclo di sviluppo, vennero rispettivamente dati i nomi di MELANOSPORA STYSANOPHORA *Mattirolo* e di MELANOSPORA GIBELLIANA *Mattirolo*. Il primo nome specifico ricorda la forma conidiale più importante; il secondo vorrei valesse in certo qual modo ad esprimere al chiarissimo Prof. G. Gibelli, col quale

---

Quindi specie non ancora determinate dei generi:

Melanospora CORDA	(GIBELLI e MATTIROLO).	
Fusarium LINK ...	»	»
Stilbum TODE ...	»	»
Sepedonium LINK ..	»	»
Acladium LINK....	»	»
Pestalozzia DE NOT.	(GIBELLI e MORINI).	
Verticillum LINK ..	»	»
Heliscus SACC.	»	»
Fusarium LINK ...	»	»
Coremium LINK ...	»	»

furono anzi fino alla formazione degli *Stysanus* condotti queste ricerche, la mia riconoscenza per l'incoraggiamento, i consigli e gli aiuti da lui così amorevolmente concessimi nel lungo corso di questi studii.

Melanospora stysanophora Nobis.

I. Forma conidiale (*Acladium* Linck). — Se si prendono le spore mature provenienti dal peritecio della *M. stysanophora* e si portano in una goccia di decozione di fimo, dopo un periodo di tempo che può variare dalle 12 alle 24 ore, a seconda delle circostanze, si osservano già i primi stadii di germinazione.

Il micelio ialino a contenuto granulare che ne risulta va quindi rapidamente sviluppandosi, presentando frequenti ramificazioni, all'apice delle quali si formano i conidii.

La produzione della prima forma appartenente al ciclo di questa specie, si fa secondo il tipo simpodiale, cioè, formato un conidio, lateralmente al suo punto di inserzione, il ramuscolo si allunga per un tratto brevissimo; il conidio già formato viene portato da un lato, ed uno nuovo viene ad occupare l'apice del rametto prolungato. — Successivamente in questo modo si formano nuovi conidii. Gli internodii possono essere quivi più o meno sviluppati e dànno perciò ragione degli aspetti differenti secondo cui si manifesta detta forma conidifera. Quando le colture sono mantenute in un ambiente eccessivamente umido, allora per capillarità si ha deposito di una goccia di acqua all'apice del rametto; e in essa rimangono inglobati i conidietti.

In alcuni casi alcuni filamenti micelici conidiferi escono dal liquido di coltura, si riuniscono assieme, dando luogo a produzioni che per alcuni riguardi si possono paragonare alla forma *Stysanus*.

I conidii hanno circa 9-12 micromill. diam. long., e circa 6 microm. diam. bas., sono cuneiformi, ialini, glaucescenti, capaci di germinare e si possono qualificare nel gen. *Acladium* Link di cui formerebbero una specie assolutamente nuova.

II. Forma conidiale (*Stysanus* Corda). — Questa forma fasciata ha origine sui rami micelici provenienti direttamente dalle spore della Melanospora, o sui rami che già portarono gli *Acladium*. — Un rametto laterale che si erige perpendicolarmente al *sub-*

stratum e che in breve acquista un diametro molto maggiore di quello da cui trasse origine, forma il punto di partenza di questa nuova formazione conidifera, assai più abbondante della prima. — Il ramo o asse primitivo si setta per siparii trasversali in tanti articoli dai quali hanno origine i rami corticanti. Questi assieme riuniti, adpressi all'asse, formano poi lo stipite della nuova produzione, e sono capaci di allungarsi per una specie di apice vegetativo, formato dall'apice dei rami corticanti, e dalla terminazione dell'asse centrale che a poco a poco allungandosi non è più differenziabile. — L'allungamento dello stipite ha luogo così, prima secondo il tipo intercalare, poi si fa limitato all'apice nel modo sommariamente indicato.

I filamenti corticanti che si volgono verso la base raggiano sul *substratum* e servono come rizoidi a rendere fisso e a nutrire l'individuo, il quale può giungere alla lunghezza anche di alcuni millimetri, e dal quale si sviluppano poi così numerosi i conidii.

I conidii limoniformi glaucescenti, trasparenti, si sviluppano sulla parte apicale dello stipite in vario modo conformata (capitata o cilindrica), misurano circa 9 micromill. in lunghezza, mentre la loro maggior larghezza è di 6 micromill. circa. Essi possono staccarsi appena formati, o rimanere riuniti a mo' di coroncine.

Lo *Stysanus* formato da uno stipite risultante dalla fasciazione di molti filamenti, può variamente ramificarsi come si osserva abbastanza frequentemente nelle colture.

In alcuni casi la sua formazione si arresta allo stato rudimentale, e allora i conidii vengono portati direttamente dall'asse principale che può essere settato, o presentare alcune ramificazioni laterali terminanti pure con catene di conidii.

Lo *Stysanus* appartenente al ciclo di sviluppo della *Melanospora stysanophora* Nob. si può identificare collo *Stysanus Stemonitis* Corda; le forme capitate o ramose si possono rispettivamente riportare alle varietà *capitatus* Reinke e Berthold, *ramosus* Eichelbaum.

Macroconidii. — I signori Reinke e Berthold descrissero ancora come appartenente al ciclo di sviluppo dello *Stysanus Stemonitis* Corda l'*Echinobotryum atrum* Corda. Questa specie, frequente sopra i più disparati substrati, vive parassita sugli stipiti degli *Stysanus*, ma non risultò avere con esso alcuna relazione di sviluppo.

III. Forma ascofora o periteciale (*Melanospora*). — Il Peritecio può avere origine sui filamenti che partono dalle spore, o mediatamente può svilupparsi sopra filamenti micelici che portarono già altre forme conidiali.

L'ascogono estremamente minuto si sviluppa da un'ifa sola in una spirale a due o tre giri. — I filamenti corticanti o pollinodici hanno origine dal pedicello che porta le spire. Non si ha indizio di una fusione di plasma consecutiva ad una perforazione delle pareti dell'ascogono e del pollinodio (?) e quindi, secondo gli attuali criterii, la forma periteciale in questa Melanospora rappresenterebbe un apparato apogamo apandrico.

La corticazione da cui procede la parete periteciale si fa per divisione delle ife corticanti; divisione che ha luogo dapprima in senso perpendicolare all'ascogono, poi in direzioni diverse. — Dalla parete così formata si svolgono numerosi filamenti rizoidali, parafisi e perifisi, le quali ultime sporgono da un collo relativamente breve.

Le ife ascogene si dividono prima in articoli poco numerosi per mezzo di sepimenti trasversali all'asse; e da questi, per nuovi siparii, si forma un *gomitolo* pseudoparenchimatoso centrale dal quale poi in ultimo hanno origine gli aschi.

La parete periteciale, a maturanza, ha colore fosco-subferrugineo. Il diametro maggiore longitudinale del peritecio uguaglia circa 180 a 200 microm., mentre il diametro trasversale non arriva ai 150 microm. -- Gli aschi sono ovato-elittici, le spore vi sono contenute in numero di 8. Hanno colore giallo, sono elittiche, trasparenti, un po' più convesse da uno dei lati.

Riassumendo abbiamo nel ciclo di sviluppo della *Melanospora stysanophora* Nob. le seguenti forme:

Forme conidiali { 1° *Acladium* Linck.
2° *Stysanus* Corda.

Forma ascofora.... *Melanospora* Corda.

I. Gli *Acladium* coltivati riprodussero *Acladium* e *Stysanus*.

II. Gli *Stysanus* si riprodussero per un numero indeterminato di volte sempre sviluppando *Acladium* e *Stysanus*.

III. Dalle spore della *Melanospora* si ottennero invece le tre forme metagenetiche.

La frase diagnostica si potrebbe stabilire nel seguente modo:

Melanospora stysanophora Mattirolo.

Huius speciei cyclo hae formae pertinent:

Forma conidiophora I. (Acladium Linck.). — *Filamenta ramosa septata hyalina, ramulis conidiferis raro iterum ramificatis, irregulariter ab illis nascentibus. Conidia numerosa cuneiformia ad typum simpodiale, vario numero* 1 *ad* 8, *se se evolventia, a ramulorum vertice nascuntur. Non raro si in aëre humidissimo coluntur, guttula aquea inclusa.*

Max. diam. 9-12 microm. circa.
Min. diam. 6 »

Forma conidiophora II. (Stysanus Corda). — *Stipites simplices vel ramificati, fusci-atri fibrosi super iam memorata filamenta insidentes — Conidia in capitulum cylindricum vel obconicum abeuntes, limoniformia, catenulata vel simplicia, glaucescentia diaphana.*

Max. diam. 8-9 microm.
Min. diam. 6 »

III. Forma ascophora (Melanospora Corda). — *Perithecium gregarium minutum membranaceum superficiale, simplex non bissisedum, sine vitro visu non facile, collo brevi apice penicillato, subhyalinum dein fuscum-ferrugineum — Asci ovato-elliptici,* 8 *sporas continentes, tenerrimi, poene fluentes — Sporae ochraceae fere ellipticae, in unum latus elatiores, e collo Perithecii emittuntur.*

Sporae Max. diam. 9-10 microm.
» Min. diam. 5-6 »

Melanospora Gibelliana Mattirolo.

Questo nuovo hypocreaceo (1), che trovai pure abbondante sulle buccie delle castagne guaste, ripetutamente coltivato non

(1) Per i suoi caratteri sta vicino alla *Melanospora Zamiae*, descritta e figurata dal Corda, *Icones Fungorum*, tom. I, pag. 24, tav. VII, fig. 297 A.

diede i risultati che ottenni dallo studio della prima specie. Quantunque io non abbia potuto osservare completa la sua evoluzione, pure dal suo sviluppo giunsi alla conoscenza di fatti particolarmente interessanti nel presente stadio evolutivo della scienza.

Spore-bulbilli. — Fatte germinare le spore di questa Melanospora in decozione di fimo, dopo 18 a 24 ore in media si osservano i primi stadii di germinazione, dai quali ha origine un micelio rigogliosamente ramificato su cui dopo alcuni giorni si nota la presenza di produzioni curiose, che incontravo in natura frequentissime sulle castagne e di cui, per quanto avessi ricercato, non sapevo spiegare il valore; produzioni che Karsten (1865) ed Eidam (1883) ritenevano rappresentanti di generi speciali.

La produzione di queste forme ha luogo sopra i filamenti micelici provenienti dalle spore e generalmente in vicinanza a queste.

Dopo un periodo di tempo variabile (in media tre o quattro giorni dalla semina) si sviluppano sui filamenti micelici delle bozze, dei rigonfiamenti perfettamente paragonabili agli inizi degli Ascogoni. — Queste bozze si svolgono in modi svariatissimi, — dapprima limitate ad uno o più rigonfiamenti successivi, si svolgono poi in rametti sui quali si formano a verticilli o in ordine sparso nuovi rigonfiamenti, o direttamente dai primi ne hanno origine dei nuovi in grande quantità. Le bozze secondarie grado grado avvolgono le prime, cosicchè per risultato si hanno tanti piccoli grumi, tanti gomitoli bernoccoluti irregolarmente conformati, aventi dimensioni differentissime.

Dentro a questi gomitoli si differenziano presto una o più cellule, che fattesi ricche in plasma si attorniano di membrana e restano così avvolte dal complesso delle bozze esterne, le quali per mezzo di sepimenti sottili perpendicolari o tangenziali agli elementi interni formano loro una parete parenchimatosa a cellule poligonali.

Le cellule esterne gradatamente si colorano in giallastro (ocraceo), si vuotano di plasma e costituiscono nell'insieme un involucro paragonabile a quello dei periteci normali giovani.

Salve le dimensioni, il numero degli elementi, il pedicello che le porta, si possono in questo stadio assomigliare alle spore delle *Tuberaceae* (*T. Borchii*, *magnatum*, ecc., ecc.) o a quelli ammassi di spore che sono caratteristici di alcune *Ustilagineae* (*Sorosporium-Tubercinia Urocystis*, ecc., ecc.).

Quando la corticazione è formata, così come è stato accennato, i gomitoli si arrestano nello sviluppo, nè per quanto si faccia, si sorprendono ulteriori modificazioni.

Conidii. — Mentre ha luogo la formazione di questi apparecchi apogami, si nota pure sugli stessi filamenti, o sopra filamenti vicini, lo sviluppo simultaneo di speciali abbondanti sterigmi, un po' turgidi alla base, dai quali si svolgono numerosissimi conidietti catenulati.

Tali conidietti si osservano per un periodo di alcuni giorni solamente, hanno dimensioni estremamente minute (2 microm. circa) e si trovano pure in vicinanza ai gomitoli; però non ne accompagnano sempre la formazione, la quale pure ottenni completa senza che si potesse in alcun modo notare la loro presenza.

Pensai che i conidii in discorso dovessero essere riguardati come elementi fecondatori analoghi agli spermazii o a forme già osservate e descritte in altri ascomiceti; ma per quanto intensamente ne seguissi il loro sviluppo, non riuscii a sorprendere una relazione qualunque tra le due forme.

I conidii cadono nel liquido di coltura, nè pure coltivati sono capaci di germinare (1) o di modificarsi. Rappresentano forse apparati rudimentali analoghi a forme già note in altri ascomiceti (*Peziza*, *Chaetomium*, ecc., ecc.). I gomitoli che, portati in nuovo liquido di coltura, *sono capaci di germinare* riproducendo le forme descritte, si formano adunque senza che sia possibile sorprendere un atto sessuale, quale i criterii di omologia farebbero supporre.

Essi rappresentano nel campo della micologia apparecchi apogami speciali, paragonabili a quelli da tempo conosciuti nelle crittogame superiori e nelle fanerogame, sotto il nome di Bulbilli.

Questi *bulbilli* (Eidam) o *spore-bulbilli*, come li chiameremo, simili a periteci giovani (periteci rudimentali, abortiti?) prendono il posto di periteci e servono così a propagare la specie (2).

Le spore-bulbilli della nostra Melanospora Gibelliana si possono identificare colle forme descritte da Karsten e Preuss illustrate diligentemente dall'Eidam nei generi *Helicosporangium* e *Papulaspora*.

---

(1) Forse non ho trovato il mezzo o il tempo adatti al loro sviluppo.

(2) In condizioni speciali possono forse sviluppare la forma ascofora.

I bulbilli che caratterizzano questi generi rappresentano perciò forme secondarie appartenenti al ciclo di sviluppo di speciali ascomiceti non ancora conosciuti.

L'*Helicosporangium* e la *Papulaspora* che il De-Bary ancora nel 1884 classificava fra gli « *zweifelhaften Ascomyceten* » sono adunque oggi da ritenersi non più come forme autonome, cui, secondo Eidam, dovesse essere riservata una particolare posizione nella classificazione, ma come forme evolutive di veri e tipici ascomiceti forniti di peritecio e di spore assolutamente normali.

Clamidospore. — Nelle sue ricerche il signor Eidam descrive come appartenente alla *Papulaspora* speciali Clamidospore. — Nelle mie colture, non rare volte mi avvenne di incontrare tali forme che ho coltivato e riprodotto, ma per quanto mi adoperassi non ho potuto indiscutibilmente stabilire l'origine loro e la relazione che gli studii dell'Eidam mi indurrebbero a credere debbano essi avere colla Melanospora.

Finalmente devo qui ancora avvertire, che sopra le castagne incontrai ancora un'altra forma di spora-bulbillo appartenente forse ad un Hypocreaceo che trovai in pochi esemplari, e che oltre alle citate Clamidospore, ne rinvenni altre tre forme che saranno diligentemente descritte.

Le forme osservate si possono adunque riassumere nelle seguenti frasi diagnostiche.

Melanospora Gibelliana Mattirolo.

Perithecium gregarium minutum, oculis poene visibile, colore ochraceo-ferrugineo parietibus translucidis collo oblungato — Asci elliptici 8 sporas continentes Sporae maiores olivaceae fuscae utrinque leviter apiculatae.

Sporae Maxim. diam. 21 a 25 microm.
» Minim. » 15 »

Huius speciei cyclo hae formae pertinent:

Sporae-bulbilli. — *Hae sporae formantur ex una aut pluribus cellulis plasmate abundantibus, quae ab aliis cellulis ochraceis, plasmate carentibus, quasi involucro continentur. Hae sporae germinandi vim habent et possunt similes reddere formas.*

CONIDIA. — *Minima (2 microm. diam.) catenulata in ramulis exillissimis ad basem turgidulis nascentia. Ramuli aut verticillati aut utcumque in filamento insident.*

CLAMIDOSPORÆ. — *Hanc formam, jam ab* Eidam *in simili specie observatam, inveni; sed huic speciei attineat aut minus iudicare non ausim.*

Dal Laboratorio di Botanica della R. Università.
Torino, 6 febbraio 1886.

RICERCHE

per riconoscere se la deviazione della mira meridiana dell'Osservatorio di Torino a Cavoretto dal piano del meridiano è sensibilmente nulla come nel 1828

del Socio Prof. Alessandro Dorna

NOTA SECONDA.

In una Nota *Sulla mira di Cavoretto*, presentata il 13 dicembre, ho dato la formola esatta per dedurre l'Azimuth della mira dalla sua altezza e dalle costanti dello strumento dei passaggi: avvertendo essere necessario nell'applicarla, che il filo di cui si ha la costante di collimazione, sia al centro della immagine della mira, oppure devii da quel centro di un angolo conosciuto. Nella Nota che presento oggi applico alla ricerca di quell'Azimuth alcune osservazioni da me fatte, il 5 agosto dell'anno passato, col filo di mezzo del reticolo al centro dell'immagine della mira.

Nel mattino del 5 agosto 1885, colla vite di richiamo con cui si muove ad Est in Azimuth l'asse di rotazione del cannocchiale del circolo meridiano, condussi il filo di mezzo del reticolo di nove fili al centro dell' immagine della mira, e nella sera dello stesso giorno osservai otto stelle, facendomi registrare i tempi dei passaggi dallo studente C. B. col pendolo siderale Dent. Le osservazioni sono contenute nella seguente tabella (*Pag.* 284).

La ricerca delle tre costanti strumentali a, b, c contenute nella formola della mira richiede: 1° che si applichi ad α la correzione per la aberrazione diurna:

$$0^s,021 \cos \varphi \sec \delta \qquad \ldots [1]$$

in cui φ è la latitudine dell'Osservatorio; 2° che si deduca dal medio T_m il tempo del passaggio al filo di mezzo:

$$T = T_m + \Delta i \sec \delta \qquad \ldots [2]$$

Strumento col circolo ad Ovest.

Stelle	ε Aquilae	ζ Aquilae	δ Aquilae	h^3 Sagittarii	α Aquilae	θ Aquilae	α^2 Capricorni	α Cygni
Grandezze	4ª	3ª	3ª-4ª	5ª-4ª	1ª-2ª	3ª	3ª-4ª	2ª-1ª
Declinazione δ	14° 55′	13° 42′	2° 53′	— 25° 8′	8° 34′	— 1° 9′	— 12° 54′	44° 52′
Tempi del pendolo siderale Dent negli istanti dei passaggi ai nove fili — I	18h52m41s,3	18h58m26s,4	19h17m59s,9	19h27m58s,5	19h43m27s,9	20h 3m40s,4	20h 9m59s,1	20h35m36s,3
II	49,0	33,5	18 7,8	28 6,9	36,0	48,3	10 6,5	48,0
III	56,9	40,6	15,4	15,4	43,4	56,0	14,2	58,8
IV	53 4,8	48,0	22,9	23,5	51,0	4 3,4	21,5	36 8,9
V	11,9	55,3	29,9	31,0	58,3	10,2	28,9	19,2
VI	18,9	59 2,0	36,5	38,9	44 4,8	17,3	36,0	29,1
VII	26,4	9,7	44,0	46,7	12,4	24,5	43,5	39,3
VIII	33,8	17,4	50,9	54,9	19,5	31,9	50,8	49,2
IX	42,5	25,3	59,8	29 3,5	28,2	40,3	59,4	37 0,8
Media T_m	18h53m11s,72	18h58m55s,36	19h18m29s,68	19h28m31s,03	19h43m57s,94	20h 4m10s,26	20h10m28s,88	20h36m18s,84
Ascension retta α	18 54 27,00	19 0 10,31	19 19 45,00	19 29 45,97	19 45 13,41	20 5 25,39	20 11 43,65	20 37 34,11
$\alpha - T_m$	1 15,28	1 14,95	1 15,32	1 14,94	1 15,47	1 15,13	1 14,77	1 15,27
$T_m - 19^h\ 45^m$	— 51 48,28	— 46 4,64	— 26 30,32	— 16 28,97	— 1 2,06	+ 19 10,26	+ 25 28,88	+ 51 18,84

per il quale Δi, eguale ad una frazione di secondo, è la media degli intervalli fra il filo di mezzo ed i fili laterali; 3° che si aggiunga a T:

$$(T - T_0)\,\delta T \qquad \ldots [3]$$

essendo δT il piccolo ritardo orario, supposto costante e conosciuto, del pendolo, e T_0 il tempo arbitrario, poco diverso da T, della correzione ΔT_0 del pendolo, incognita da trovarsi con a, b, c.

Ciò posto, nell'ipotesi, applicabile al nostro circolo meridiano, che queste tre costanti sieno abbastanza piccole, e facendo:

$$\Delta T_0 = 75^s + x \qquad \ldots [4]$$

affinchè pei valori di $\alpha - T_m$ risulti anche piccolo x, si possono dedurre le quattro incognite x, $y(=a)$, $z(=b)$, $u(=c)$ col metodo dei minimi quadrati, applicando a ciascuna delle otto stelle l'equazione di condizione:

$$x + \frac{\operatorname{sen}(\varphi - \delta)}{\cos\delta}\,y + \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos\delta}\,z + \frac{1}{\cos\delta}\,u + n = 0 \qquad \ldots [5]$$

in cui:

$$n = 75^s - (\alpha - T_m) + (\Delta i - 0^s,021 \cos\varphi)\sec\delta + (T - T_0)\,\delta T \ldots [6]$$

e si può, senza errore sensibile, porre T_m invece di T nell'espressione [3]. Ho eseguito questi calcoli e ne trascrivo quanto mi pare che basti a dimostrare i risultamenti ottenuti.

Il pendolo Dent dal mezzodì vero del 5 al mezzodì successivo avendo ritardato regolarmente di $0^s,62$, ho fatto $\delta T = 0^s,0258$, ed in riguardo ai tempi in cui sono state osservate le otto stelle posi: $T_0 = 19^h\,45^m$. La latitudine dell'Osservatorio essendo di $45°\,4'\,8''$ risulta: $0^s,021 \cos\varphi = 0^s,015$. Dedussi Δi dalle otto stelle e mi risultò: $0^s,110$, un po' maggiore di quello trovato alla Specola con molte stelle, ma che deriva dalle stesse osservazioni da cui deduco l'Azimuth, la qual cosa, ripetuta in altre determinazioni, darà Δi affetto da errori accidentali che si elideranno nel risultamento generale.

Riunisco nel seguente quadro i calcoli fatti per Δi colla nota formola:

$$i = I \cos\delta\,.$$

δ	14 55′	13 41′	2° 53′	− 25
cos δ	9,98511	9,98746	9,99945	9,95
I_1	$30^s,6$	$28^s,9$	$30^s,0$	3
log I_1	1,48572	1,46090	1,47712	1,51
log i_1	1,47083	1,44836	1,47657	1,46
i_1	$29^s,569$	$28^s,078$	$29^s,963$	29^s
I_2	$22^s,9$	$21^s,8$	$22^s,1$	2
log I_2	1,35984	1,33846	1,34439	1,38
log i_2	1,34495	1,32592	1,34384	1,33
i_2	$22^s,128$	$21^s,180$	$22^s,072$	21^s,
I_3	$15^s,0$	$14^s,7$	$14^s,5$	1
log I_3	1,17609	1,16732	1,16137	1,19
log i_3	1,16120	1,15478	1,16082	1,14
i_3	$14^s,494$	$14^s,282$	$14^s,482$	14^s,
I_4	$7^s,1$	$7^s,3$	$7^s,0$	
log I_4	0,85126	0,86332	0,84510	0,87
log i_4	0,83637	0,85078	0,84455	0,83
i_4	$6^s,861$	$7^s,092$	$6^s,991$	6^s,
I_6	$-7^s,0$	$-6^s,7$	$-6^s,6$	−
log I_6	n 0,84510	n 0,82607	n 0,81954	n 0,89
log i_6	n 0,83021	n 0,81353	n 0,81899	n 0,85
i_6	$-6^s,764$	$-6^s,509$	$-6^s,592$	-7^s
I_7	$-14^s,5$	$-14^s,4$	$-14^s,1$	− 1
log I_7	n 1,16137	n 1,15836	n 1,14922	n 1,19
log i_7	n 1,14648	n 1,14582	n 1,14867	n 1,15
i_7	$-14^s,011$	$-13^s,990$	$-14^s,082$	-14^s
I_8	$-21^s,9$	$-22^s,1$	$-21^s,0$	− 2
log I_8	n 1,34044	n 1,34439	n 1,32222	n 1,37
log i_8	n 1,32555	n 1,33185	n 1,32167	n 1,35
i_8	$-21^s,162$	$-21^s,471$	$-20^s,973$	-21^s
I_9	$-30^s,6$	$-30^s,0$	$-29^s,9$	− 3
log I_9	n 1,48572	n 1,47712	n 1,47567	n 1,51
log i_9	n 1,47083	n 1,46458	n 14,7512	n 1,46
i_9	$-29^s,569$	$-29^s,146$	$-29^s,862$	-29^s
	i_1	i_2	i_3	
Medie	$29^s,543$	$21^s,887$	$14^s,387$	7^s

$[i] = 72^s,850 - 71^s,860 = 0,9$

8° 33′	— 1° 9′	— 12° 54′	44° 52′
9,99513	9,99991	9,98890	9,85049
30ˢ,4	29ˢ,8	29ˢ,8	42ˢ,9
1,48287	1,47422	1,47422	1,63246
1,47800	1,47413	1,46312	1,48295
30ˢ,061	29ˢ,794	29ˢ,048	30ˢ,405
22ˢ,3	21ˢ,9	22ˢ,4	31ˢ,2
1,34830	1,34044	1,35025	1,49415
1,34343	1,34035	1,33915	1,34464
22ˢ,051	21ˢ,895	21ˢ,835	22ˢ,113
14ˢ,9	14ˢ,2	14ˢ,7	20ˢ,4
1,17319	1,15229	1,16732	1,30963
1,16832	1,15220	1,15622	1,16012
14ˢ,734	14ˢ,197	14ˢ,329	14ˢ,458
7ˢ,3	6ˢ,8	7ˢ,4	10ˢ,3
0,86332	0,83251	0,86923	1,01284
0,85845	0,83242	0,85813	0,86333
7ˢ,219	6ˢ,799	7ˢ,213	7ˢ,300
— 6ˢ,5	— 7ˢ,1	— 7ˢ,1	— 9ˢ,9
0,81291	*n* 0,85126	*n* 0,85126	*n* 0,99564
0,80804	*n* 0,85117	*n* 0,84016	*n* 0,84613
— 6ˢ,428	— 7ˢ,099	— 6ˢ,921	— 7ˢ,017
— 14ˢ,1	— 14ˢ,3	— 14ˢ,6	— 20ˢ,1
1,14922	*n* 1,15534	*n* 1,16435	*n* 1,30320
1,14435	*n* 1,15525	*n* 1,15325	*n* 1,15369
— 13ˢ,943	— 14ˢ,297	— 14ˢ,231	— 14ˢ,246
— 21ˢ,2	— 21ˢ,7	— 21ˢ,9	— 30ˢ,0
1,32634	*n* 1,33646	*n* 1,34044	*n* 1,47712
1,32147	*n* 1,33637	*n* 1,32934	*n* 1,32761
— 20ˢ,964	— 21ˢ,696	— 21ˢ,347	— 21ˢ,262
— 29ˢ,9	— 30ˢ,1	— 30ˢ,5	— 41ˢ,6
1,47567	*n* 1,47857	*n* 1,48430	*n* 1,61909
1,47080	*n* 1,47848	*n* 1,47320	*n* 1,46958
— 29ˢ,567	— 30ˢ,094	— 29ˢ,730	— 29ˢ,484
i_6	i_7	i_8	i_9
— 6ˢ,810	— 14ˢ,127	— 21ˢ,314	— 29ˢ,609

= 0,110.

I calcoli relativi alle [5] e [6] sono contenuti in quest'altro qu

$\log \frac{\delta T}{3600}$ 4,85532			
$\log.(T-T_0)^4$	n 3,49252	n 3,44162	n 3,20
$\log(T-T_0)\,\delta T$	n 8,34784	n 8,29694	n 8,05
n	$-0^s,204$	$+0^s,128$	$-0^s,$
$75^\circ-(\alpha-T_m)$	$-0^s,28$	$+0^s,05$	-0
$(T-T_0)\,\delta T$	$-0,022$	$-0,020$	$-0,$
$(\Delta i-0,021\cos\varphi)\sec\delta$	0,098	0,098	0,
8,97772	8,99261	8,99026	8,97
$\log\sec\delta$	0,01489	0,01254	0,00
$\frac{1}{\cos\delta}$	1,035	1,029	1,
$\varphi-\delta$	$30^\circ\,9'$	$31^\circ\,22'$	42°
$\log\cos(\varphi-\delta)$	9,93687	9,93138	9,86
$\log\frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos\delta}$	9,95176	9,94388	9,87
$\frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos\delta}$	0,895	0,879	0
$\log\operatorname{sen}(\varphi-\delta)$	9,70093	9,71643	9,8
$\log\frac{\operatorname{sen}(\varphi-\delta)}{\cos\delta}$	9,71582	9,72893	9,8
$\frac{\operatorname{sen}(\varphi-\delta)}{\cos\delta}$	0,520	0,536	0

9518	*n* 1,79281	3,06081	3,18438	3,48838
5050	*n* 6,64813	7,91613	8,03970	8,34370
,158	− 0s,374	− 0s,027	+ 0s,338	− 0s,114
0s,06	− 0,47	− 0s,13	+ 0s,23	− 0s,27
0,007	− 0,000	+ 0,008	+ 0,011	+ 0,022
0,105	0,096	0,095	0,097	0,134
2092	8,98259	8,97781	8,98882	9,12723
4320	0,00487	0,00009	0,01110	0,14951
1,105	1,011	1,000	1,026	4,411
0° 12′	36° 30′	46° 13′	57° 58′	0° 12′
52986	9,90518	9,84006	9,72461	0,00000
57300	9,91003	9,84013	9,73571	0,14951
0,374	0,813	0,692	0,544	1,411
07353	9,77439	9,85851	9,92826	7,54291
01667	9,77924	9,85858	9,93936	7,69242
1,039	0,602	0,722	0,870	0,005

Le equazioni di condizione a cui devono soddisfare nel miglior modo le quattro incognite della [5] sono adunque queste:

$$[5'] \begin{cases} x + 0{,}520\, y + 0{,}895\, z + 1{,}035\, u - 0{,}204 = 0 \\ x + 0{,}536\, y + 0{,}879\, z + 1{,}029\, u + 0{,}128 = 0 \\ x + 0{,}672\, y + 0{,}742\, z + 1{,}001\, u - 0{,}236 = 0 \\ x + 1{,}039\, y + 0{,}374\, z + 1{,}105\, u + 0{,}158 = 0 \\ x + 0{,}602\, y + 0{,}813\, z + 1{,}011\, u - 0{,}374 = 0 \\ x + 0{,}722\, y + 0{,}692\, z + 1{,}000\, u - 0{,}027 = 0 \\ x + 0{,}870\, y + 0{,}544\, z + 1{,}026\, u + 0{,}338 = 0 \\ x + 0{,}005\, y + 1{,}411\, z + 1{,}411\, u - 0{,}114 = 0 \end{cases}$$

perciò ne dedussi (abbreviando le operazioni colla tavola dei prodotti di Crelle) le seguenti equazioni normali del metodo dei minimi quadrati:

$$\begin{aligned} 8\, x + 4{,}966\, y + 6{,}350\, z + 8{,}618\, u - 0{,}331 &= 0 \\ 4{,}966\, x + 3{,}731\, y + 3{,}293\, z + 5{,}137\, u + 0{,}017 &= 0 \\ 6{,}350\, x + 3{,}293\, y + 5{,}688\, z + 7{,}051\, u - 0{,}486 &= 0 \\ 8{,}618\, x + 5{,}137\, y + 7{,}051\, z + 9{,}401\, u - 0{,}360 &= 0\,; \end{aligned}$$

e ricavai da queste le quattro incognite separatamente col procedimento di Gauss, servendomi delle tavole di logaritmi di Wittstein per le addizioni e sottrazioni. Trascrivo qui sotto i logaritmi delle espressioni simboliche ed i rispettivi elementi che ne derivano:

$[aa] =$	8,000	0,90309								
$[ab] =$	4,966	0,69601								
$[ac] =$	6,350	0,80277								
$[ad] =$	8,618	0,93541								
$[an] =$	$-$ 0,331	n9,51983								
$[bb] =$	3,731	0,57183	$[bb.1]$	9,81181						
$[bc] =$	3,293	0,51759	$[bc.1]$	n9,81209						
$[bd] =$	5,137	0,71071	$[bd.1]$	n9,32777						
$[bn] =$	0,017	8,23045	$[bn.1]$	9,34727						
$[cc] =$	5,688	0,75496	$[cc$	0,68969	$[cc.2]$	0,62788				
$[cd] =$	7,051	0,84825	$[cd.1]$	9,32316	$[cd.2]$	n7,37713				
$[cn] =$	$-$ 0,486	n9,68664	$[cn.1]$	n9,34884	$[cn.2]$	n6,82100				
$[dd] =$	9,401	0,97317	$[dd.1]$	0,92032	$[dd.2]$	0,92032	$[dd.3]$	0,91666		
$[dn] =$	$-$ 0,360	n9,55630	$[dn.1]$	n7,53449	$[dn.2]$	8,84336	$[dn.3]$	8,84336		

C''' 6,74925 | B'' 0,00028 ; B''' 9,51670 | A' n9,79292 ; A'' n0,15073 ; A''' n0,10621

u = costante di collimazione $= -0^s,0084 = -0'',127$

z = costante di livello $= 0,0001 = 0,002$

y = costante di azimuth $= -0,3457 = -5,186$

$x = \Delta T_0 - 75^s = 0^s,26494$

(Correzione del pendolo siderale Dent a $19^h 45^m$ del 5 agosto; $\Delta T^0 = 1^m 15^s,26$.

Il pendolo, nell'istante del passaggio dal centro del Sole al medio dei fili in tal giorno, segnava $9^h 1^m 11^s,85$ e la sua correzione, per tale istante, preso dall'Assistente per mezzodì vero, risultò dall'osservazione del passaggio del Sole, nel giorno medesimo, di $1^m 14^s,82$. Avuto riguardo che nelle $10^h 43^m 48^s,15 = 10^h,75$ fra il mezzodì e l'istante per cui calcolai ΔT_0, il pendolo ritardò di $10,75 \times 0^s,0258 = 0^s,28$, la vera correzione pel mezzodì vero risultante dalle otto stelle è $1^m 14^s,98$; maggiore di $0^s,16$ della precedente, abbastanza precisa per dare l'ora alla città.

La costante di livello essendo come nulla e la costante di collimazione inferiore a due decimi di secondo, la formola dell'Azimuth della mira in funzione delle tre costanti a, b, c e della sua altezza $h = 1° 16' 26''$ si riduce ad $A - a = c$. Adunque dalle otto stelle osservate risulta che la mira devia dal meridiano, verso Ovest, di $-A = 5'', 31$.

Torino, 7 marzo 1886.

Adunanza del 21 Marzo 1886

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANGELO GENOCCHI

Sono presenti i Soci: GENOCCHI, COSSA, LESSONA, DORNA, SALVADORI, BRUNO, BERRUTI, SIACCI, D'OVIDIO, FERRARIS, NACCARI, MOSSO, SPEZIA, GIBELLI e BASSO, incaricato dell'ufficio di Segretario.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, la Classe accoglie con sensi di riconoscenza il dono fatto all'Accademia dal Socio Barone F. E. BOLLATI DI SAINT-PIERRE di parecchi volumi di scienze fisiche e naturali.

Il Presidente presenta pure in dono all' Accademia tre fascicoli del *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche* pubblicato dal Principe B. BONCOMPAGNI.

Il Socio BIZZOZERO, a nome del Socio MANNO, presenta in dono all'Accademia un volume intitolato: *Studi di clinica medica* del Dott. Salvatore SALOMONE-MARINO, già primo Assistente nella Clinica medica della R. Università di Palermo.

Si dà quindi lettura:

1° di una lettera del Socio Professore Comm. SOBRERO, Segretario della Classe, che scusa la sua assenza dovuta a ragioni di salute;

2° di una circolare del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere risguardante i temi da trattarsi per il concorso al premio della *Fondazione scientifica Cagnola* e le condizioni da soddisfarsi per concorrervi.

Il Socio COSSA presenta una Nota del Prof. M. FILETI *Sull'ortoisopropilfenol.*

Il Socio NACCARI presenta un lavoro del Prof. N. JADANZA *Sul calcolo della distanza fra due punti le cui posizioni geografiche sono note.*

Il Socio DORNA presenta:

1° Una Nota che fa seguito a due altre precedenti, intitolata: *Ricerche per riconoscere se la deviazione della mira meridiana dell'Osservatorio di Torino a Cavoretto dal piano del meridiano è sensibilmente nulla come nel* 1828.

2° Le *Osservazioni meteorologiche del R. Osservatorio di Torino, rilevate dagli strumenti registratori Hipp per cura dell'Assistente Dott. Angelo* CHARRIER, cioè:

a) *Barografo: Pressione atmosferica per ciascuna ora del giorno pei mesi di luglio, agosto e settembre* (3° *trimestre*).

b) *Termografo: Temperatura per ogni ora del giorno pei mesi di luglio, agosto e settembre* (3° *trimestre* 1885).

Il Socio BRUNO presenta un lavoro del Dott. Corrado SEGRE col titolo: *Le coppie di elementi immaginari nella geometria*

proiettiva sintetica. Anche questo lavoro è affidato ad una Commissione incaricata di esaminarlo e riferirne in una prossima adunanza, essendo desiderio dell'autore che sia pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Il Socio LESSONA, anche a nome del condelegato Socio SPEZIA, legge la seguente Relazione sopra uno studio del signor Carlo POLLONERA, intitolato: *Molluschi fossili post-pliocenici del contorno di Torino:*

« In una breve prefazione l'autore nota essere questo il primo lavoro in cui siano studiati i molluschi fossili quaternarii del Piemonte, mentre sono numerosi gli studi fatti sui fossili della medesima epoca che si trovano nelle regioni limitrofe, la Lombardia e la valle del Rodano. Accenna inoltre l'autore alle ragioni per le quali deliberò di accettare in questo suo lavoro lo smembramento del genere *Helix* proposto da alcuni malacologi.

« Viene in seguito la enumerazione delle specie delle colline di Torino e la descrizione delle forme nuove. L'autore confronta questa fauna fossile con quelle viventi oggidì in Piemonte e la dimostra analoga alla fauna che si trova presentemente nelle vallate alpine tra i 750 e i 1000 metri di altitudine. Le specie fossili enumerate sono 50, delle quali tre sole fluviatili, le altre 47 terrestri: di queste, 12 specie e 3 varietà sono estinte, e, tranne una, tutte nuove: 2 specie, tuttora viventi, non si trovano sulle nostre Alpi: tutte le altre 32 specie terrestri e le 3 fluviatili fanno parte della fauna alpestre attuale del Piemonte.

« Nella seconda parte del suo lavoro l'autore enumera le specie trovate nelle torbiere e in un deposito sabbioso presso Trana: esse sono 30, delle quali 6 terrestri e 24 lacustri, e 4 soltanto di queste specie furono trovate fossili sulle colline torinesi.

« Chiudono questo lavoro due brevi note. Nella prima è dimostrato dai caratteri anatomici dell'animale che la *Helix stri-*

gella Drap. vuol essere collocata nel genere o sottogenere *Fruticicola* e non in quello *Eulota*, come sogliono fare oggidì molti malacologi. Nella seconda si esaminano le specie del genere *Xerophila* viventi attualmente nelle Alpi piemontesi, affine di rendere meglio evidente il valore delle forme di questo genere trovate fossili sulle colline di Torino.

« Questo lavoro è accompagnato da una tavola di disegni fatti dallo stesso autore.

« I Commissari ne propongono alla Classe la lettura »

LETTURE

RICERCHE SULL' ORTOISOPROPILFENOL

del Prof. M. Fileti
presentate dal Socio Prof. Alfonso Cossa

Or sono alcuni anni, in una nota preliminare sopra il cumofenol (isopropilfenol) ottenuto per l'azione dell'acido nitroso sulla cumidina dall'acido amidocuminico, descrissi questo corpo come un liquido che bolle alla temperatura di 213°,5-214°,5 ($H_0 = 753^{mm}$) e si solidifica in un miscuglio di sale e neve in cristalli fusibili a 8°-10°: erano allora conosciuti due isopropilfenoli, quello cioè di Paternò e Spica fusibile a 61° e bollente a 226°-227°,5, e quello descritto da Spica (1) come un liquido che bolle a 218°,5 ($H_0 = 756^{mm}$), non si solidifica in un miscuglio di sale e neve, ed il cui etere etilico distilla alla temperatura non corretta di 213°.

Io fondandomi sulle differenze tra i punti di ebollizione e di fusione dei fenoli, e tra le temperature di ebollizione degli eteri etilici corrispondenti (il mio bolle a 208°,6-209°,6), fui indotto a ritenere il corpo da me preparato diverso da quello di Spica. Però contemporaneamente alla mia nota preliminare questi (2) pubblicò una nuova memoria nella quale corresse il punto di ebollizione del suo fenol fissandolo a 213°-215° che coincide con quello da me dato; ciò mi fece sospettare della identità tra i due corpi la quale ora, conosciuta la costituzione della cumidina dall'acido amidocuminico, è messa fuori dubbio malgrado la differenza ancora esistente tra i punti di ebollizione degli eteri

(1) *Gazz. chim.*, IX, 442.
(2) Ib., X, 246.

etilici dovuta certamente al fatto che Spica, lavorando su piccole quantità, non aveva per le mani un prodotto puro, e malgrado che egli non abbia potuto solidificare il suo fenol, poichè, come mostrerò in seguito, questa solidificazione presenta spesso gravi difficoltà.

La cumidina (1,2) adoperata nelle seguenti esperienze è stata ottenuta distillando l'amidocuminato baritico (dall'acido amidocuminico puro p. f. 129°) col doppio peso di idrato baritico secco per porzioni di 50-100 grammi alla volta.

Per preparare l'ortoisopropilfenol si mettono gr. 10 di cumidina in sospensione in 120^{cc} di acqua, si aggiungono 35^{cc} di acido solforico ($D = 1,30$) e si riscalda sino a completa soluzione del solfato; si raffredda poi in neve, con che solo una piccola parte del sale si deposita, e si fa passare una corrente di anidride nitrosa agitando continuamente e mantenendo il liquido immerso nella neve in modo che la sua temperatura si trovi sempre abbastanza al disotto di 10°: quando quasi tutto il solfato è scomparso e ne resta soltanto una piccola quantità, di colore rosso bruno, si sospende l'azione dell'anidride nitrosa e si agita fortemente sino a resinificazione di quel po' di sale. Si aggiungono allora 200^{cc} circa di acqua e si abbandona il liquido alla temperatura dell'ambiente: tosto comincia lo sviluppo dell'azoto e va separandosi l'ortoisopropilfenol che, dopo alcune ore, si estrae con etere (1), si dissecca su cloruro di calcio la soluzione eterea, si scaccia il solvente e si distilla il residuo raccogliendo ciò che passa sino a 230°. Se l'operazione è andata bene resta al disopra di questa temperatura solo una piccola quantità di resina insolubile nella potassa; invece se l'operazione non è proceduta regolarmente la resina è in maggior quantità e già prima di 230° si decompone rigonfiandosi e svolgendo vapori nitrosi, impedendo così l'andamento regolare della distillazione.

Il liquido che passa al disotto di 230° è dell'ortoisopropilfenol greggio, e dopo alcune distillazioni frazionate si raccoglie quasi tutto attorno alla temperatura non corretta di 210°. Esso rappresenta il 60-65 % della quantità teorica, ma se non si

(1) Dopo l'estrazione del fenol, può ricavarsi dal liquido acquoso un po' di cumidina restata inalterata, rendendolo alcalino con idrato potassico e agitandolo con etere.

seguono nella sua preparazione le prescrizioni sopra date, si ha un rendimento minore che può arrivare sino al 30 %.

Un risultato egualmente buono si ottiene, e più comodamente, impiegando il nitrito potassico invece dell'acido nitroso. Si sospende gr. 10 di cumidina in 100^{cc} di acqua, si acidifica fortemente con acido cloridrico diluito, si raffredda con neve e si fa gocciolare nel liquido una soluzione della quantità equimolecolare di nitrito potassico in gr. 30 di acqua; indi si aggiunge ancora un eccesso di acido cloridrico, si lascia decomporre il diazocomposto alla temperatura ordinaria e si continua l'operazione come nel metodo precedente.

L'ortoisopropilfenol di fresco preparato è un liquido senza colore, molto refrangente, di odore fenico; per l'azione della luce si colora rapidamente in giallo e poi in rosso. È volatile col vapor d'acqua. Bolle alla temperatura corretta di 212°-212°,5 (termometro N. 10785 di Baudin, colonna nel vapore) sotto la pressione ridotta a zero di 732^{mm},4. La sua densità riferita all'acqua a 4° è 1,01243 a 0° e 0,92765 a 100°; il suo coefficiente di dilatazione medio tra 0° e 100° è uguale a 0,0009138.

Accennai nella nota preliminare che raffreddando l'ortoisopropilfenol in un miscuglio di sale e neve, si solidifica in cristalli fusibili a 8-10°; dopo la pubblicazione di quella nota avendo preparato una maggior quantità del fenol puro, potei sottoporlo ad una serie di successive solidificazioni e fusioni separando ogni volta la parte più difficilmente solidificabile, e lo ottenni così in cristalli fusibili a 15-16°; ed in quella occasione osservai anche che, se la solidificazione tarda a manifestarsi, si può produrla subito introducendo nel liquido raffreddato un cristallino precedentemente ottenuto. Ora, abbenchè abbia avuto a mia disposizione quantità molto maggiori di prodotto purificato per distillazione con tutte le cure, e bollente a temperatura costante, non sono più riuscito a solidificarlo nemmeno raffreddandolo a — 35°; certo, si sarebbe immediatamente solidificato in presenza di un cristallino precedentemente ottenuto da quella porzione che si consolidava colla massima facilità, ma non ne possedevo più un campione. Ciò nonostante credo possa affermarsi che l'ortoisopropilfenol raffreddato in un miscuglio di sale e neve è capace di rapprendersi in una massa di cristalli fusibili a 15-16°, ma che per cause sconosciute (probabilmente per la presenza di tracce di sostanze estranee difficili a separare e che

non hanno influenza sui risultati dell'analisi) non sempre si riesce a solidificarlo per il solo raffreddamento anche a — 35°.

Le due combustioni seguenti sono state fatte sopra prodotti provenienti da preparazioni diverse; anzi l'isopropilfenol adoperato nell'analisi I si solidificava facilmente nel miscuglio di neve e sale, mentre quello sul quale fu eseguita l'analisi II non volle solidificarsi nemmeno a — 35°.

I. Gr. 0,1726 di sostanza diedero gr. 0,4997 di anidride carbonica e gr. 0,1445 di acqua;

II. Gr. 0,2036 di sostanza diedero gr. 0,5904 di anidride carbonica e gr. 0,1688 di acqua.

Cioè su cento parti:

	Trovato		Calcolato per
	I.	II.	$C_9H_{12}O$
Carbonio	78,95	79,08	79,41
Idrogeno	9,30	9,21	8,82 .

L'ortoisopropilfenol puro si scioglie facilmente e completamente nella soluzione di idrato potassico dalla quale poi è parzialmente trasportato dall'etere. Dà con acido solforico e nitrito potassico la reazione di Liebermann; con anidride fosforica a 200° non reagisce visibilmente. La sua soluzione acquosa è colorata in violetto dal cloruro ferrico diluito aggiunto in piccola quantità; questa colorazione però è fugacissima e passa subito al verde, indi il liquido s'intorbida e finalmente diventa rossastro o grigio.

Derivato acetilico $C_6H_4\overset{C_3H_7}{O}.C_2H_3O$. — Si ottiene riscaldando in apparecchio a ricadere l'ortoisopropilfenol con egual peso di cloruro di acetile: distillando il prodotto della reazione passa dapprima l'eccesso di cloruro di acetile, poscia la temperatura monta rapidamente e a 225-228° distilla il derivato acetilico.

È un liquido senza colore, molto refrangente, di odore grato; bolle alla temperatura corretta di 228°,7 alla pressione ridotta a zero di 761^{mm},8. La sua densità riferita all'acqua a 4° è 1,02714 a 0° e 0,93818 a 100°, quindi 0,0009471 rappresenta il suo coefficiente medio di dilatazione tra 0° e 100°.

L'acqua non lo decompone alla temperatura ordinaria nè all'ebollizione, per lo meno nel caso che questa non sia troppo prolungata. La soluzione acquosa di idrato potassico non lo altera visibilmente a freddo neanche per lungo contatto; dopo continuata ebollizione lo discioglie e dal liquido, per aggiunta di acido cloridrico, si separa l'isopropilfenol.

Etere metilico $C_6H_4 \begin{matrix} C_3H_7 \\ OCH_3 \end{matrix}$. — Si prepara scaldando per alcune ore in apparecchio a ricadere le quantità equivalenti del fenol e idrato potassico con alcool metilico ed eccesso di ioduro di metile, precipitando con acqua e sottoponendo a distillazione il prodotto disseccato su cloruro di calcio: passa dapprima l'eccesso di ioduro di metile e poi a 196-197° quasi tutto il rimanente del liquido.

È un liquido senza colore; bolle alla temperatura corretta di 198-199° alla pressione ridotta a 0° di 751^{mm}.

Gr. 0,2097 di sostanza diedero gr. 0,6125 di anidride carbonica e gr. 0,1825 di acqua; cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{14}O$
Carbonio	79,65	80,00
Idrogeno	9,66	9,33.

Etere etilico $C_6H_4 \begin{matrix} C_3H_7 \\ OC_2H_5 \end{matrix}$. — Si ottiene in modo analogo al precedente. Da gr. 12 del fenol ebbi gr. 11 dell'etere passante alla distillazione a 205-208° (non corretta).

È un liquido senza colore, molto mobile e refrangente, di odore aromatico grato, bollente alla temperatura corretta di 208°,6-209°,6 alla pressione ridotta a zero di 762^{mm},2. La sua densità riferita all'acqua a 4° è 0,94438 a 0° e 0,85913 a 100°; il suo coefficiente di dilatazione medio tra 0° e 100° è quindi 0,0009923.

La temperatura di ebollizione trovata da Spica (1) a 213° (non corretta) è troppo elevata, probabilmente per la presenza dell'etere etilico del paraisopropilfenol. Come è noto gli eteri etilici dei fenoli bollono a temperatura più bassa dei fenoli corrispondenti.

(1) *Gazz. chim.*, IX, 443

Monobromoortoisopropilfenol.

$$C_6H_3 \begin{matrix} C_3H_7 & (6) \\ OH & (1) \\ Br & (4) \end{matrix}$$

Si sciolgono gr. 10 dell'ortoisopropilfenol perfettamente puro in gr. 30 di acido acetico glaciale, si raffredda con neve e si aggiunge goccia a goccia per mezzo di imbuto a robinetto la quantità equivalente di bromo (gr. 12) sciolta nel doppio peso di acido acetico; la soluzione, che resta sempre colorata in rosso, si precipita con acqua, si lava la sostanza oleosa che si separa e si distilla in una corrente di vapor d' acqua dal quale viene completamente e facilmente trasportata. Si ottiene in questo modo un liquido più pesante dell'acqua, senza colore, che disseccato nel vuoto sopra acido solforico e raffreddato lungamente in un miscuglio a parti uguali di acido cloridrico e ghiaccio, si rapprende in una massa cristallina compatta che si spreme tra carte.

Se l' isopropilfenol adoperato nella preparazione è puro, il prodotto così avuto si solidifica completamente e le carte tra le quali si spreme assorbono appena tracce di una sostanza liquida; se al contrario il fenol adoperato non è puro, il prodotto dell'azione del bromo si solidifica solo parzialmente, e le carte tra le quali si spreme si imbevono di un liquido: questo, estratto con etere e distillato frazionatamente con vapor d'acqua, dà varie porzioni delle quali le ultime sono del bromoderivato solido e difatti si solidificano per l' aggiunta di un cristallino di esso, mentre le prime restano sempre liquide e, dietro le analisi fatte, sembrano miscugli di un monobromo- con bibromoisopropilfenol.

Il monobromoortoisopropilfenol si presenta in aghi sottili, bianchi, fusibili a 47-49°, di odore fenico. È quasi insolubile nell'acqua; si scioglie molto nei solventi ordinari dai quali però difficilmente si separa allo stato solido; dall'alcool o acido acetico diluiti lo si ha per raffreddamento delle soluzioni tiepide allo stato liquido, e se si aggiunge un po' del solido anche esso si liquefà; dall' etere per svaporamento alla temperatura ordinaria si separa in aghi intrecciati. Bolle verso 250° decomponendosi più o meno profondamente a seconda la sua purezza ed il modo

nel quale è scaldato. Si scioglie nell' idrato potassico diluito e l'acido cloridrico lo riprecipita allo stato liquido; si scioglie pure un po' nella soluzione concentrata di carbonato sodico ma è insolubile nell' ammoniaca. Non dà nessuna colorazione con percloruro di ferro. Per nitrazione fornisce il bromonitroderivato fusibile a 33°.

I. Gr. 0,3758 di sostanza diedero gr. 0,6850 di anidride carbonica e gr. 0,1857 di acqua;

II. Gr. 0,4706 di sostanza diedero gr. 0,8655 di anidride carbonica e gr. 0,2257 di acqua.

Cioè su cento parti:

	Trovato		Calcolato per
	I.	II.	$C_9H_{11}OBr$
Carbonio	49,72	50,15	50,23
Idrogeno	5,49	5,32	5,11.

L'*etere metilico* del bromoortoisopropilfenol, ottenuto scaldando in tubi chiusi verso 110° il bromoortoisopropilfenol con la quantità equivalente di idrato potassico e piccolo eccesso di ioduro di metile in presenza di alcool metilico, è un liquido senza colore, più pesante dell'acqua, di odore grato, bollente alla temperatura corretta di 250°,4-251°,4 alla pressione ridotta a zero di 740^{mm},1.

Gr. 0,3040 di sostanza diedero gr. 0,2514 di bromuro di argento; cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per
		$C_{10}H_{13}OBr$
Bromo	35,16	34,93.

Onde stabilire in modo diretto la posizione del bromo nel bromoortoisopropilfenol, fu ossidato con acido nitrico (D=1,30) il suo etere metilico perfettamente puro; però i risultati ottenuti non sono così semplici come era da prevedersi, poichè tra i prodotti dell'ossidazione si ha un acido bibromurato. Su queste esperienze, che sono ora incomplete, sarà riferito in seguito; ciò nonostante avuto riguardo alle condizioni di preparazione del

bromoortoisopropilfenol ed alle analogie, credo si possa sin da ora ammettere che il bromo sia nella posizione *para* relativamente all'ossidrile.

Bibromoortoisopropilfenol.

$$\begin{array}{lll} & C_3H_7 & (6) \\ C_6H_2 & OH & (1) \\ & Br & (2) \\ & Br & (4) \end{array}$$

Si prepara mescolando le soluzioni acetiche del monobromoderivato e della quantità equimolecolare di bromo, riscaldando leggermente, precipitando con acqua e distillando in una corrente di vapore; ovvero aggiungendo all'isopropilfenol raffreddato in ghiaccio un po' più della quantità teorica di bromo, lavando con acqua e distillando in una corrente di vapore: in tutti e due i casi, specialmente nel secondo, resta nel pallone un po' di resina, e passa facilmente col vapor d'acqua il bibromofenol.

È un liquido più pesante dell'acqua, senza colore, ma alla luce diventa giallo; non si solidifica nemmeno a — 30° e non può esser distillato poichè si decompone profondamente. Si scioglie negl'idrati e carbonati alcalini ed è riprecipitato dalle soluzioni per mezzo degli acidi. Con percloruro di ferro non dà nessuna colorazione. Per l'azione dell'acido nitrico o di un miscuglio di esso o di nitro con acido solforico, un atomo di bromo (*para*) è sostituito dal gruppo NO_2 e si forma il bromonitroisopropilfenol fusibile a 87-88°.

I. Gr. 0,4250 di sostanza disseccata nel vuoto sopra acido solforico, diedero gr. 0,5774 di anidride carbonica e gr. 0,1440 di acqua;

II. Gr. 0,4051 di sostanza disseccata come sopra, diedero gr. 0,5492 di anidride carbonica e gr. 0,1412 di acqua.

Cioè su cento parti:

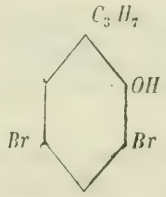
	Trovato		Calcolato per
	I.	II.	$C_9H_{10}OBr_2$
Carbonio	37,05	36,97	36,66
Idrogeno	3,76	3,87	3,40.

L'*etere metilico* del bibromoortoisopropilfenol è un liquido vischioso, più pesante dell'acqua, senza colore e di odore etereo appena sensibile; bolle indecomposto alla temperatura non corretta di 278°-280°.

Gr. 0,4898 di sostanza diedero gr. 0,5968 di bromuro di argento; cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{12}OBr_2$
Bromo	51,83	51,94.

Le esperienze di ossidazione con acido nitrico non sono ancora complete e saranno pubblicate più tardi; stando però alle analogie, se il monobromoortoisopropilfenol dal quale deriva ha la costituzione avanti indicata, è cioè un paraderivato, il bibromocomposto sarà con molta probabilità:



Questa formola del resto trova una qualche conferma nel bromonitroisopropilfenol fusibile a 87-88° che si ottiene sia per l'azione del bromo sul paranitroisopropilfenol, sia, come ho accennato, per l'azione dell'acido nitrico sopra questo bibromoderivato.

Nitrosoortoisopropilfenol.

$$\begin{array}{rl} C_3H_7 & (6) \\ C_6H_3OH & (1) \\ NO & (4) \end{array}$$

Si sospende nell'acqua l'ortoisopropilfenol (gr. 4) e si tratta con idrato potassico in soluzione diluita sino a che il fenol si scioglie ed il liquido ha reazione leggermente alcalina; indi si aggiunge una soluzione di nitrito potassico (gr. 4) in acqua (litri 2 ½) e acido solforico diluito (3 : 100) sino a reazione

acida: il liquido diventa bruno e l'indomani contiene pochi fiocchi bianchi che aumentano notevolmente agitando e che sono costituiti dal nitrosoderivato. Esso è pochissimo stabile, si annerisce e tende a resinificarsi e quindi non potè essere analizzato, ma fu lavato per decantazione, raccolto rapidamente su filtro, spremuto tra carte, asciugato nel vuoto sopra acido solforico e ossidato con ferricianuro potassico in soluzione alcalina: diede il paranitroortoisopropilfenol fusibile a 86°.

Nitroortoisopropilfenoli.

$$C_6H_3 \begin{cases} C_3H_7 \\ OH \\ NO_2 \end{cases}$$

Nitrando l'ortoisopropilfenol sembra che si formino i due isomeri para- e ortoderivati: il primo è solido, non volatile col vapor d'acqua, il secondo invece è trasportato dal vapore ed è probabilmente liquido.

Si sciolgono l'isopropilfenol e la quantità equimolecolare di acido nitrico, ciascuno nel triplo peso di acido acetico glaciale e si mescolano poco a poco le soluzioni raffreddate con ghiaccio, si precipita con acqua e si distilla l'olio che si separa in una corrente di vapore: passa una sostanza oleosa, e dalla soluzione acquosa gialla rimanente nel pallone si deposita pel raffreddamento il nitroisopropilfenol solido che si purifica per ripetute cristallizzazioni dall'acqua bollente e che è identico con quello ottenuto dal nitrosoderivato.

Il nitroortoisopropilfenol solido si presenta in aghi corti incolori o di un bianco sporco fusibili a 86° e che al microscopio si mostrano costituiti da cristalli tabulari molto allungati. Non è volatile col vapor d'acqua; è molto solubile nei solventi ordinari, pochissimo nell'acqua fredda, ma si scioglie meglio nella bollente; la soluzione acquosa gialla diventa perfettamente incolora per l'aggiunta di una goccia di acido cloridrico.

Si scioglie negli idrati e carbonati alcalini dando liquidi rossi dai quali per svaporamento si depositano cristallizzati i sali corrispondenti. Non dà nessuna colorazione con percloruro di ferro. Per l'azione del bromo dà il bromonitroderivato fusibile a 87-88°.

Gr. 0,3198 di sostanza diedero gr. 0,6980 di anidride carbonica e gr. 0,1925 di acqua; cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_9H_{11}NO_3$
Carbonio	59,52	59,66
Idrogeno	6,68	6,08.

Il prodotto liquido che si forma in quantità non trascurabile contemporaneamente al solido e che passa alla distillazione col vapor d'acqua, non sembra un corpo puro (1), ciò nonostante la sua composizione è molto vicina a quella di un mononitroisopropilfenol; difatti:

Gr. 0,4902 del liquido disseccato nel vuoto sopra acido solforico diedero gr. 1,0840 di anidride carbonica e gr. 0,2872 di acqua;

Gr. 0,3542 del liquido disseccato come sopra diedero 22^{cc} di azoto ($T = 13^{o}, H_{o} = 736^{mm},86$) o gr. 0,0253144.

Cioè su cento parti:

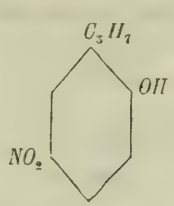
	Trovato	Calcolato per $C_9H_{11}NO_3$
Carbonio	60,30	59,66
Idrogeno	6,50	6,08
Azoto	7,14	7,73

Il liquido analizzato, che conterrà probabilmente l'ortonitroisopropilfenol, è più pesante dell'acqua, di color giallo, ma diventa bruno alla luce; non si solidifica per forte raffreddamento. È facilmente volatile col vapor d'acqua; si scioglie nelle soluzioni dei carbonati alcalini colorandole in rosso e da esse è riprecipitato per mezzo degli acidi allo stato liquido. Col percloruro di ferro non dà nessuna colorazione.

---

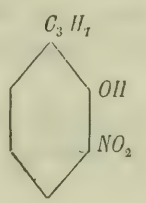
(1) Distillando frazionatamente con vapor d'acqua la parte liquida ottenuta da una preparazione si ebbero, assieme ad alcune porzioni che dalle loro soluzioni in carbonato sodico riprecipitavano allo stato liquido per mezzo dell'acido cloridrico, altre porzioni che egualmente trattate, si separavano in aghi finissimi fusibili a 61-65°, i quali, a causa della piccola quantità, non poterono essere più oltre esaminati.

Il nitroortoisopropilfenol solido fusibile a 86° va considerato come un paraderivato:



Esso difatti è incoloro, non volatile col vapor d'acqua e corrisponde al nitroso composto dal quale si ottiene per ossidazione e che, secondo le analogie, deve essere un paraderivato.

Il liquido volatile col vapor d'acqua conterrà con molta probabilità l'ortonitroortoisopropilfenol:



Parabromoortonitroortoisopropilfenol.

$$C_6H_2 \begin{matrix} C_3H_7 & (6) \\ OH & (1) \\ NO_2 & (2) \\ Br & (4) \end{matrix}$$

Sciogliendo il parabromoortoisopropilfenol puro in dieci volumi di acido acetico glaciale, aggiungendo poco a poco il liquido ad una soluzione raffreddata con acqua della quantità equimolecolare di acido nitrico concentrato in dieci volumi di acido acetico e precipitando con acqua, si separa un olio pesante, giallo-bruno che l'indomani si trova rappreso in una massa gialla cristallina e che si cristallizza dall'acido acetico diluito. Il bromonitroisopropilfenol così ottenuto è puro.

Gr. 0,4057 di sostanza diedero gr. 0,6186 di anidride carbonica e gr. 0,1616 di acqua;

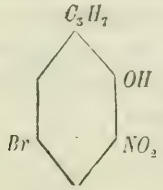
Gr. 0,5274 di sostanza diedero 26^{cc} di azoto ($T = 17°$, $H_0 = 734^{mm},88$) o gr. 0,02941205.

Cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_9H_{10}BrNO_3$
Carbonio	41,56	41,54
Idrogeno	4,42	3,84
Azoto	5,57	5,38.

Cristallizza in aghi sottili e molto lunghi di un colore giallo vivo, fusibili a 33°. È molto solubile nei solventi ordinari; le migliori cristallizzazioni si ottengono dalla soluzione satura verso 40° in acido acetico diluito, avendo cura, onde impedire che si separi allo stato oleoso, di aggiungere un cristallino della sostanza appena il liquido s'intorbida.

La formula di costituzione



non è direttamente dimostrata dall'esperienza, ma corrisponde a quella del bromonitrofenol fusibile a 88° preparato da Hübner e Brenken nelle identiche condizioni.

Ortobromoparanitroortoisopropilfenol.

$$C_6H_2 \begin{cases} C_3H_7 & (6) \\ OH & (1) \\ Br & (2) \\ NO_2 & (4) \end{cases}$$

Alla soluzione di paranitroortoisopropilfenol puro (p. f. 86°) nel triplo peso di acido acetico glaciale, si aggiunge la quantità equimolecolare di bromo sciolta in quattro parti di acido acetico, si precipita con acqua e si cristallizza dall'alcool diluito la polvere bianca che si separa.

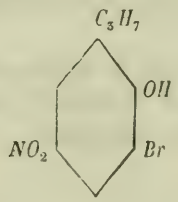
Gr. 0,3710 di sostanza diedero gr. 0,5635 di anidride carbonica e gr. 0,1373 di acqua; cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_9H_{10}BrNO_3$
Carbonio	41,42	41,54
Idrogeno	4,11	3,84 .

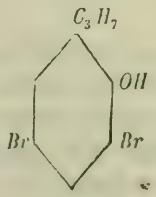
L'ortobromoparanitroortoisopropilfenol è in laminette bianche, madreperlacee, fusibili a 87-88°. È volatile col vapor d'acqua, quasi insolubile nell'acqua fredda, ma si scioglie abbastanza per colorarla in giallo: la colorazione sparisce per l'aggiunta di acido cloridrico. Anche la soluzione nell'alcool diluito è gialla e si comporta verso l'acido cloridrico come la soluzione acquosa.

Conservando l'ortobromoparanitroisopropilfenol in una boccettina di vetro, le particelle di esso che sono in contatto colle pareti del recipiente si colorano poco a poco in giallo a causa probabilmente dell'umidità che il vetro condensa; difatti nel vuoto sopra acido solforico questa colorazione sparisce per ritornare lentamente in presenza dell'aria.

La formola di struttura



sembra giustificata dalle analogie; ed invero bromurando il paranitrofenol il bromo va al posto orto relativamente all'ossidrile ed il prodotto che si ottiene è incoloro come quello da me ottenuto dal paranitroisopropilfenol. Essa è confermata inoltre dal fatto che lo stesso composto si ha per l'azione dell'acido nitrico sul bibromoisopropilfenol



nel qual caso uno degli atomi di bromo viene sostituito dal gruppo NO_2.

La reazione va nel modo migliore sciogliendo il bibromoortoisopropilfenol in dieci volumi di acido acetico ed aggiungendo il liquido poco a poco ad una soluzione raffreddata con ghiaccio della quantità equimolecolare di acido nitrico in dieci volumi di acido acetico: l'acqua precipita un olio rosso, pesante, che tosto si rapprende in massa solida e che si distilla col vapor d'acqua: passa dapprima una piccola quantità di un liquido rosso che non si solidifica e poscia il bromonitroisopropilfenol in laminette leggermente giallognole; spremuto tra carte e cristallizzato dall'alcool diluito si fonde a 87-88°.

Gr. 0,2860 di sostanza diedero gr. 0,4392 di anidride carbonica e gr. 0,1173 di acqua;

Gr. 0,3359 di sostanza diedero gr. 0,2418 di bromuro di argento;

Gr. 0,3193 di sostanza diedero 17^{cc} di azoto ($T = 24°$, $H_0 = 738^{mm},65$) o gr. 0,01871379.

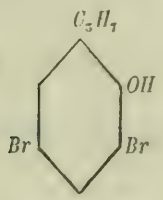
Cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_9H_{10}BrNO_3$
Carbonio	41,88	41,54
Idrogeno	4,59	3,84
Bromo	30,63	30,77
Azoto	5,86	5,38.

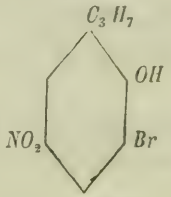
Il bromonitroisopropilfenol così preparato è identico per le sue proprietà con quello ottenuto per bromurazione del paranitroisopropilfenol malgrado che non lo si possa mai avere perfettamente bianco conservando sempre una leggerissima tinta giallognola. Da un esame cristallografico superficiale dei due prodotti di diversa provenienza viene sempre più confermata la loro identità; difatti al microscopio tutti e due si presentano come lamine composte da tante tavolette di aspetto rombico aventi la stessa sfaldatura e appartenenti al sistema monoclino o triclino, ma più probabilmente al primo; l'angolo maggiore del rombo è in tutti e due i casi di 134 . Identico è anche il comportamento ottico;

il lato più sviluppato delle laminette rombiche presenta in ambedue i preparati lo stesso angolo di estinzione di 40° circa.

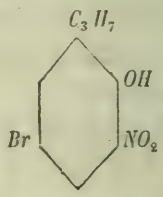
Come dunque si vede il gruppo NO_2 andò a sostituire l'atomo di bromo che trovavasi al posto para, analogamente come nel tribromofenol per l'azione dell'acido nitrico avviene prima la sostituzione di NO_2 all'atomo di bromo che occupa la posizione para e si forma il dibromoparanitrofenol fusibile a 141° (Armstrong e Harrow) e soltanto in seguito si sostituiscono uno ad uno gli altri due atomi di bromo che sono nella posizione orto formandosi ortobromodinitrofenol (p. f. 118°) e acido picrico. Del resto se nell'azione dell'acido nitrico sul dibromoortoisopropilfenol fosse avvenuta la sostituzione del bromo che trovasi al posto orto, avrebbe dovuto ottenersi l'isomero giallo, fusibile a 33°:



dibromoisopropilfenol



bromonitroisopropilfenol fusibile a 87-88°.



bromonitroisopropilfenol fusibile a 33°.

Acidi mono- e dioortoisopropilfenolcarbonici.

Si scalda l'ortoisopropilfenol verso 150° per otto ore in una corrente di anidride carbonica umida aggiungendo mano mano dei pezzettini di sodio, si tratta la massa con acqua, si precipita con acido cloridrico, si fa digerire con carbonato ammonico, si agita con etere per estrarre il fenol inalterato e si riprecipita il liquido acquoso con acido cloridrico: si ottiene una sostanza oleosa che tosto si solidifica ed è costituita da un miscuglio del mono- e bicarboacido. Disseccata e trattata con cloroformio abbandona al solvente il primo e resta indisciolto il secondo.

Da gr. 15 di ortoisopropilfenol ebbi gr. 8 di acido monocarbonico, gr. 0,25 di acido bicarbonico e gr. 7 del fenol inalterato; in un'altra operazione nella quale operai a 180° ottenni gr. 7 del primo e gr. 0,7 del secondo.

Acido ortoisopropilfenolmonocarbonico · $C_6H_3 \begin{matrix} C_3H_7 & (6) \\ OH & (1) \\ COOH & (2). \end{matrix}$

— Si cristallizza dall'acqua bollente lasciando raffreddare lentamente la soluzione in modo che non si depositi allo stato liquido.

I. Gr. 0,3039 di sostanza diedero gr. 0,7445 di anidride carbonica e gr. 0,1939 di acqua;

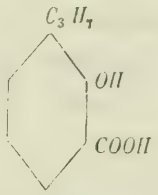
II. Gr. 0,2407 di sostanza fornirono gr. 0,5872 di anidride carbonica e gr. 0,1518 di acqua.

Cioè su cento parti:

	Trovato		Calcolato per
	I.	II.	$C_{10}H_{12}O_3$
Carbonio	66,81	66,53	66,66
Idrogeno	7,08	7,00	6,66.

Cristallizzato dall'acqua si presenta in aghi lunghi, incolori, fusibili a 71-72° che si colorano alla luce in violaceo. Distilla inalterato ed è anche volatile col vapor d'acqua. Si scioglie molto nei solventi ordinari compreso il cloroformio, pochissimo nell' acqua fredda. La soluzione acquosa si colora alla luce in violaceo; coi sali ferrici dà colorazione violetto-azzurra molto intensa e persistente.

Tutti questi caratteri non lasciano alcun dubbio sulla posizione orto del carbossile relativamente all'ossidrile:



Tanto l' acido libero che il sale sodico reagiscono col pentacloruro di fosforo, ma trattando con acqua il prodotto della reazione si ricostituisce l'acido primitivo.

Il *sale baritico*, ottenuto col carbonato di bario, è molto solubile nell' acqua e si deposita per svaporamento sotto forma di pellicola rossiccia che vista al microscopio risulta composta da piccoli ammassi sferoidali senza apparenza cristallina.

Il *sale di piombo*, ottenuto per precipitazione dal sale baritico, è amorfo e si fonde sotto l'acqua per l'azione del calore.

Il *sale di argento*, preparato dal sale di bario, è poco solubile nell'acqua e cristallizza dalla bollente in aghi microscopici bianchi; si altera facilmente alla luce.

I. Gr. 0,4538 di sale disseccato all'aria fornirono gr. 0,1728 di argento;

II. Gr. 0,3263 di sale disseccato come sopra diedero gr. 0,1240 di argento.

Cioè su cento parti:

	Trovato		Calcolato per
	I.	II.	$C_{10}H_{11}O_3Ag$
Argento	38,07	37,97	37,63.

Acido ortoisopropilfenolbicarbonico C_6H_2 $\begin{matrix} C_3H_7 & (6) \\ OH & (1) \\ COOH & (2) \\ COOH & \end{matrix}$

— Dopo averlo fatto bollire con cloroformio si cristallizza dall'acido acetico diluito.

A causa della piccola quantità di sostanza della quale potei disporre per l'analisi ottenni numeri non molto concordanti con quelli richiesti dalla teoria, ma che non lasciano dubbio sulla composizione del corpo in esame.

Gr. 0,0894 di sostanza diedero gr. 0,1872 di anidride carbonica e gr. 0,0430 di acqua; cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_{12}O_5$
Carbonio	57,10	56,41
Idrogeno	5,48	5,13.

Dall'acido acetico diluito si separa in fiocchi leggermente rossicci che al microscopio si mostrano formati da cristalli tabulari o anche aghiformi. Si fonde verso 295° annerendosi; è insolubile in eteri di petrolio, benzina, cloroformio, pochissimo solubile nell'acqua e molto in etere, acido acetico ed alcool. Il percloruro di ferro colora la sua soluzione acquosa in rosso ciliegia.

Acido ortoisopropilfenolglicolico.

$$C_6H_4 \begin{matrix} C_3H_7 & (2) \\ O\,.\,CH_2COOH & (1) \end{matrix}$$

Gr. 12 di ortoisopropilfenol furono scaldati a bagnomaria con gr. 20 di acido monocloracetico sino a fusione aggiungendo in seguito poco a poco gr. 50 di soluzione di idrato sodico ($D = 1,53$): si ottenne un liquido bruno che si diluì con acqua, si precipitò con acido cloridrico e si fece digerire con carbonato ammonico. L' etere estrasse dal liquido gr. 3 del fenol inalterato, e con l'acido cloridrico si precipitarono gr. 12 dell'acido ortoisopropilfenolglicolico il quale, cristallizzato dall' acqua, fu sottoposto all'analisi: si ottenne un po' di carbonio in meno, ma il risultato dell'analisi del sale d'argento è molto soddisfacente.

I. Gr. 0,3430 di sostanza diedero gr. 0,8472 di anidride carbonica e gr. 0,2330 di acqua;

II. Gr. 0,3823 di sostanza fornirono gr. 0,9453 di anidride carbonica e gr. 0,2576 di acqua.

Cioè su cento parti:

	Trovato		Calcolato per
	I.	II.	$C_{11}H_{14}O_3$
Carbonio	67,36	67,43	68,04
Idrogeno	7,55	7,48	7,22.

L'acido ortoisopropilfenolglicolico si deposita dall'acqua bollente in aghi lunghi e splendenti fusibili a 130-131°.

Il *sale baritico*, preparato col carbonato di bario, è molto solubile nell' acqua dalla quale si separa sotto forma di croste costituite da squame microscopiche.

Il *sale di argento*, ottenuto per precipitazione dal sale di bario, è abbastanza solubile nell'acqua fredda, molto nella calda dalla quale lo si ha in piccoli aghi bianchi e splendenti.

Gr. 0,3554 del sale disseccato all'aria diedero gr. 0,1273 di argento; cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_{13}O_3Ag$
Argento	35,82	35,88.

I *sali di piombo e di rame* si ottennero dal sale baritico come precipitati amorfi, il primo bianco, il secondo verde chiaro.

Eteri fosforici dell'ortoisopropilfenol.

L'etere neutro fu ottenuto come prodotto secondario nella preparazione del bromocumene più sotto descritto facendo agire quattro molecole dell'isopropilfenol sopra una di pentabromuro di fosforo.

La reazione comincia già a freddo, la si completa scaldando, si distilla con vapor d'acqua (che trasporta il bromocumene), il residuo si lava con potassa, si estrae con etere e si distilla nel vuoto.

L'*etere fosforico neutro* $PO(O.C_6H_4.C_3H_7)_3$ è un liquido vischioso, leggermente giallognolo, ma diventa bruno; non si solidifica per raffreddamento. Bolle inalterato alla temperatura di 375-380° alla pressione di 28^{cm}. È insolubile nell'acqua, si scioglie molto nell'etere e nell'alcool, dai quali solventi si separa sempre allo stato oleoso.

Gr. 0,3481 di sostanza bruciati con cromato di piombo diedero gr. 0,9130 di anidride carbonica e gr. 0,2410 di acqua; cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{27}H_{33}PO_4$
Carbonio	71,53	71,68
Idrogeno	7,69	7,30.

Facendo bollire in apparecchio a ricadere per mezz'ora l'etere fosforico neutro con soluzione alcoolica di idrato potassico, aggiungendo acqua ed acido cloridrico e distillando in una corrente di vapore, passa dell'isopropilfenol rigeneratosi e resta nel pal-

lone una sostanza resinosa: si scioglie questa in potassa acquosa diluita, si fa bollire la soluzione con che si separano delle resine brune, si aggiunge cloruro di bario e si concentra: per raffreddamento lento si deposita una massa cristallina bianca che si ricristallizza dall'acqua ed è il:

Sale baritico dell'etere fosforico monoacido . . . . . $\left\{ \begin{array}{l} PO \left\{ \begin{array}{l} (O.C_6H_4.C_3H_7)_2 \\ O \end{array} \right. \\ \quad Ba \\ PO \left\{ \begin{array}{l} O \\ (O.C_6H_4.C_3H_7)_2 \end{array} \right. \end{array} \right. + 6H_2O.$

— Cristallizza in aghi sottilissimi, lunghi e leggeri aggruppati attorno ad un punto. È molto solubile nell'acqua, nella quale però si scioglie con una certa difficoltà se è stato scaldato al disopra di 120°. A 120-130° perde tutta l'acqua di cristallizzazione ed il sale anidro la riassorbe in parte per esposizione all'aria.

Gr. 1,2733 di sale disseccato all'aria perdette a 130° gr. 0,1446 di acqua e fornì inoltre gr. 0,3280 di solfato baritico, cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{36}H_{44}O_8P_2Ba + 6H_2O$
Acqua	11,35	11,85
Bario	15,07	15,05

Non tentai di isolare l'acido corrispondente a questo sale di bario.

Ortobromocumene.

$$C_6H_4 \begin{array}{l} C_3H_7 \quad (1) \\ Br \quad (2) \end{array}$$

Il liquido ottenuto come è avanti detto nell'azione del pentabromuro di fosforo sull'ortoisopropilfenol e trasportato dal vapor d'acqua, fu lavato con soluzione di potassa e sottoposto a distillazione: passò quasi tutto a 201-203° (non corretta), restando una porzione bollente a più elevata temperatura e che non fu esaminata.

Gr. 0,2952 di sostanza diedero gr. 0,2792 di bromuro di argento; cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_9 H_{11} Br$
Bromo	40,24	40,20.

L'ortobromocumene è un liquido senza colore, più pesante dell'acqua; bolle alla temperatura corretta di 205-207° alla pressione ridotta a zero di $740^{mm},6$.

Il signor Peratoner, assistente in questo laboratorio, che mi fu di valido aiuto nel portare a compimento questo lavoro, terminate alcune ricerche in corso riprenderà lo studio di quei prodotti di ossidazione ai quali appena accennai nella presente memoria, e che presentano un qualche interesse non tanto per le indicazioni che forniscono intorno alla costituzione, quanto per le trasposizioni molecolari che hanno luogo durante l'ossidazione.

Torino,
Laboratorio di Chimica della R. Università.
Marzo 1886.

SUL CALCOLO

DELLA

DISTANZA DI DUE PUNTI

LE CUI POSIZIONI GEOGRAFICHE SONO NOTE

del Prof. Nicodemo Jadanza
presentato dal Socio Prof. A. Naccari

Lo scopo che ci proponiamo in questa Nota è quello di semplificare alcune formole date da noi in un'altra Nota precedente, avendo di mira specialmente il calcolo della distanza di due punti di note posizioni geografiche compresi in un foglio della carta d'Italia, ossia dentro un trapezio sferoidico i cui paralleli estremi differiscono per 20′ in latitudine, ed i cui meridiani estremi differiscono per 30′ in longitudine.

Premettiamo il seguente problema:

I.

Calcolare un triangolo rettilineo di cui son dati due lati e l'angolo tra essi compreso nella ipotesi che quell'angolo sia di poco differente da 90°.

Sia $A\,B\,C$ il triangolo dato e l'angolo A sia eguale a $90° + \frac{\omega}{2}$, si avrà, se i lati b e c sono noti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\left(90° + \frac{\omega}{2}\right)$$

ossia

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,c \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}$$

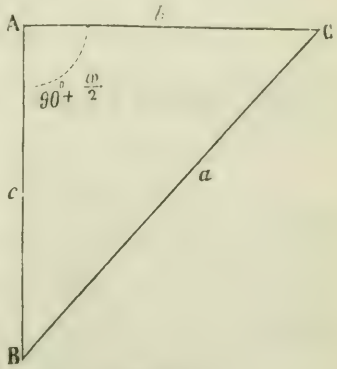


Fig. 1.

o anche

$$a^2 = (b^2 + c^2)\left(1 + \frac{2bc}{b^2 + c^2} \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)$$

$$a^2 = c^2\left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{2bc}{b^2 + c^2} \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right) . \qquad \ldots (1)$$

Ponendo

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{c} ,$$

ed osservando che si ha

$$\operatorname{sen} \psi \cos \psi = \frac{bc}{b^2 + c^2} ,$$

si otterrà

$$a^2 = \frac{c^2}{\cos^2 \psi}\left(1 + 2 \operatorname{sen} \psi \cos \psi \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right) ,$$

dalla quale, trascurando le terze potenze del 2° termine dentro la parentesi, si deduce

$$\log a = \log c + \operatorname{colog} \cos \psi + M \operatorname{sen} \psi \cos \psi \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} - M \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \psi \operatorname{sen}^2 \frac{\omega}{2} .$$

Poichè l'angolo $\frac{\omega}{2}$ è piccolo, la formola precedente, colla medesima approssimazione, può essere scritta così:

$$\left.\begin{aligned} \log a = \log c + \operatorname{colog} \cos \psi + \frac{M}{2} \operatorname{sen} 1''. \operatorname{sen} \psi \cos \psi . \omega - \\ - \frac{M}{4} \operatorname{sen}^2 1'' \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \psi . \omega^2 \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

Per calcolare l'angolo B si avrà

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \cos \frac{\omega}{2} ,$$

ovvero

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}\left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

donde

$$\log \operatorname{sen} B = \log b - \log a - \frac{M}{2} \operatorname{sen}^2 1'' \omega^2 .$$

Se nella precedente sostituiamo a $\log a$ il valore (2) otterremo:

$$\left.\begin{aligned}\log \operatorname{sen} B = \log \operatorname{sen} \psi - \frac{M}{2} \operatorname{sen} 1''.\ \omega \operatorname{sen} \psi \cos \psi + \\ + \frac{M}{4} \operatorname{sen}^2 1''.\omega^2 \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \psi - \frac{M}{2} \operatorname{sen}^2 1''\, \omega^2\end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

Le formole (2) e (3) sono esatte fino a che l'angolo $\frac{\omega}{2}$ sia tale che i termini trascurati non abbiano influenza sulla settima cifra decimale. Ciò succede quando $\frac{\omega}{2}$ non sorpassa $30'$.

I logaritmi delle quantità

$$\frac{M}{2} \operatorname{sen} 1'', \quad \frac{M}{4} \operatorname{sen}^2 1'', \quad \frac{M}{2} \operatorname{sen}^2 1''$$

espressi in unità della settima cifra decimale sono rispettivamente

$$1{,}02232\,; \quad 5\,.\,40676 - 10\,, \quad 5\,.\,10683 - 10\,.$$

Cosicchè le formole pel calcolo numerico del triangolo considerato, nel caso che $\frac{\omega}{2}$ non superi $30'$, sono le seguenti:

$$\log \operatorname{tg} \psi = \log b - \log c \quad \ldots (4)$$

$$\left.\begin{aligned}\log a = \log c + \operatorname{colog} \cos \psi + [1\,.\,02232] \operatorname{sen} \psi \cos \psi\,.\,\omega - \\ - [5\,.\,407 - 10] \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \psi\,.\,\omega^2\end{aligned}\right\} \quad \ldots (5)$$

$$\left.\begin{aligned}\log \operatorname{sen} B = \log \operatorname{sen} \psi - [1\,.\,02232] \operatorname{sen} \psi \cos \psi\,.\,\omega + \\ + [5\,.\,407 - 10] \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \psi\, \omega^2 - [5\,.\,107 - 10]\, \omega^2\end{aligned}\right\} \quad \ldots (6)$$

Nelle formole precedenti ω dev' essere espresso in secondi. Se l'angolo A del triangolo ABC fosse uguale a $90^\circ - \frac{\omega}{2}$, le formole (5) e (6) diventerebbero rispettivamente:

$$\left.\begin{aligned}\log a = \log c + \operatorname{colog} \cos \psi - [1\,.\,02232] \operatorname{sen} \psi \cos \psi\,.\,\omega - \\ - [5\,.\,407 - 10] \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \psi\,.\,\omega^2\end{aligned}\right\} \quad \ldots (7)$$

$$\left.\begin{aligned}\log \operatorname{sen} B = \log \operatorname{sen} \psi + [1\,.\,02232] \operatorname{sen} \psi \cos \psi\,.\,\omega + \\ + [5\,.\,407 - 10] \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \psi\,.\,\omega^2 - [5\,.\,107 - 10]\, \omega^2\end{aligned}\right\} \quad \ldots (8)$$

ESEMPIO.

Dati

$b = 12000$ (metri)
$c = 15000$
$A = 90^\circ\ 30'$

$\omega = 1^\circ = 3600''$

$\log b = 4.\ 0791812$
$\text{Colog}\, c = 5.\ 8239087$

$\log \text{tg}\, \psi = 9.\ 9030899$

$\psi = 38^\circ 39' 35''.\ 29$

Calcolo del 1° termine

$\log \omega = 3.\ 55630$
$\log \text{sen}\, \psi = 9.\ 79567$
$\log \cos \psi = 9.\ 89258$

$3.\ 24455$
$[\ ] = 1.\ 02232$

$\log 1^\circ\ \text{t.}^\text{e} = 4.\ 26687$

Calcolo del 2° term.

$3.\ 244$
$3.\ 245$
$5.\ 407$

$\log \text{sen}\, \psi = 9.\ 7956680$

$\log \cos \psi = 9.\ 8925781$

$\log 2^\circ\ \text{t.}^\text{e} = 1.\ 896\ 79$

Calcolo del 3° termine

$\log \omega = 3.556$
$\log \omega = 3.556$
$[\ ] = 5.107$

$\log 3^\circ\ \text{t.}^\text{e} = 2.219$

$3^\circ\ \text{t.}^\text{e} = 166$

1° termine 18487
— 2° termine — 79

Correz. = + 18408

$\log c = 4.\ 1760913$
$\text{colog} \cos \psi = 0.\ 1074219$
Correz. = + 18408

$\log a = 4.\ 2853540$

$\log \text{sen}\, \psi = 9.\ 7956680$
Correz. = — 18574

$\log \text{sen}\, B = 9.\ 7938106\ ;\quad B = 38^\circ\ 27'\ 52''.\ 04\ .$

Calcolando gli elementi del triangolo colle note formole di trigonometria rettilinea si ottiene:

$$\log a = 4.\ 2853541\ ;\quad B = 38^\circ\ 27'\ 52''.\ 04\ .$$

II.

Le formole precedenti si applicano facilmente al calcolo della distanza tra due punti dell'ellissoide terrestre, quando di questi punti sono note le posizioni geografiche.

Sieno A, B due punti le cui latitudini sieno φ, φ' e la loro differenza di longitudine sia θ.

Sul meridiano di A prendiamo il punto B' la cui latitudine sia φ' e sia BB' la geodetica che unisce i due punti B, B' aventi la medesima latitudine.

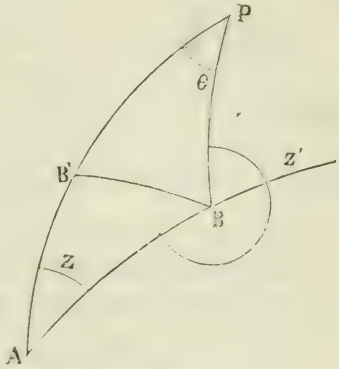


Fig. 2.

Indicando con S l'arco di meridiano AB', e con V l'arco di geodetica BB' è noto che, nei limiti indicati dal problema precedente, si ha:

$$\log V = \log \theta . N' \operatorname{sen} 1''. \cos \varphi' - \frac{M}{24} \operatorname{sen}^2 1'' \theta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi' \quad (*)$$

$$\log S = \log (\varphi' - \varphi) \rho_m \operatorname{sen} 1'',$$

dove N' è la gran normale nel punto B e ρ_m il raggio di curvatura del meridiano nel punto la cui latitudine è $\varphi_m = \frac{\varphi + \varphi'}{2}$.

L'angolo $AB'B = 90^\circ + \frac{m'}{2}$, essendo m' la convergenza dei meridiani tra B' e B, cioè:

$$m' = \theta \operatorname{sen} \varphi'. \qquad \ldots (8)$$

Però l'angolo corrispondente ad $\frac{\omega}{2}$ del problema precedente non è $\frac{m'}{2}$ perchè l'angolo $AB'B$ è angolo del triangolo sferoidico.

Se m è la convergenza dei meridiani tra i punti A e B, cioè

$$m = \theta \frac{\operatorname{sen} \varphi_m}{\cos \frac{1}{2} (\varphi' - \varphi)}$$

o più semplicemente

$$m = \theta \operatorname{sen} \varphi_m , \qquad \ldots (9)$$

(*) Cfr. N. Jadanza: *Sulla misura di un arco di parallelo terrestre* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XIX).

è noto che, indicando con 3ε l'eccesso sferoidico del triangolo $AB'B$, si ha

$$3\varepsilon = m' - m \,.$$

Si avrà quindi

$$\frac{\omega}{2} = \frac{m'}{2} - \varepsilon$$

ossia

$$\omega = m' - 2\varepsilon$$

ovvero

$$\omega = \frac{2}{3}\, m + \frac{1}{3}\, m' . \qquad \ldots (10)$$

Le formole date nel numero precedente diventano adunque nel nostro caso, osservando che si ha

$$\log \frac{M}{24} \operatorname{sen}^2 1''.\ 10^7 = 4.\ 62871 - 10 :$$

$$\log V = \log N' \operatorname{sen} 1''.\ \theta \cos \varphi' - [4.\ 629 - 10]\, \theta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi' \ldots (11)$$

$$\log S = \log (\varphi' - \varphi) \,.\, \rho_m \operatorname{sen} 1'' \qquad \ldots (12)$$

$$\log \operatorname{tg} \psi = \log V + \operatorname{colog} S \qquad \ldots (13)$$

$$\left.\begin{aligned} \log s = \log S + \operatorname{colog} \cos . \psi + [1.\ 02232] \operatorname{sen} \psi \cos \psi . \omega - \\ - [5.\ 407 - 10] \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \psi . \omega^2 \end{aligned}\right\} \ldots (14)$$

$$\left.\begin{aligned} \log \operatorname{sen} A = \log \operatorname{sen} \psi - [1.\ 02232] \operatorname{sen} \psi \cos \psi . \omega + \\ + [5.\ 407 - 10] \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \psi . \omega^2 - [5.\ 107 - 10] \omega^2 . \end{aligned}\right\} \ldots (15)$$

L'angolo A non è l'azimut di B su A: indicando con Z codesto azimut si avrà

$$Z = A + \frac{1}{3}(m' - m) \,. \qquad \ldots (16)$$

Se Z' è l'azimut di A su B, questo sarà dato da

$$Z' = 180^\circ + Z + m \,. \qquad \ldots (17)$$

Nel calcolo numerico le quantità m, m' bisognerà considerarle come quantità algebriche; esse sono positive o negative secondochè la differenza di longitudine θ tra i punti A e B è positiva o negativa, ossia secondo che il punto B è ad oriente o ad occidente di A.

Le quantità $N' \operatorname{sen} 1''$, $\rho_m \operatorname{sen} 1''$ sono date da apposite tavole.

ESEMPIO.

Dati

Latitudine di $A = \varphi = 52^\circ\ 14'\ 24''.\ 0682$

Latitudine di $B = \varphi' = 52\ \ 25\ \ 07\ .\ 1338$

Differenza di longitudine $\theta = -\ 0^\circ\ 11'\ 29''.\ 6708 = -\ 689''.\ 6708$

$$\varphi_m = 52^\circ\ 19'\ 45''.\ 601$$

$$\varphi' - \varphi = \Delta\varphi = \ \ 0^\circ\ 10'\ 43''.\ 0656 = +\ 643''.\ 0656$$

$\log\theta = 2.\ 8386418\ n$

$\log \operatorname{sen}\varphi' = 9.\ 8989928$

$\log m' = 2.\ 7376346\ n$

$m' = -546''.\ 556$

$\log\theta = 2.\ 8386418\ n$

$\log \operatorname{sen}\varphi_m = 9.\ 8984709$

$\log m = 2.\ 7371127\ n$

$m = -545''.\ 900$

$3\varepsilon = -\ 0''.\ 656$

$\varepsilon = -\ 0\ .\ 219$

$\omega = -\ 546.\ 118$

$\log\omega = \ \ 2.\ 73729\ n$

$\log\Delta\varphi = 2.8082553$

$\log\rho_m \operatorname{sen} 1'' = 1.4900398$

$\log S = 4.2982951$

$\operatorname{colog}\cos\psi = 0.0776658$

Correz. $= \ \ +\ 2634$

$\log s = 4.3762243$

$\log\theta = 2.8386418\ n$

$\log N \operatorname{sen} 1'' = 1.4911305$

$\log\cos\varphi' = 9.7852496$

4.1150219

Correz. $= \ \ -\ 1$

$\log V = 4.1150218\ n$

$\operatorname{colog} S = 5.7017049$

$\log \operatorname{tg}\psi = 9.8167267\ n$

$\psi = 360^\circ - 33^\circ\ 15'14''.967$

$\psi = 326^\circ 44'\ \ 45''.\ 033$

$\log \operatorname{sen}\psi = 9.7390609\ n$

$\log\cos\psi = 9.9223342$

$\log\omega = \ \ 2.63729\ n$

$\log\omega \operatorname{sen}\psi\cos\psi = 2.39768$

1.02232

$\log 1^\circ$ termine $= 3.42100$

1° termine $= 2636$

$-\ 2$

Correz. $= 2634$

4.629

$\log\theta^2 = 5.677$

$\log \operatorname{sen}^2\varphi' = 9.978$

0.104

1

$\log V = 4.1150218\ n$

$\operatorname{colog} s = 5.6237757$

$9.7387975\ n$

3° termine $= \ -\ 4$

$\log \operatorname{sen} A = 9.7387971\ n$

$A = 326^\circ\ 46'\ 07''.\ 165$

$\varepsilon = -\ 0.\ 219$

$Z = 326^\circ\ 46'\ 06''.\ 946$

$180 + Z = 146^\circ\ 46'\ 06.\ 946$

$m = \ \ -\ 09\ \ 05.\ 900$

$Z' = 146^\circ\ 37'\ 01''.046$

2.398

2.399

5.407

2° term. $= \ 2$

$\log\omega^2 = 5.\ 475$

$5.\ 106 - 10$

$0.\ 582$

3° termine $= \ \ 4$

Il medesimo calcolo fatto da Börsch con altro metodo (*) ha dato i risultamenti seguenti

$$\log s = 4.\ 3762243$$

$$Z = 326^\circ\ 46'\ 06''.\ 951\ ;\quad Z' = 146^\circ\ 37'\ 01''.\ 05.$$

Nell'esempio precedente il calcolo di $\log \operatorname{sen} A$ si è fatto colla formola

$$\log \operatorname{sen} A = \log V + \operatorname{colog} s - [5.\ 107 - 10]\,\omega^2 \quad \ldots (16)$$

che è identica alla (15), la quale è da adoperarsi di preferenza quando non si voglia calcolare che i soli azimut della geodetica AB ai suoi estremi.

III.

Quando la differenza di longitudine e la differenza tra le latitudini dei due punti sono minori di $10'$, se riteniamo come trascurabili gli errori che provengono da due o tre unità nella settima cifra del logaritmo di s, e da quattro o cinque unità nel logaritmo $\operatorname{sen}\psi$, le formole precedenti si semplificano giacchè si annulleranno tutti i termini in ω^2. In questo caso si può anche fare a meno della correzione dovuta all'eccesso sferoidico del triangolo, poichè (almeno per l'Italia) questo non raggiunge mai il *secondo*. In tale ipotesi l'angolo ω si riterrà eguale a $\theta \operatorname{sen}\varphi'$, quindi se si pone

$$P = \frac{M}{2} \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen}\varphi' ,$$

le formole precedenti si riducono alle seguenti semplicissime:

$$\log V = \log N' \operatorname{sen} 1''.\ \theta \cos\varphi' \quad \ldots (16)$$

$$\log S = \log \Delta\varphi\,.\,\rho_m \operatorname{sen} 1'' \quad \ldots (17)$$

$$\log \operatorname{tg}\psi = \log V + \operatorname{colog} S \quad \ldots (18)$$

$$\log s = \log S + \operatorname{colog}\cos\psi + P \operatorname{sen}\psi \cos\psi\,.\,\theta \quad \ldots (19)$$

(*) Cfr. Börsch Dr. Otto: *Anleitung zur Berechnung geodätischer coordinaten;* Cassel 1885, pag. 82.

$$Z = \psi - \frac{P \operatorname{sen} \psi \cos \psi . \theta}{\partial \psi} \qquad \ldots (20)$$

($\partial \psi$ è la differenza tavolare di sen ψ per $1''$)

$$Z' = 180 + Z + \theta \operatorname{sen} \varphi_m . \qquad \ldots (21)$$

Si noti che la quantità $\partial \psi$, cioè la differenza tavolare di sen ψ per $1''$ dev'essere considerata come una quantità algebrica, quindi essa è positiva nel 1° e 3° quadrante, negativa nel 2° e 4°.

ESEMPIO.

Dati

Latitudine di $A = \varphi = 44° \; 01' \; 03''.98$ $\qquad \theta = 4' \; 49''.13$

Latitudine di $B = \varphi' = 43 \;\; 57 \;\; 55 \,.\, 31$ $\qquad = \; 289''.13$

$\Delta \varphi = -\, 3' \; 08''.67 = -188''.67$

$\varphi_m = 43° \; 59' \; 29''.64$

$\log \Delta \varphi = 2.\,2757028 \; n$

$\log \rho_m \operatorname{sen} 1'' = 1.\,4894108$

$\log S = 3.\,7651136 \; n$

$\operatorname{colog} \cos \psi = 0.\,1736744 \; n$

$3.\,9387880$

$-\,1051$

$\log s = 3.\,9386829$

$\psi = 132° \; 05' \; 49''.01$

$-\,55.\,31$

$Z = 132° \; 04' \; 53''.70$

$180 \quad 3 \;\; 20 \,.\, 82$

$Z' = 312 \;\; 08 \;\; 14 \,.\, 52$

$\log \theta = 2.\,4610932$

$\log N' \operatorname{sen} 1'' = 1.\,4909180$

$\log \cos \varphi' = 9.\,8571874$

$\log V = 3.\,8091986$

$\operatorname{colog} S = 6.\,2348864 \; n$

$\log \operatorname{tg} \psi = 0.\,0440850 \; n$

$\psi = 180° - 47° \; 54' \; 10''.99$

$\psi = 132° \quad 05' \quad 49''.01$

$\log \cos \psi = 9.\,8263256 \; n$

$\log \operatorname{sen} \psi = 9.\,8704107$

$\log P = 0.\,86384$

$\log \theta = 2.\,46109$

$3.\,02166 \; n$

$\log \theta = 2.\,4610932$

$\log \operatorname{sen} \varphi_m = 9.\,8417051$

$2 \;\; 3027983$

$m = 200''.82$

$= 3'20''.82$

$$\frac{-1051}{-19} = 55.\,3$$

Se coi dati

$$\varphi = 44^\circ\, 01''\, 03.\, 98$$

$$Z = 132\ \ 04\ \ 53.\, 70$$

$$\log s = 3.\, 9386829$$

si calcolano φ', Z', θ per mezzo delle formole di Legendre, si ottengono identicamente i valori dati di φ', θ e quello calcolato di Z'.

Per maggiore comodità nella tavola annessa si trovano i valori di $\log P$ per tutti i valori di φ' compresi da $\varphi' = 36^\circ$ a $\varphi' = 70^\circ$.

IV.

Le formole precedenti, come vedesi, sono facilissime e comode al calcolo numerico, specialmente se si riflette che le quantità ρ_m sen $1''$, N' sen $1''$ sono date da una tavola che trovasi in parecchie raccolte di tavole geodetiche.

Nasce quindi spontanea la domanda: *Si può prendere una distanza tra due punti così calcolata come base di una piccola triangolazione topografica?*

Per rispondere a tale domanda bisogna prima risolvere la seguente questione:

Quale sarà l'errore relativo sulla ipotenusa di un triangolo rettangolo in conseguenza di errori relativi noti sui lati?

Essendo

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}\ ,$$

differenziando logaritmicamente si ottiene:

$$\frac{da}{a} = \frac{b\,db + c\,dc}{b^2 + c^2} = \frac{db}{b\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)} + \frac{dc}{c\left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right)}\ .$$

Se l'errore relativo $\frac{db}{b}$ è maggiore di $\frac{dc}{c}$, si avrà

$$\frac{da}{a} < \frac{db}{b}\left[\frac{1}{1 + \frac{c^2}{b^2}} + \frac{1}{1 + \frac{b^2}{c^2}}\right],$$

ossia

$$\frac{da}{a} < \frac{db}{b},$$

e quindi: *L'errore relativo della ipotenusa di un triangolo rettangolo è minore del maggiore degli errori relativi sui due cateti.*

Questo risultamento ci fa conoscere in quali condizioni possiamo calcolare la distanza tra due punti di cui sono note le posizioni geografiche perchè essa non abbia un errore relativo superiore ad $\frac{1}{n}$.

Ordinariamente le latitudini e le longitudini dei diversi punti di una rete trigonometrica sono date fino ai *centesimi di secondo*, e si può ammettere che sulle differenze $\Delta\varphi$ e θ l'errore non superi *due centesimi* di secondo. Quindi se si vuole che l'errore sulla distanza tra i due punti sia inferiore ad $\frac{1}{n}$, essendo x il numero dei secondi contenuti nel più piccolo dei numeri $\Delta\varphi$, θ sarà

$$\frac{0.02}{x} = \frac{1}{n},$$

donde

$$x = \frac{2n}{100}. \qquad \ldots (22)$$

Volendo p. e. che la distanza tra i due punti abbia un errore relativo inferiore ad $\frac{1}{20000}$ dovrà essere

$$n = 400''$$

ossia i due punti debbono differire di circa $7'$ in latitudine e longitudine.

Sulla distanza di due punti che differiscono di x'' in latitudine e longitudine si avrà un errore relativo

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{50x}. \qquad \ldots (23)$$

Tavola ausiliaria.

φ	log P	diff.	$p.p.$	
36° 00′	0. 79155		170	
		173		
10	0. 79328		1	17. 0
		173	2	34. 0
20	0 79501		3	51. 0
		171	4	68. 0
30	0. 79672		5	85. 0
		170	6	102. 0
40	0. 79842		7	119. 0
		169	8	136. 0
50	0. 80011		9	153. 0
		168		
37 00	0. 80179			
		167		
10	0. 80346			
		167		
20	0 80513			
		165	160	
30	0. 80678			
		164	1	16. 0
40	0. 80842		2	32. 0
		163	3	48. 0
50	0. 81005		4	64. 0
		162	5	80. 0
38 00	0. 81167		6	96. 0
		161	7	112. 0
10	0. 81328		8	128. 0
		161	9	144. 0
20	0. 81489			
		159		
30	0. 81648			
		158		
40	0. 81806			
		158		
50	0. 81964		150	
		156		
39 00	0. 82120		1	15. 0
		156	2	30. 0
10	0. 82276		3	45. 0
		154	4	60. 0
20	0. 82430		5	75. 0
		154	6	90. 0
30	0. 82584		7	105. 0
		153	8	120. 0
40	0. 82737		9	135. 0
		152		
50	0. 82889			
		151		
40 00	0. 83040			

$$P = 10^7 . \frac{M}{2} . \text{sen } 1'' . \text{sen } \varphi .$$

Tavola ausiliaria.

φ	log P	diff.	$p.p.$	
40° 00′	0. 83040		145	
		150		
10	0. 83190		1	14. 5
		149	2	29. 0
20	0. 83339		3	43. 5
		148	4	58. 0
30	0. 83487		5	72. 5
		148	6	97. 0
40	0. 83635		7	101. 5
		147	8	116. 0
50	0. 83782		9	130. 5
		145		
41 00	0. 83927			
		145		
10	0. 84072			
		144		
20	0. 84216			
		143	140	
30	0. 84359			
		143	1	14. 0
40	0. 84502			
		141	2	28. 0
50	0. 84643		3	42. 0
		141	4	56. 0
42 00	0. 84784		5	70. 0
		140	6	84. 0
10	0. 84924			
		139	7	98. 0
20	0. 85063			
		138	8	112. 0
30	0. 85201			
		138	9	126. 0
40	0. 85339			
		136		
50	0. 85475		135	
		136		
43 00	0. 85611			
		135	1	13. 5
10	0. 85746			
		135	2	27. 0
20	0. 85881			
		133	3	40. 5
30	0. 86014			
		133	4	54. 0
40	0. 86147			
		132	5	67. 5
50	0. 86279			
		131	6	81. 0
44 00	0. 86410			
			7	94. 5
			8	108. 0
			9	121. 5

$$P = 10^7 . \frac{M}{2} . \text{sen } 1'' . \text{sen } \varphi .$$

Tavola ausiliaria.

φ	log P	diff.	p . p.	
44° 00′	0. 86410		130	
		131		
10	0. 86541		1	13. 0
		129	2	26. 0
20	0. 86670		3	39. 0
		129	4	52. 0
30	0. 86799		5	65. 0
		128	6	78. 0
40	0. 86927		7	91. 0
		128	8	104. 0
50	0. 87055		9	117. 0
		126		
45 00	0. 87181			
		126		
10	0. 87307			
		126		
20	0. 87433			
		124	125	
30	0. 87557			
		124	1	12. 5
40	0. 87681		2	25. 0
		123	3	37. 5
50	0. 87804		4	50. 0
		122	5	62. 5
46 00	0. 87926		6	75. 0
		122	7	87. 5
10	0. 88048		8	100. 0
		121	9	112. 5
20	0. 88169			
		120		
30	0. 88289			
		120		
40	0. 88409			
		119	120	
50	0. 88528			
		118		
47 00	0 88646		1	12. 0
		117	2	24. 0
10	0. 88763		3	36. 0
		116	4	48. 0
20	0. 88879		5	60. 0
		117	6	72. 0
30	0. 88996		7	84. 0
		116	8	96. 0
40	0. 89112		9	108. 0
		114		
50	0. 89226			
		114		
48 00	0. 89340			

$$P = 10^7 . \frac{M}{2} . \text{sen } 1'' . \text{ sen } \varphi .$$

Tavola ausiliaria.

φ	log P	diff.	$p \cdot p$.	
48° 00′	0. 89340		110	
		114		
10	0. 89454		1	11. 0
		113	2	22. 0
20	0. 89567		3	33. 0
		112	4	44. 0
30	0. 89679		5	55. 0
		111	6	66. 0
40	0. 89790		7	77. 0
		111	8	88. 0
50	0. 89901		9	99. 0
		110		
49 00	0. 90011			
		109		
10	0. 90120			
		109		
20	0. 90229			
		109	105	
30	0. 90338			
		107	1	10. 5
40	0. 90445		2	21. 0
		107	3	31. 5
50	0. 90552		4	42. 0
		106	5	52. 5
50 00	0. 90658		6	63. 0
		106	7	73. 5
10	0. 90764		8	84. 0
		105	9	94. 5
20	0. 90869			
		105		
30	0. 90974			
		103		
40	0. 91077			
		104	100	
50	0. 91181			
		102	1	10 0
51 00	0. 91283		2	20. 0
		102	3	30. 0
10	0. 91385		4	40. 0
		102	5	50. 0
20	0. 91487		6	60. 0
		100	7	70. 0
30	0. 91587		8	80. 0
		101	9	90 6
40	0. 91688			
		99		
50	0. 91787			
		99		
52 00	0. 91886			

$$P = 10^7 . \frac{M}{2} . \text{sen } 1'' . \text{sen } \varphi .$$

Tavola ausiliaria.

φ	log P	diff.	$p \cdot p \cdot$	
52° 00′	0. 91886		95	
		99		
10	0. 91985		1	9. 5
		97	2	19. 0
20	0. 92082		3	28. 5
		98	4	38. 0
30	0. 92180		5	47. 5
		96	6	57. 0
40	0. 92276		7	66. 5
		96	8	76. 0
50	0. 82372		9	85. 5
		96		
53 00	0. 92468			
		95		
10	0. 92563			
		94		
20	0. 92657			
		94	90	
30	0. 92751			
		93	1	9. 0
40	0. 92844		2	18. 0
		93	3	27. 0
50	0. 92937		4	36. 0
		92	5	45. 0
54 00	0. 93029		6	54. 0
		91	7	63. 0
10	0. 93120		8	72. 0
		91	9	81. 0
20	0. 93211			
		91		
30	0. 93302			
		89		
40	0. 93391			
		90		
50	0. 93481		85	
		88		
55 00	0. 93569			
		89	1	8. 5
10	0. 93658		2	17. 0
		87	3	25. 5
20	0. 93745		4	34. 0
		87	5	42. 5
30	0. 93832		6	51. 0
		87	7	59. 5
40	0. 93919		8	68. 0
		86	9	76. 5
50	0. 94005			
		85		
56 00	0. 94090			

$$P = 10^7 . \frac{M}{2} . \text{sen } 1'' . \text{sen } \varphi .$$

Tavola ausiliaria.

φ	log P	diff.	$p \cdot p \cdot$	
56° 00′	0. 94090		80	
		85		
10	0. 94175		1	8. 0
		85	2	16. 0
20	0. 94260			
		84	3	24. 0
30	0. 94344			
		83	4	32. 9
40	0. 94427			
		83	5	40. 0
50	0. 94510			
		82	6	48. 0
57 00	0. 94592			
		82	7	56. 0
10	0. 94674			
		81	8	64. 0
20	0. 94755			
		81	9	72. 0
30	0. 94836			
		80	75	
40	0. 94916			
		80	1	7. 5
50	0. 94996			
		79	2	15. 0
58 00	0. 95075			
		79	3	22. 5
10	0. 95154			
		78	4	30. 0
20	0. 95232			
		78	5	37. 5
30	0. 95310			
		77	6	45. 0
40	0. 95387			
		76	7	52. 5
50	0. 95463			
		77	8	60 0
59 00	0. 95540			
		75	9	67. 5
10	0. 95615			
		75	70	
20	0. 95690			
		75	1	7. 0
30	0. 95765			
		74	2	14. 0
40	0 95839			
		74	3	21. 0
50	0. 95913			
		73	4	28. 0
60 00	0. 95986			
			5	35. 0
			6	42. 0
			7	49. 0
			8	56. 0
			9	63. 0

$$P = 10^7 . \frac{M}{2} . \text{sen } 1'' . \text{sen } \varphi .$$

Tavola ausiliaria.

φ	log P	diff.	$p.p.$	
60° 00′	0. 95986		68	
		73		
10	0. 96059		1	6. 8
		72	2	13. 6
20	0. 96131		3	20. 4
		72	4	27. 2
30	0. 96203		5	34. 0
		71	6	40. 8
40	0. 96274		7	47. 6
		71	8	54. 4
50	0. 96345		9	61. 2
		70		
61 00	0. 96415		65	
		70		
10	0. 96485		1	6. 5
		69	2	13. 0
20	0. 96554		3	19. 5
		69	4	26. 0
30	0. 96623		5	32. 5
		68	6	39. 0
40	0. 96691		7	45. 5
		68	8	52. 0
50	0. 96759		9	58. 5
		67		
62 00	0 96826		63	
		67		
10	0. 96893		1	6. 3
		67	2	12. 6
20	0. 96960		3	18. 9
		66	4	25. 2
30	0. 97026		5	31. 5
		65	6	37. 8
40	0. 97091		7	44. 1
		65	8	50. 4
50	0. 97156		9	56. 7
		65		
63 00	0. 97221			
		64		
10	0. 97285			
		64		
20	0. 97349			
		63		
30	0. 97412			
		63		
40	0. 97475			
		62		
50	0. 97537			
		62		
64 00	0. 97599			

$$P = 10^7 . \frac{M}{2} . \text{sen } 1'' . \text{sen } \varphi .$$

Tavola ausiliaria.

φ	log P	diff.	$p \cdot p \cdot$	
64° 00′	0. 97599		60	
		61	1	6. 0
10	0. 97660		2	12. 0
		61	3	18. 0
20	0. 97721		4	24. 0
		61	5	30. 0
30	0. 97782		6	36. 0
		60	7	42. 0
40	0. 97842		8	48. 0
		59	9	54. 0
50	0. 97901			
		60	55	
65 00	0. 97961		1	5. 5
		58	2	11. 0
10	0. 98019		3	16. 5
		59	4	22. 0
20	0. 98078		5	27. 5
		57	6	33. 0
30	0. 98135		7	38. 5
		58	8	44. 0
40	0. 98193		9	49. 5
		57		
50	0. 98250		53	
		56	1	5. 3
66 00	0. 98306		2	10. 6
		56	3	15. 9
10	0. 98362		4	21. 2
		56	5	26. 5
20	0. 98418		6	31. 8
		55	7	37. 1
30	0. 98473		8	42. 4
		54	9	47. 7
40	0. 98527			
		55		
50	0. 98582			
		54		
67 00	0. 98636			
		53		
10	0. 98689			
		53		
20	0. 98742			
		53		
30	0. 98795			
		52		
40	0. 98847			
		51		
50	0. 98898			
		52		
68 00	0. 98950			

$$P = 10^7 . \frac{M}{2} \text{ sen } 1''. \text{ sen } \varphi .$$

Tavola ausiliaria.

φ	log P	diff.	$p \cdot p \cdot$	
68° 00′	0. 98950		50	
		50	1	5. 0
10	0. 99000		2	10. 0
		51	3	15. 0
20	0. 99051		4	20. 0
		50	5	25. 0
30	0. 99101		6	30. 0
		49	7	35. 0
40	0. 99150		8	40. 0
		49	9	45. 0
50	0. 99199			
		49	47	
69 00	0. 99248			
		48	1	4. 7
10	0. 99296		2	9. 4
		48	3	14. 1
20	0. 99344		4	18. 8
		48	5	23. 5
30	0. 99392		6	28. 2
		47	7	32. 9
40	0. 99439		8	37. 6
		46	9	42. 3
50	0. 99485			
		47		
70 00	0. 99532			

$$P = 10^7 . \frac{M}{2} . \operatorname{sen} 1'' . \operatorname{sen} \varphi .$$

RICERCHE

Per riconoscere se la deviazione della mira meridiana dell'Osservatorio di Torino, a Cavoretto, dal piano del meridiano è sensibilmente nulla come nel 1828

del Socio Prof. Alessandro Dorna

NOTA TERZA

I.

Nella sera dell'8 agosto 1885 osservai altri passaggi di stelle al circolo meridiano, anche col filo di mezzo del reticolo del cannocchiale al centro dell'immagine della mira di Cavoretto, per applicarli eziandio alla ricerca dell'Azimuth di questa mira, come quelli del giorno 5 nella Nota precedente del 7 marzo.

Continuai a farmi registrare i tempi dei passaggi ai nove fili col pendolo siderale Dent, dallo studente C. B.; e lo strumento era ancora col circolo ad Ovest.

Il pendolo dal mezzodì del giorno 8 al successivo avendo tardato di $1^s,08$ e questo ritardo potendosi considerare nelle ore successive come costante, perchè nel giorno seguente fu ancora di $0^s,97$, presi $\delta T = 0^s,045$.

In riguardo ai tempi delle osservazioni ho fatto $T_0 = 19^h 10^m$, e come nella Nota precedente, da cui, per maggior chiarezza, trascrivo le due formole:

$$x + \frac{\operatorname{sen}(\varphi - \delta)}{\cos\delta} y + \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos\delta} z + \frac{1}{\cos\delta} u + n = 0 \ ,$$

$$n = \left| 75^\circ - (\alpha - T_m) \right| + (\Delta i - 0^s,021 \cos\varphi) \sec\delta + (T - T_0)\,\delta T \ ,$$

posi, senza errore sensibile nell'espressione $(T - T_0)\,\delta T$, T_m al posto di T. Inoltre stabilii la relazione $\Delta T_0 = 76^s + x$. Disponendo in seguito i calcoli come ho fatto per le osservazioni del giorno 5 nella Nota citata, formai le tabelle di numeri e le equazioni seguenti, da cui dedussi la correzione ΔT_0 del pendolo per $19^h 10^m$ e le tre costanti strumentali $y(=a)$, $z(=b)$, $u(=c)$, con cui finalmente ricavai l'azimuth $-A$ della mira di Cavoretto come è spiegato nelle due Note che precedono.

Stelle	μ Herculis	γ Draconis	72 Ophinchii	Vega	ε Aquilae	ζ Aquila
Grandezze	3ª 4ª	2ª 3ª	3ª 4ª	1ª	4ª	3ª
Declinazioni δ	27° 48′	51° 31′	9° 33′	38° 41′	14° 55′	13° 42′
Tempi del pendolo siderale Dent negl'istanti dei passaggi ai nove fili — I	17h40m10s,3	17h51m55s,2	18h 0m10s,4	18h31m11s,6	18h52m40s,7	18h58m24s,
II	19,2	52 7,6	18,3	21,4	48,5	32,
III	27,7	19,5	26,0	31,3	56,2	39,
IV	36,2	31,3	33,4	40,3	53 3,9	47,
V	44,1	42,9	40,3	49,4	11,2	54,
VI	51,8	53,7	47,4	58,3	18,1	59 1,
VII	41 0,3	53 5,4	54,9	32 7,5	26,0	8,
VIII	8,3	16,3	1 2,0	16,7	33,3	16,
IX	17,5	30,2	10,3	27,7	41,6	24,
Media Tm	17h40m43s,93	17h52m42s,46	18h 0m46s,33	18h31m49s,36	18h53m11s,06	18h58m34s,
Ascensioni rette α	17 41 59,82	17 53 58,40	18 1 56,54	18 33 5,31	18 54 26,99	19 0 10,
$\alpha - Tm$	1 15,89	1 15,94	1 16,21	1 15,95	1 15,93	1 16,
$Tm - 19h10m$	$-1h29m16s,07$	$-1h17m17s,54$	$-1h9m19s,67$	$-0h38m10s,64$	$-0h16m48s,94$	$-0h11m5s,$
cos δ	9,94674	9,79399	9,99394	9,89244	9,98511	9,98746
I_1	33s,8	47s,7	29s,9	37s,8	30s,5	30s,2
log I_1	1,52892	1,67852	1,47567	1,57749	1,48430	1,48001
log i_1	1,47566	1,47251	1,46961	1,46993	1,46941	1,46747
i_1	29s,899	29s,683	29s,486	29s,507	29s,472	29s,341
I_2	24s,9	35s,3	22s,0	28s,0	22s,7	22s,2
log I_2	1,39620	1,54777	1,34242	1,44716	1,35603	1,34635
log i	1,34294	1,34176	1,33636	1,33960	1,34114	1,33381
i_2	22s,026	21s,966	21s,695	21s,857	21s,935	21s,568

uilae	δ Aquilae	γ Aquilae	Altaïr	θ Aquilae	ε Delphini	α Cigni
5ª	3ª 4ª	3ª	1ª 2ª	3ª	4ª	2ª 1ª
24′	2° 54′	10° 20′	8° 34′	— 1° 9′	10° 53′	44° 53′
1°42ˢ,0	19h17ᵐ59ˢ,4	19h 39ᵐ 4ˢ,5	19h43ᵐ28ˢ,2	20h 3ᵐ40ˢ,2	20h26ᵐ 0ˢ,0	20h35ᵐ36ˢ,4
49,7	18 7,1	12,3	36,2	48,1	7,9	47,5
57,5	14,9	19,8	42,2	54,9	16,2	58,4
5,4	21,8	27,7	50,3	4 2,4	23,2	36 7,8
12,0	29,0	34,6	57,5	9,3	30,3	18,3
18,9	35,8	41,5	44 4,4	16,4	37,4	27,6
26,6	43,4	49,3	11,9	23,8	44,9	38,4
33,9	50,5	56,3	19,5	30,8	52,5	48,5
42,4	58,9	40 5,2	27,4	39,3	27 0,5	37 0,4
ᵐ12ˢ,04	19h18ᵐ28ˢ,98	19h39ᵐ34ˢ,58	19h43ᵐ57ˢ,51	20h 4ᵐ 9ˢ,47	20h26ᵐ30ˢ,32	20h35ᵐ18ˢ,14
28, 03	19 19 44, 99	19 40 50, 57	19 45 13, 41	20 5 25, 40	20 27 46, 26	20 37 34, 11
15, 99	4 16, 01	4 15, 99	4 15, 90	4 15, 93	4 15, 94	4 15, 97
ᵐ12ˢ,04	+ 0h 8ᵐ28ˢ,98	+0h29ᵐ34ˢ,58	+0h33ᵐ57ˢ,51	+ 0h54ᵐ 9ˢ,47	+ 1h16ᵐ36ˢ,32	+ 1h26ᵐ18ˢ,14
,99135	9,99944	9,99290	9,99513	9,99991	9,99207	9,85037
30ˢ,0	29ˢ,6	30ˢ,1	29ˢ,3	29ˢ,1	30ˢ,3	41ˢ,9
1,47712	1,47129	1,47857	1,46687	1,46389	1,48144	1,62221
1,46847	1,47073	1,47147	1,46200	1,46380	1,47351	1,47258
29ˢ,408	29ˢ,562	29ˢ,612	28ˢ,973	29ˢ,094	29ˢ,752	29ˢ,688
22ˢ,3	21ˢ,9	22ˢ,3	21ˢ,3	21ˢ,2	22ˢ,4	30ˢ,8
1,34830	1,34044	1,34830	1,32838	1,32634	1,35025	1,48855
1,33965	1,33988	1,34120	1,32351	1,32625	1,34232	1,33892
21ˢ,860	21ˢ,872	21ˢ,938	21ˢ,063	21ˢ,196	21ˢ,995	21ˢ,823

I_3	16s,4	23s,4	14s,3	18s,1	15s,0	[illegible]
log I_3	1,21494	1,36922	1,15534	1,25768	1,17609	1,1[illegible]
log i_3	1,16158	1,16321	1,14928	1,15012	1,16120	1,1[illegible]
i_3	14s,507	14s,562	14s,102	14s,129	14s,494	14[illegible]
I_4	7s,9	11s,6	6s,9	9s,1	7s,3	[illegible]
log I_4	0,89763	1,06446	0,83885	0,95904	0,86332	0,8[illegible]
log i_4	0,84437	0,85845	0,83279	0,85148	0,84843	0,8[illegible]
i	6s,988	7s,219	6s,804	7s,104	7s,054	6[illegible]
I_6	— 7s,7	— 10s,8	— 7s,1	— 8s,9	— 6s,9	—[illegible]
log I_6	n 0,88649	n 1,03342	n 0,85126	n 0,94939	n 0,83885	n 0,8[illegible]
log i_6	n 0,83323	n 0,82741	n 0,84520	n 0,84183	n 0,82596	n 0,8[illegible]
i	— 6s,811	— 6s,721	— 7s,002	— 6s,948	— 6s,668	— 6[illegible]
I_7	— 16s,2	— 22s,5	— 14s,6	— 18s,1	— 14s,8	—[illegible]
log I_7	n 1,20951	n 1,35218	n 1,16435	n 1,25768	n 1,17026	n 1,1[illegible]
log i_7	n 1,15625	n 1,14617	n 1,15829	n 1,15012	n 1,15537	n 1,1[illegible]
i_7	— 14s,330	— 14s,001	— 14s,393	— 14s,129	— 14s,301	— 14[illegible]
I_8	— 24s,2	— 33s,4	— 21s,7	— 27s,3	— 22s,1	—[illegible]
log I_8	n 1,38382	n 1,52375	n 1,33646	n 1,43616	n 1,34439	n 1,3[illegible]
log i_8	n 1,33056	n 1,31774	n 1,33040	n 1,32860	n 1,32950	n 1,3[illegible]
i_8	— 21s,407	— 20s,785	— 21s,399	— 21s,311	— 21s,355	— 21[illegible]
I_9	— 33s,4	— 47s,3	— 30s,0	— 38s,3	— 30s,4	—[illegible]
log I_9	n 1,52375	n 1,67486	n 1,47712	n 1,58320	n 1,48287	n 1,4[illegible]
log i_9	n 1,47049	n 1,46885	n 1,47106	n 1,47564	n 1,46798	n 1,4[illegible]
i	— 29s,545	— 29s,434	— 29s,584	— 29s,898	— 29s,375	— 29s[illegible]
	i_1	i_2	i_3	i_4	i_6	i_7
Medie	29s,498	21s,753	14s,346	7s,003	— 6s,836	— 14s[illegible]

14s,5	14s,1	14s,8	15s,3	14s,4	14s,1	19s,9
16137	1,14922	1,17026	1,18469	1,15836	1,14922	1,29885
15272	1,14866	1,16316	1,17982	1,15827	1,14129	1,14922
3s,214	14s,082	14s,560	15s,129	14s,397	13s,845	14s,100
6s,6	7s,2	6s,9	7s,2	6s,9	7s,1	10s,5
81954	0,85733	0,83885	0,85733	0,83885	0,85126	1,02119
81089	0,85677	0,83175	0,85246	0,83876	0,84333	0,87156
6s,470	7s,191	6s,788	7s,120	6s,899	6s,972	7s,440
— 6s,9	— 6s,8	— 6s,9	— 6s,9	— 7s,1	— 7s,1	— 9s,3
83885	n 0,83251	n 0,83885	n 0,83885	n 0,85126	n 0,85126	n 0,96848
83020	n 0,83195	n 0,83175	n 0,83398	n 0,85117	n 0,84333	n 0,81885
6s,764	— 6s,791	— 6s,788	— 6s,823	— 7s,099	— 6s,972	— 6s,589
— 14s,6	— 14s,4	— 14s,7	— 14s,4	— 14s,5	— 14s,6	— 20s,1
16435	n 1,15836	n 1,16732	n 1,15836	n 1,16137	n 1,16435	n 1,30320
15570	n 1,15780	n 1,16022	n 1,15349	n 1,16128	n 1,15642	n 1,15557
14s,312	— 14s,381	— 14s,462	— 14s,239	— 14s,497	— 14s,336	— 14s,242
— 21s,9	— 21s,5	— 21s,7	— 22s,0	— 21s,5	— 22s,2	— 30s,2
1,34044	n 1,33244	n 1,33646	n 1,34242	n 1,33244	n 1,34635	n 1,48001
1,33179	n 1,33188	n 1,32936	n 1,33755	n 1,33235	n 1,33842	n 1,33038
21s,468	— 21s,472	— 21s,348	— 21s,755	— 21s,496	— 21s,798	— 21s,398
— 30s,4	— 29s,9	— 30s,6	— 29s,9	— 30s,0	— 30s,2	— 42s,1
1,48287	n 1,47567	n 1,48572	n 1,47567	n 1,47712	n 1,48001	n 1,62428
1,47122	n 1,47511	n 1,47862	n 1,47080	n 1,47703	n 1,47208	n 1,47465
29s,800	— 29s,861	— 30s,104	— 29s,567	— 29s,994	— 29s,654	— 29s,830
i_0	i	$[i]$			Δi	
21s,413	— 29s,721	72s,600 — 72s,263 = 0s,337			0s,038	

$\log \frac{\delta T}{3600}$ 5,09691					
$\log (T - T_0)^5$	n 3,72885	n 3,66629	n 3,61906	n 3,35996	n 3,00
$\log (T - T_0)^4 \delta T$	n 8,82576	n 8,76320	n 8,71597	n 8,45687	n 8,10
n	+ 0s,069	+ 0s,039	− 0s,239	+ 0s,050	+ 0s,
$70s - (\alpha - Tm)$	+ 0s,11	+ 0s,06	− 0s,21	+ 0s,05	+ 0
$(T - T_0)^4 \delta T$	− 0,067	− 0,058	− 0,052	− 0,029	− 0
$(\Delta i - 0{,}021 \cos \varphi) \sec \delta$	0,026	0,037	0,023	0,029	0
$\log (\Delta i - 0{,}021 \cos \varphi)$ 8,36173	8,41499	8,56774	8,36779	8,46929	8,37
$\log \sec \delta$	0,05326	0,20601	0,00606	0,10756	0,09
$\frac{1}{\cos \delta}$	1,131	1,607	1,014	1,281	1
$\varphi - \delta$	17° 16′	− 6° 27′	35° 31′	6° 23′	30
$\log \cos (\varphi - \delta)$	9,97997	9,99724	9,91060	9,99730	9,93
$\log \frac{\cos (\varphi - \delta)}{\cos \delta}$	0,03323	0,20325	9,91666	0,10486	9,93
$\frac{\cos (\varphi - \delta)}{\cos \delta}$	1,080	1,597	0,825	1,273	0
$\log \operatorname{sen} (\varphi - \delta)$	9,47249	n 9,05052	9,76413	9,04603	9,70
$\log \frac{\operatorname{sen} (\varphi - \delta)}{\cos \delta}$	9,52575	n 9,25653	9,77019	9,15339	9,71
$\frac{\operatorname{sen} (\varphi - \delta)}{\cos \delta}$	0,336	− 0,181	0,589	0,142	0

2329	1,85757	2,70670	3,24910	3,30910	3,51181	3,66185	3,71417
2020	6,95448	7,80361	8,34601	8,40601	8,60872	8,75876	8,81108
,016	+ 0°,034	+ 0°,019	+ 0°,055	+ 0°,148	+ 0°,134	+ 0°,140	+ 0°,127
0°,00	+ 0°,01	— 0°,01	+ 0°,01	+ 0°,10	+ 0°,07	+ 0°,06	+ 0°,03
0,008	0,001	0,006	0,022	0,025	0,041	0,057	0,065
0,024	0,023	0,023	0,023	0,023	0,023	0,023	0,032
37427	8,37038	8,36229	8,36883	8,36660	8,36182	8,36966	8,31136
01254	0,00865	0,00056	0,00710	0,00487	0,00009	0,00793	0,14963
1,029	1,020	1,001	1,016	1,011	1,000	1,018	1,411
1° 22′	33° 40′	42° 10′	34° 41′	36° 30′	46° 13′	34° 9′	0° 11′
93138	9,92027	9,86983	9,91477	9,90518	9, 4006	9,95781	0,00000
94388	9,92892	9,87039	9,92187	9,91003	9,84013	9 92574	0,14963
0,879	0,849	0,742	0,825	0,813	0,692	0,843	1,411
71643	9,74379	9,82691	9,75569	9 77439	9,83851	9,74924	7,50512
72893	9,75244	9,82747	9,76279	9 77924	9,83858	9,75747	7,65475
0,536	0,566	0,672	0,579	0,602	0,722	0,572	0,005

Equazioni di condizione.

$$x + 0{,}336\ y + 1{,}080\ z + 1{,}131\ u + 0{,}069 = 0$$
$$x - 0{,}181\ y + 1{,}597\ z + 1{,}607\ u + 0{,}039 = 0$$
$$x + 0{,}589\ y + 0{,}825\ z + 1{,}014\ u - 0{,}239 = 0$$
$$x + 0{,}142\ y + 1{,}273\ z + 1{,}281\ u + 0{,}050 = 0$$
$$x + 0{,}520\ y + 0{,}895\ z + 1{,}035\ u + 0{,}081 = 0$$
$$x + 0{,}536\ y + 0{,}879\ z + 1{,}029\ u + 0{,}016 = 0$$
$$x + 0{,}566\ y + 0{,}849\ z + 1{,}020\ u + 0{,}034 = 0$$
$$x + 0{,}672\ y + 0{,}742\ z + 1{,}001\ u + 0{,}019 = 0$$
$$x + 0{,}579\ y + 0{,}835\ z + 1{,}016\ u + 0{,}055 = 0$$
$$x + 0{,}602\ y + 0{,}813\ z + 1{,}011\ u + 0{,}148 = 0$$
$$x + 0{,}722\ y + 0{,}692\ z + 1{,}000\ u + 0{,}134 = 0$$
$$x + 0{,}572\ y + 0{,}843\ z + 1{,}018\ u + 0{,}140 = 0$$
$$x + 0{,}005\ y + 1{,}411\ z + 1{,}411\ u + 0{,}127 = 0$$

Equazioni normali.

$$13\ x + 5{,}682\ y + 12{,}734\ z + 14{,}573\ u + 0{,}673 = 0$$
$$5{,}682\ x + 3{,}389\ y + 4{,}718\ z + 5{,}716\ u + 0{,}341 = 0$$
$$12{,}734\ x + 4{,}718\ y + 13{,}402\ z + 13{,}807\ u + 0{,}583 = 0$$
$$14{,}573\ x + 5{,}716\ y + 13{,}807\ z + 16{,}782\ u + 0{,}778 = 0$$

Logaritmi delle espressioni simboliche.

$[aa] = 13$	1,11394						
$[ab] = 5,682$	0,75450						
$[ac] = 12,734$	1,10496						
$[ad] = 14,573$	1,16355						
$[an] = 0,673$	9,82802						
$[bb] = 3,389$	0,53007	$[bb.1]$	9,95689				
$[bc] = 4,718$	0,67376	$[bc.1]$	n 9,92823				
$[bd] = 5,716$	0,75709	$[bd.1]$	n 9,81531				
$[bn] = 0,341$	9,53275	$[bn.1]$	8,67061				
$[cc] = 13,402$	1,12717	$[cc.1]$	9,96790	$[cc.2]$	9,13101		
$[cd] = 13,807$	1,14010	$[cd.1]$	n 9,67004	$[cd.2]$	n 0,03328		
$[cn] = 0,583$	9,76567	$[cn.1]$	n 8,88214	$[cn.2]$	n 8,51034		
$[dd] = 16,782$	1,22484	$[dd.1]$	9,64867	$[dd.2]$	8,76713	$[dd.3]$	n 0,93259
$[dn] = 0,778$	9,89098	$[dn,1]$	8,37002	$[dn.2]$	8,70989	$[dn.3]$	n 9,31663

Valori delle incognite.

C''' 0,90227 ; B'' 9,97134, B''' 0,90660; A' n 9,64056, A'' n 0,14261, A''' n 1,09581.

u = costante di collimazione . . . . . — 0″,363

z = costante di livello . . . . . + 0 ,693

y = costante di azimuth . . . . . — 0 ,342

$x = \Delta T_0 - 76^s = -0^s,060$.

Correzione del pendolo Dent a $19^h\ 10^m$ dell' 8 agosto: $\Delta T_0 = 1^m\ 15^s,94$.

Il Dent nell' istante del passaggio del centro del Sole al medio dei fili segnava $9^h\ 10^m\ 40^s,10$, ed il Sole diede all'Assistente la correzione $1^m\ 15^s,36$ in tale istante, preso per mezzodì vero. Siccome nelle 10^h trascorse il ritardo fu di $10 \times 0^s,045 = 0^s,45$, la vera correzione per mezzodì vero data dalle stelle è $1^m\ 15^s,49$; maggiore di $0^s,11$ della precedente, abbastanza precisa per dare l'ora alla città.

Dalla formola per il calcolo dell'azimuth:

$$\operatorname{sen}(A-a) = \operatorname{tang} b \operatorname{tang} h + \sec b \sec h \operatorname{sen} c\ ,$$

essendo:

$$a = -0'',342\ ;\quad b = -0'',693\ ;\quad c = -0'',363\ ;\quad h = 1^\circ\,16'\,26'',4$$

si ha colle tavole di logaritmi ordinari del Bruhns e con quella per le addizioni e sottrazioni del Wittstein:

$\log b$	9,8407332		$\log c$	n	9,5599066
T	4,6855749		S		4,6855749
$\log h''$	3,6614719		$\log \operatorname{sen} c$	n	4,2454815
T	4,6856464		$\log \sec b \sec h$		0,0001074
$\log \operatorname{tang} b \operatorname{tang} h$	2,8734264			n	4,2455889
(A)	1,3533278				2,8734244
$\log \operatorname{sen}(A-a)$ n	4,2267542	$a = -0'',342$		B	1,3721645
S	4,6855749	$A-a = -0\ ,348$			
$\log (A-a)''$ n	9,5411793	$A = -0\ ,690$			

Adunque dalle 13 stelle osservate risulta che la mira devia dal meridiano verso Ovest di $-A = 0'',69$. Prendendo per pesi dei risultamenti ottenuti colle osservazioni del 5 e dell'8 i numeri delle stelle di ciascuna sera, dalle ventuno osservate risulta per l'azimuth della mira il valore:

$$-A = \frac{8,5'',31 + 13,0'',69}{21} = 2'',45.$$

Per la quasi impossibilità di porre il filo di mezzo esattamente al centro della immagine della mira, la piccolezza del risultamento ottenuto può considerarsi dell'ordine dei piccoli con cui Plana, dopo una lunga serie di osservazioni, dedusse che la deviazione della mira dal meridiano è sensibilmente nulla.

II.

Nel Supplemento al V Bollettino Annuale 1870 dell'Osservatorio pubblicai alcuni dati, dai quali si può dedurre la deviazione della mira dal meridiano in due modi come segue:

Il 28 settembre 1869, collo strumento dei passaggi con circolo ad Oriente, il filo di mezzo del reticolo era ad Est dal verticale del centro della mira per 16'' e con circolo ad Occidente per 20''. Risulta da questi numeri che l'asse di collimazione, dalla parte della mira, era 18'' ad Ovest dal suo centro. E siccome da osservazioni fatte in quel giorno risultò la costante di Azimuth $-19'',2$, onde l'asse di collimazione suddetto 19'',2 ad Ovest dal meridiano, ne conseguì che la mira deviava di 1'',2 ad Ovest da questo piano.

Il filo di mezzo il quale, con circolo ad Ovest, il 28 settembre era 20'' ad Est dal verticale del centro della mira, venne il 30 settembre, movendo verso il Sud l'estremità Ovest dell'asse di rotazione del cannocchiale, avvicinato di 17'' a quel piano verticale, in modo che fra il medesimo ed il verticale del filo di mezzo rimase la distanza angolare di 3'' ad Ovest del primo, dalla parte della mira.

Con osservazioni fatte l'11 novembre trovai le tre costanti strumentali: $a = -3'',15$; $b = 8'',25$; $c = -0'',90$, ed il filo di mezzo non aveva mutato di posizione rispetto al centro della mira.

Calcolando con queste tre costanti l'A della formula scritta più sopra, il valore di $-A$ sarà la deviazione ad Ovest del verticale del filo di mezzo dal meridiano, e diminuendo $-A$ di $3''$, deviazione ad Ovest di quel piano verticale dal verticale della mira, si avrà la deviazione ad Ovest della mira dal meridiano: la qual deviazione risulta dai calcoli seguenti essere di $0'',87$.

$\log b =$	0,9164539	$\log c = n$	9,9542425
T	4,6855749	S	4,6855749
$\log \operatorname{tang} h$	8,3471183	$\log \operatorname{sen} c$	n 4,6398174
$\log \operatorname{tang} b \operatorname{tang} h$	3,9491471	$\log \sec b \sec h$	0,0001074
(A)	0,5917977		n 4,6399248
$\log \operatorname{sen}(A-a)$	n 4,5409448	$a = -3'',15$	3,9491471
S	4,6855749	$A - a = -0\ ,717$	B 0,6907777
$\log (A-a)''$	n 9,8553699	$-A = 3\ ,\ 87$	
		$-A - 3 = 0'',\ 87$	

Riepilogando risulterebbe che la mira deviava ad Ovest dal meridiano: nel 1869 di $1'',03$, e nel 1885 di $2'',45$.

Torino, 21 marzo 1886.

L'Accademico Segretario
A. Sobrero.

CLASSI UNITE

CLASSI UNITE

Adunanza del 21 Marzo 1886.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANGELO GENOCCHI

Sono presenti i Soci: Genocchi, Cossa, Lessona, Dorna, Salvadori, Bruno, Berruti, Curioni, Siacci, Basso, D'Ovidio, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Gibelli, della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali;

ed i Soci: Fabretti, Peyron, Flechia, Manno, Bollati, Pezzi, Ferrero, Carle, Nani, della Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Essendo assenti i Segretarii delle due Classi, il Presidente incarica il Socio Cossa di fungere da Segretario.

Si legge quindi il processo verbale della seduta a Classi Unite del giorno 20 dicembre 1885, il quale viene approvato.

Il Presidente dà la parola al Socio Tesoriere Manno, il quale espone e commenta coi necessarii schiarimenti i risultati del bilancio consuntivo per l'anno 1885, il quale viene approvato ad unanimità.

Lo stesso Socio Manno espone quindi il bilancio delle entrate e delle spese per l'anno 1886: anche questo bilancio è ad unanimità approvato.

Essendosi in seguito proceduto alla nomina del Tesoriere dell'Accademia, viene rieletto il Socio Manno per il triennio 1886-1889.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 7 Marzo 1886 . . . . . *Pag.* 271

O. Mattirolo — Sullo sviluppo di due nuovi Hypocreacei e sulle spore-bulbilli degli Ascomiceti . . . . . » 273

Dorna — Ricerche per riconoscere se la deviazione della mira meridiana dell'Osservatorio di Torino a Cavoretto dal piano del meridiano è sensibilmente nulla come nel 1828 - Nota seconda . » 283

ADUNANZA del 21 Marzo 1886 . . . . . » 293

Lessona — Relazione sulla Memoria del sig. Carlo Pollonera, intitolata: *Molluschi fossili post-pliocenici del contorno di Torino* . . . . . » 295

Fileti — Ricerche sull'ortoisopropilfenol . . . . . » 297

Jadanza — Sul calcolo della distanza di due punti, le cui posizioni geografiche sono note . . . . . » 319

Dorna — Ricerche per riconoscere se la deviazione della mira meridiana dell'Osservatorio di Torino a Cavoretto dal piano del meridiano è sensibilmente nulla come nel 1828 - Nota terza . » 339

Classi Unite.

ADUNANZA del 21 Marzo 1886 . . . . . *Pag.* 353

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXI, DISP. 5ª (*Aprile* **1886**)

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

COPYRIGHT

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

—

Aprile

1886

R. ACCAD. DELLE SCIENZE
ECONOMATO
TORINO

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 4 Aprile 1886.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ARIODANTE FABRETTI
VICEPRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Fabretti, Cossa, Lessona, Dorna, Bruno, Berruti, Siacci, Bizzozero, Naccari, Mosso, Spezia, e Basso, il quale tiene le veci del Segretario Sobrero, assente per ragione di salute.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, viene comunicata una lettera del Consolato generale Austro-Ungarico in Genova, accompagnante il dono che, a nome dell'I. R. Accademia delle Scienze di Vienna, egli fa all'Accademia della pubblicazione sul viaggio scientifico attorno al globo, compiuto dalla fregata austriaca *Novara*. La Classe invia per questo dono speciali ringraziamenti.

Il Socio Bruno, anche a nome del condelegato Socio D'Ovidio, legge la seguente Relazione sopra un lavoro del Dott. Corrado Segre, col titolo: *Le coppie di elementi imaginari nella geometria proiettiva sintetica:*

« Il Dott. Segre in questa sua Memoria si propone di esporre una teoria grafica delle coppie di elementi immaginari coniugati,

la quale soddisfi alla duplice condizione di essere sufficientemente elementare da poter essere data nei corsi ordinari di Geometria proiettiva e di non presentare quella mancanza di rigore, che si lamenta nella maggior parte dei trattati, anche di autori illustri, di quel ramo di scienza.

« Trattandosi di un lavoro, il cui pregio consiste non nella novità dei risultati ottenuti, ma nel metodo seguìto per arrivarvi, noi crediamo di adempiere il mandato, che ci avete commesso, indicandovi, in modo sommario, l'ordine tenuto dall'autore nei suoi ragionamenti.

« Il Segre principia coll'osservare che, se due corrispondenze univoche sono tali che una di esse sia trasformata in se stessa dall'altra, questa proprietà è reciproca, e chiama *permutabili* fra loro tali due corrispondenze.

« Nota poi che, intendendo che un' involuzione ad elementi doppi reali sia definita da questi suoi elementi doppi, quattro elementi di una forma geometrica costituiscono un gruppo armonico, se l'involuzione individuata da una coppia di essi è permutabile coll'involuzione definita dall'altra coppia.

« Per coppia di elementi immaginari coniugati egli intende una involuzione elittica, e dice una coppia di elementi immaginari coniugati essere armonica ad una coppia di elementi reali, quando le due involuzioni, una elittica, l'altra iperbolica, definite da esse coppie di elementi sono permutabili fra di loro.

« Dimostra che esiste sempre una, una sola, involuzione permutabile con una proiettività data non involutoria: chiama quest'involuzione, involuzione unita a quella proiettività, e dà il mezzo di costrurre linearmente l'involuzione unita ad una proiettività data.

« Partendo da queste definizioni, e fondato su questi principii, il Segre espone i principali teoremi conosciuti relativi alle proiettività, notando come la dimostrazione di alcuni di essi, col suo metodo, sia semplificata.

« Passa dopo a considerare le coppie di elementi immaginari coniugate nella teoria grafica delle coniche. A questo riguardo egli richiama che, quando una retta non seca una conica, ordinariamente si dice che la retta ha comuni colla conica la coppia dei punti immaginari formata dagli elementi uniti delle punteggiate omografiche sezioni della retta coi fasci proiettanti i differenti punti della conica da due punti fissi della conica

stessa, ed osserva che questa definizione della detta coppia di punti immaginari è difettosa, perciocchè, cambiando sulla conica i centri fissi dei fasci proiettanti i differenti punti di essa conica, cambia la proiettività determinata da quei fasci sulla retta, e quindi, perchè la suaccennata definizione sia ammessibile, bisogna dimostrare che le proiettività così ottenute sulla retta hanno gli stessi punti uniti. Il Segre dà questa dimostrazione, e con ciò si fa strada a stabilire la teoria della polarità ed il teorema di Pascal, ed a dimostrare l'esistenza dei punti di Steiner e di Kirkman.

« Venendo a studiare le proprietà metriche delle coppie di elementi coniugati immaginari, l'autore della Memoria, su cui vi riferiamo, dimostra che in un'involuzione, di 1° ordine, di punti, il rapporto delle potenze di due elementi qualunque rispetto alla coppia costituita dai loro elementi coniugati è eguale al rapporto delle potenze di quegli stessi elementi rispetto alla coppia degli elementi doppi, sieno questi reali od immaginari, dell'involuzione: e che un'analoga relazione esiste riguardo ad un fascio, di 1° ordine, di raggi o di piani in involuzione.

« Da questa proposizione egli ricava il fondamento della teoria dell'asse radicale di due cerchi comunque collocati in un piano, ed una dimostrazione del teorema di Carnot valevole anche nel caso, in cui la conica sechi un solo, o non sechi alcuno, dei lati del triangolo considerato in quel teorema.

« In un ultimo paragrafo finalmente il Segre accenna come il suo metodo possa seguirsi anche nella teoria delle coppie di elementi imaginari coniugati delle proiettività di 2ª o di 3ª specie, e dimostra, con esso metodo, alcuni teoremi relativi alle involuzioni rigate.

« La Memoria del Segre è ben condotta: il processo da lui tenuto ci pare costituisca un miglioramento dei modi di esporre elementarmente la teoria sintetica degli elementi imaginari coniugati nella Geometria proiettiva, epperciò vi proponiamo di deliberare che si dia lettura all'Accademia di quella Memoria ».

La Classe, approvando le conclusioni della Relazione, ammette il lavoro del sig. Dott. C. Segre alla lettura, e quindi ne approva la pubblicazione nei volumi delle *Memorie* dell'Accademia.

Il Socio LESSONA legge un lavoro del signor Carlo POLLONERA: *Sui molluschi fossili postpliocenici del contorno di Torino*, sul quale aveva, in unione al Socio SPEZIA, favorevolmente riferito nell'adunanza del 21 marzo p. p. — La Classe, che aveva già approvate le conclusioni della Relazione su questo lavoro, delibera che il medesimo sia pubblicato nei volumi delle *Memorie* dell'Accademia.

Adunanza del 18 Aprile 1886.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANGELO GENOCCHI

Sono presenti i Soci: GENOCCHI, COSSA, LESSONA, DORNA, SALVADORI, BRUNO, BERRUTI, CURIONI, FERRARIS, MOSSO, SPEZIA, e BASSO, che in assenza del Segretario Accademico SOBRERO, ne fa le veci.

Il Presidente annunzia alla Classe la morte testè avvenuta in Torino dell'Ingegnere Savino REALIS colle seguenti parole:

« Con mio gran dolore debbo ricordare all'Accademia che la città di Torino ha perduto un illustre matematico, mio caro amico, l'ingegnere SAVINO REALIS. Nato nel 1818 mancò il 9 febbraio 1886. Conseguì nell'Università di Torino il titolo d'Ingegnere idraulico; poscia condotto dal padre a Parigi, seguì i corsi e superò felicemente gli esami della *École Royale des Ponts et Chaussées*. Tornato in patria pubblicò alcune *Memorie sulla costruzione delle strade ferrate* (Torino, Stamperia Reale, 1844): opuscolo di 128 pagine, compreso l'Avvertimento e l'Indice; è diviso in sette Capi con Appendice, e corredato da due Tavole spiegative con figure. È dichiarato formare una sintesi degli studi e del corredo di esperimenti nelle escursioni scientifiche in Francia, nell'Inghilterra e nel Belgio.

« Andò nella Svizzera pei lavori preparatorii delle strade ferrate nel Canton Ticino; indi fu nominato dal Governo Sardo *Ingegnere nel Corpo del Genio civile* e applicato al servizio delle strade ferrate; e diresse la costruzione d'uno dei tronchi

da Torino a Genova. Nel 1851 fu dispensato da ogni servizio governativo e per alcuni anni attese come privato professionista a lavori per le strade ferrate del Piemonte, tra le quali quella di Santhià-Biella fu interamente eseguita sui suoi disegni e sotto la sua direzione (*).

« Compiuta quell'opera, abbandonò l'ingegneria pratica, e si dedicò tutto a lavori speculativi, facendo pubblicazioni che furono molto lodate.

« Il signor G. De Longchamps, direttore del *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales* a Parigi, ne ha già stampato in questo giornale un cenno necrologico, tessendone l'elogio. Nel febbraio scorso, egli ne lamentava meco l'improvvisa perdita e aggiungeva: « J'ai eu dans les dernières années la très-grande « joie d'échanger avec M. Realis d'assez nombreuses lettres, et « cette correspondance m'a permis d'apprécier les qualités d'affa- « bilité de votre ami regretté. M. Realis d'après ce que j'ai « pu en voir, par les lettres qu'il m'a fait l'honneur de m'a- « dresser, était un homme bon et aimable, en même temps un « érudit dont la disparition constitue une perte sensible pour « la science en général et pour celle des nombres en particulier ».

« Il signor Aristide Marre, altro scienziato francese, Corrispondente della nostra Accademia, mi scriveva pure alla fine di marzo: « Je viens d'apprendre la mort prématurée de M. Realis; « c'est une grande perte pour la science et pour l'Italie. Persuadé « que vous étiez l'un de ses meilleurs amis, et que votre cœur « est affligé, je vous demande de vouloir bien me permettre d'unir « mes regrets aux votres. Puisse cette séparation ne pas trop « ébranler. . . »

« Il celebre matematico di Liegi, signor Eugenio Catalan, ha di buon grado accettato di compilare una commemorazione particolareggiata della vita e dei lavori dell'ingegnere Realis, la quale

(*) Veggansi i *Brevi cenni della vita dell'ingegnere Savino Realis*, che presento all'Accademia, e che sono stampati nel *Bullettino Boncompagni*, tomo XIX.

essendo ora compiuta sarà in breve stampata nel giornale di Parigi *Nouvelles Annales de mathématiques*, diretto dall'illustre signor Gerono che era anch'esso un amico dell'ingegnere Realis.

« L'ingegnere Realis soleva presentare all'Accademia le sue pubblicazioni. Alcune furono trovate fra i libri da lui lasciati che non erano ancora state presentate all'Accademia, e queste che mi sono state trasmesse dal Comm. Realis, mi fo un dovere di presentarle oggi all'Accademia che le iscriverà fra i libri donati. Alle medesime aggiungo la Memoria che ricevetti dallo stesso Comm. Realis, intitolata: *Sur quelques relations nouvelles entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires* ». Gli esemplari separati di questa Memoria giunsero a Torino soltanto dopo la morte del Realis (*) ».

Lo stesso Presidente comunica lettere di condoglianza inviategli in questa luttuosa occasione da illustri matematici stranieri, e presenta in dono all'Accademia:

1° alcuni *Brevi cenni della vita dell'Ingegnere Savino Realis*, da lui pubblicati nel *Bullettino di storia e bibliografia delle Scienze matematiche e fisiche;*

2° parecchi lavori del compianto estinto, e particolarmente l'ultimo venuto alla luce col titolo: *Sur quelques relations nouvelles entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires* (Estratto dal periodico *Mathesis* di Gand, tomo VI, gennaio 1886).

Il Socio Mosso, a nome del Socio Bizzozero, presenta un lavoro della sig.ª Giuseppina Cattani, Dott. in Medicina e Chirurgia: *Sull'apparecchio di sostegno della mielina nelle fibre nervose midollari periferiche.*

(*) Nel *Journal de Mathématiques spéciales*, aprile 1886, pag. 94-96, sotto il n° 192, si danno cinque quistioni « sur la somme d'une suite régulière de *n* nombres triangulaires », colla firma *S. Realis*.

Lo stesso Socio Mosso presenta ancora una Nota del Dottore Ugolino Mosso: *Sull'azione dei medicamenti e dei veleni che per mezzo del sistema nervoso aumentano la temperatura del corpo o la fanno diminuire.*

Il Socio Dorna presenta per la consueta pubblicazione le seguenti osservazioni meteoriche orarie, ricavate dai registratori Hipp per cura del Dott. Angelo Charrier, Assistente all'Osservatorio di Torino:

a) *Barografo* — Mesi di ottobre, novembre e dicembre 1885, 4° trimestre;

b) *Termografo* — Mesi di ottobre, novembre e dicembre 1885, 4° trimestre.

Infine il Socio Basso legge una sua Nota: *Sulla legge di ripartizione dell'intensità luminosa fra i raggi birifratti da lamine cristalline.*

LETTURE

SULL'APPARECCHIO

DI

SOSTEGNO DELLA MIELINA

NELLE FIBRE NERVOSE MIDOLLARI PERIFERICHE

della Dott. Giuseppina Cattani

Le varie e discordi opinioni professate dagli istologi rispetto alla esistenza ed alla struttura di un particolare apparecchio di sostegno della mielina nelle fibre nervose midollari, mi hanno indotta ad istituire speciali ricerche sopra tale argomento, in aggiunta a quanto intorno a ciò avevo già avuto occasione di rilevare in alcuni miei antecedenti lavori sulla patologia delle fibre nervose midollari periferiche (1).

Di una parte di queste mie osservazioni, iniziate sin dalle ultime vacanze autunnali, ho esposti i risultati all'XI° Congresso medico tenuto in Perugia il settembre dell'anno scorso. Risultati che, dopo l'uso di un maggior numero di metodi, posso confermare ed allargare nella presente Memoria.

Il numero delle ricerche fino ad oggi pubblicate intorno all'argomento che io ho impreso a trattare in questo lavoro è tanto considerevole, che dovrei molto dilungarmi se volessi darne conto in modo particolareggiato. Proponendomi invece di esser breve, e considerando che in ognuno dei più recenti lavori, sia italiani, sia

(1) *Studio sperimentale intorno alla distensione dei nervi.* Arch. per le Scienze Mediche, vol. VIII, n. 19, pag. 382 e seg.

Sulla distensione incruenta dei nervi. Arch. per le Scienze Mediche, vol. IX, n. 12, pag. 265 e seg.

stranieri, sull'istologia delle fibre nervose, è riportata in modo più o meno esteso tutta la letteratura in proposito, io mi restringerò solamente a tratteggiare per sommi capi lo stato della questione.

Fra gli osservatori che, anche negli ultimi tempi, hanno assolutamente negata l'esistenza di uno stroma corneo della guaina midollare, vanno ricordati l'Hesse (1), il Pertik (2), il Gerlach (3), il Waldstein col Weber (4), lo Schou (5), ed ultimamente anche il Kölliker (6).

Fuori di quest'ultimo, il quale propriamente non ha eseguita nessuna speciale ricerca in proposito, in generale gli altri osservatori hanno dedotto le loro conclusioni da metodi, al mio parere, insufficienti. Dappoichè o si son valsi di mezzi i quali notoriamente alterano più o meno la struttura delle fibre nervose (acqua distillata, pepsina, alcool ed etere a caldo, etc.) oppure hanno adoperato soltanto l'acido osmico il quale, pur ben fissando le fibre nervose, pel fatto che esso annerisce la mielina, invece di mettere in evidenza le parti che questa può contenere, deve, almeno senza altro artificio, nasconderle più o meno completamente.

Fra coloro i quali hanno avuto occasione di rilevare nelle fibre nervose qualche indizio dell'apparecchio di sostegno della mielina, ma o per lo stato delle cognizioni che al loro tempo si avevano sulle fibre nervose, o per altri motivi, non hanno dato alle immagini osservate tutto il loro valore, citerò lo Stilling (7), il Lanterman (8), il Carthy (9), lo Schou (10) ed il Koch (11). Così lo Stilling ha descritta una composizione della mielina in tanti canali elementari, che dopo l'azione dell'acido cromico formano una rete fra il cilindrasse ed il neurilemma

---

(1) Hesse F., *Arch. f. Anat. u. Physiol. Anat. Abtheil.* S., 341-364.

(2) Pertik, *Arch. für mikr. Anat.*, 1881, t. 19.

(3) Gerlach, *Tageblatt der Naturforscherversammlung in Cassel*, 1878.

(4) Waldstein e Weber, *Arch. de Physiologie norm. et Pathol.*, 1882, S. 2, t. 10.

(5) Jens Schou, *Undersogelser om den perifhere Marvholdige nerveprimitivtraads*, 1884, Laege.

(6) Kölliker A., *Zeitschrift f. Wissensch. Zoologie*, XLIII Bd.

(7) Stilling, *Ueber den Bau der Nervenprimitivfaser und der Nervenzelle*, 1856.

(8) Lanterman, *Arch. f. microscopische Anat.*, 1876, Bd. XIII, S. 7.

(9) M'. Carthy, *Quarterly Journal of microscopical science*, 1875, S. 377, V. 15, New series.

(10) Jens Schou, l. c.

(11) Koch C., *Inaugur. Dissert., Erlangen*, 2 Tafeln.

(guaina di Schwann); così il Carthy ed il Lanterman hanno fatto menzione di una struttura a bastoncelli della guaina midollare che essi inclinano a ritenere come normale e preesistente, mentre lo Schou, che pure ha ottenuto con vari metodi immagini corrispondenti a quelle descritte dal Lanterman e dal Carthy, non avendole potuto riscontrare in nervi viventi, le considera come prodotti artificiali dipendenti da una disposizione della mielina a dividersi. Per ultimo il Kock ha descritto nelle incisure, dopo l'uso dell'argento e del cloroformio, degl'imbuti coloriti in bruno che egli riporta all'esistenza di una sostanza molle chittogena fra l'uno e l'altro segmento midollare.

Primi ad ammettere nelle fibre nervose uno speciale apparecchio di sostegno della mielina sono stati l'Ewald e il Kühne (1), i quali, dopo aver dimostrato chimicamente l'esistenza in tutto il sistema nervoso di una sostanza cornea, hanno descritto nelle fibre nervose, trattate con alcool ed etere a caldo, con succo gastrico e tripsina, due membrane fatte di sostanza cornea, l'una situata attorno al cilindrasse, l'altra subito all'indentro della guaina di Schwann ed unite fra loro qua e là per mezzo di alcune trabeccole.

Subito dopo, il Tizzoni (2) trattando col cloroformio a caldo delle fibre nervose previamente indurite o con alcool allungato o con bicromato, rendeva appariscente nelle fibre nervose un reticolo di sostanza cornea, formato da una rete di sottili bastoncini molto refrangenti. Questo reticolo, secondo il suddetto osservatore, manca completamente in corrispondenza degli strozzamenti del Ranvier, non mostra invece nessuna modificazione che si possa supporre in rapporto colle incisure di Schmidt e di Lanterman; per una parte si attacca al cilindrasse, per l'altra termina all'indentro ed un pochino discosto dalla guaina di Schwann, colla quale non ha altri rapporti che di contiguità.

Poco dopo il Tizzoni, il Rumpf (3) collo studio di fibre nervose, parte trattate prima con alcool poi con cloroformio alla temperatura dell'acqua bollente, parte sottoposte fresche all'azione dell'acqua distillata, confermava l'esistenza delle due guaine scoperte dall'Ewald e dal Kühne.

---

(1) Ewald und Kühne, *Verhandlungen d. Naturhistorisch.-med.*, Neue Folge, Bd. I, Fas. 5, 1876.

(2) Tizzoni, *Centralblatt f. d. medicinischen Wissenschaften*, 1878, n. XIII. Archivio per le Scienze Mediche, anno III, fasc. 1, 1878.

(3) Rumpf, *Verhandlungen der Naturhist.-med.*, N. S. II Bd., 3 Heft.

Più tardi il Golgi (1) mercè uno speciale trattamento delle fibre nervose, dapprima colla miscela osmio-bicromica, o col solo bicromato, poi col nitrato di argento, dimostrava che nelle fibre nervose periferiche « nello spazio compreso fra il cilinder-axis e la guaina di Schwann, ad intervalli più o meno regolari e *precisamente* in corrispondenza delle estremità dei segmenti midollari trovansi disposti innumerevoli speciali apparati di sostegno della mielina, costituiti da altrettanti fili di estrema finezza, i quali girando attorno al cilindrasse con volute che nel mentre vanno ingrandendosi leggiermente si spostano nel senso della lunghezza delle fibre, riescono a costituire altrettante spire di forma conica, i cui giri terminali o dell'apice del cono circondano più o meno il cilindrasse, mentre i giri iniziali o della base del cono corrispondono alla superficie interna della guaina di Schwann, colla quale sembra abbiano connessione ».

Peraltro aggiungeva che le spirali in discorso, sebbene di regola corrispondano alle incisure di Schmidt, tuttavia non di rado si estendono anche al corpo dei segmenti midollari, e concludeva che il reticolo descritto dal Tizzoni non rappresenta altro che le deformazioni delle suddescritte spirali.

A conclusioni analoghe, sia rispetto alla esistenza e alla forma degl'imbuti, sia rispetto al significato del reticolo descritto dal Tizzoni, veniva il Ceci (2), dietro lo studio di preparati fatti coll'oro, e coll'osservazione delle fibre nervose a fresco. Ed ultimamente il Mondino (3), collo stesso metodo usato dal Golgi, confermava la descrizione che questi ha data dell'apparecchio di sostegno della mielina nelle fibre nervose periferiche, aggiungendo che le spirali si attaccano coi loro estremi alle guaine cornee già descritte dall'Ewald e dal Kühne, cioè col loro giro più largo sono fissate alla perimielinica e col giro più stretto alla periassile; e che queste guaine cornee, colorandosi coll'argento allo stesso modo delle spirali, probabilmente hanno la stessa natura di quelle.

Tale lo stato della questione al momento che io ho preso a studiare di proposito l'apparecchio di sostegno della mielina nelle fibre nervose midollari periferiche.

Giudicando che coll'uso di un solo metodo non si possa mai giungere a resultati così certi e così completi come col confronto

(1) Golgi, Arch. per le Scienze Mediche, vol. IV, n. 10, 1880.
(2) Ceci, R. Accademia dei Lincei, 1880-81.
(3) C. Mondino, Archivio per le Scienze Mediche, vol. VIII, n. 2.

delle immagini ottenute da vari mezzi di fissazione e di colorazione, in queste mie indagini ho sperimentati l'un dopo l'altro parecchi metodi di ricerca, mirando sempre da un lato a fissare e a conservare le varie parti componenti le fibre nervose, per quanto più è possibile, nella stessa forma e nella stessa disposizione che possiedono in vita, dall'altro lato a rendere evidente tutto lo stroma della guaina midollare, sia mercè speciali colorazioni, sia liberandolo dalla mielina con mezzi del tutto innocui alla struttura delle fibre nervose.

Uno dei metodi che per primo ho adoperato e del quale ho molto a lodarmi per la sua semplicità, per la costanza dei risultati, per la stabilità delle preparazioni che se ne ottengono, è l'uso della miscela osmio-cromo-acetica del Flemming. Con questa miscela, purchè il nervo che si vuol studiare sia preso colle dovute cautele, in un buon numero di fibre nervose, cioè in tutte quelle ben fissate e non molto annerite dal reattivo, si può rilevare tutto lo stroma della guaina midollare, anche quelle parti di esso che fino ad ora erano state dimostrate solo mercè metodi di ricerca assai complicati. Questo, come ho potuto stabilire, è effetto dell'acido acetico, e può conseguirsi altresì con una miscela di acido osmico ed acido acetico. Solo è necessario che i preparati ottenuti col liquido del Flemming siano chiusi in una sostanza poco refrangente (glicerina addizionata di acqua).

L'altro metodo di cui mi son valsa è stato quello di trattare le fibre nervose con una miscela composta di bicromato e di acido osmico, e dopo averle lentamente disidratate, lasciarle per alcuni giorni in una discreta quantità d'essenza di trementina fino a che questa rinnovata alcune volte si conservasse incolora. L'essenza di trementina appunto, delle varie sostanze atte a sciogliere i corpi grassi, è quella di cui solo mi son valsa nelle mie ricerche, avendola trovata idonea ad estrarre la mielina a freddo e nonostante l'azione antecedente dell'acido osmico.

Anche nelle fibre nervose prima fissate colla miscela osmiobicromica, poi private della mielina mercè l'essenza di trementina, ho potuto rilevare facilmente tutto lo stroma della guaina midollare.

L'altro metodo che ho messo in uso è stato quello del Golgi, consistente nel trattare le fibre nervose prima colla miscela osmiobicromica, poi col nitrato di argento: questo metodo l'ho usato dapprima esattamente come insegna il Golgi, poi con alcune modificazioni.

La prima è stata quella di far subire alle fibre nervose già argentate e ben disidratate l'azione dell'essenza di trementina per alcuni giorni, al fine di privarle della mielina; l'altra di passare le fibre nervose dal bagno di argento in una debole soluzione di iposolfito di sodio, per togliere l'eccesso dell'argento ed ottenere preparati oltrecchè più nitidi anche più duraturi di quelli che si hanno in generale dal metodo Golgi, anche montandoli nel modo consigliato dal Mondino. In quanto alla nitidezza essa mi venne interamente conseguita; non così la stabilità, poichè, forse pel continuarsi dell'azione dell'iposolfito, nonostante che le fibre fossero state poi lungamente lavate, quasi tutti i preparati così ottenuti si sono più o meno scoloriti. Perciò ho pensato di valermi di un altro artificio, cioè di passare le fibre nervose dopo l'azione dell'iposolfito di sodio in una soluzione allungata di cloruro d'oro, a somiglianza di quanto usano fare i fotografi, e ciò anche per la speranza che l'oro avesse a colorare non solo le spirali, ma anche il restante apparecchio di sostegno della mielina. Il che infatti è accaduto, in modo che anche col metodo Golgi, mercè l'azion successiva sia dell'essenza di trementina, sia dell'oro, ho potuto sopra uno stesso preparato vedere le varie parti che compongono lo stroma della guaina midollare nelle fibre nervose periferiche.

In quanto a quella parte di esso stroma che per primo il Golgi ha dimostrata, essa nelle fibre trattate con liquido di Flemming apparisce come una nitidissima ed evidentissima striatura trasversa data da tante linee sottili parallele e vicine le une alle altre, le quali in ogni incisura di Schmidt e di Lanterman, partendo dalla superficie interna dell'estremo più largo di un segmento cilindroconico, passano sopra all'estremo più stretto dell'altro segmento midollare, e così vengono a costituire una specie di elegante imbuto in forma di cono tronco (fig. 5, 7). Nelle fibre nervose dilacerate, quando siano esaminate nel loro piano massimo invece che in superficie, come pure in alcune sezioni longitudinali, la suddescritta striatura apparisce solo attraverso l'incisura sotto forma di sottili sepimenti che a guisa di ponti uniscono fra di loro le superficie corrispondenti degli estremi dei segmenti, e manca invece nelle parti assili della fibra (fig. 6).

Gli imbuti striati che ho sopra descritti di solito sono separati gli uni dagli altri da intervalli variamente lunghi (fig. 5), solo di raro sono in un certo numero così vicini da toccarsi pei

loro estremi (fig. 7); più di raro ancora entrano l'uno nell'altro per un breve tratto. Ma qualunque sia la loro vicinanza è sempre possibile di stabilire che ogni imbuto corrisponde esclusivamente ad un'incisura di Schmidt e di Lanterman, e ciò perchè nelle fibre nervose trattate con liquido di Flemming le incisure sono sempre ben manifeste (anzi, alcuna volta un pochetto esagerate), ed i fili che costituiscono gli imbuti appaiono assai sottili, quali del resto sono anche a fresco, come ha osservato il Golgi.

Nelle fibre nervose trattate con bicromato ed acido osmico, non è possibile di scorgere ben chiaramente le spirali altro che nelle sezioni trasverse. In queste (e solo in un certo numero, corrispondentemente al fatto che esse non esistono per tutta la lunghezza delle fibre nervose) appaiono sotto forma di una sottile linea circolare, ora accosta al cilindrasse (fig. 11 *B*), ora situata verso la guaina di Schwann (fig. 11 *C*), ora a metà circa della guaina midollare (fig. 11 *D*). Sempre nell'ultimo caso, spesso anche negli altri, quando si muova il fuoco del microscopio alzandolo ed abbassandolo alternativamente, si vede questa linea ora allargarsi, ora restringersi, ora allontanarsi, ora avvicinarsi al cilindrasse, a seconda che si mettono in fuoco gli altri giri spirali più larghi o più stretti compresi nello spessore della sezione. Solo quando una fibra è tagliata un poco obbliquamente si possono vedere, in modo più o meno completo, in uno stesso piano focale più giri successivi della spirale.

Allato alla sottile linea circolare esiste ordinariamente uno spazio chiaro (fig. 11 *B*, *C*, *D*), il quale rappresenta quella parte dell'incisura che non è occupata dal filo spirale. Questo spazio che qualche volta manca (fig. 11 *E*), è molto sottile e nei movimenti del piano focale si sposta insieme colla linea circolare a cui sta allato, alcune volte apparendo, ora all'interno, ora all'esterno di essa secondo l'altezza del piano focale.

Col metodo del Golgi e colle varie modificazioni da me portatevi, gli imbuti appaiono nel modo già descritto dall'illustre istologo e che io pertanto non istarò qui a ripetere. Solo mi fermerò un poco sopra un punto nel quale dissento dal chiarissimo osservatore.

Ciò è che mentre il Golgi, sebbene in generale descriva gli imbuti come limitati agli estremi dei segmenti cilindroconici, tuttavia ammette altresì che qua e là si trovino alcuni giri di spirale anche nel corpo dei segmenti cilindroconici, fuori quindi

di ogni rapporto colle incisure; io invece sono costretta di ritenere che nel corpo dei segmenti cilindroconici non si abbia mai nessun giro di spirale e che questi siano sempre assolutamente limitati alle incisure di Schmidt e di Lanterman.

Peraltro aggiungo subito che se in fibre trattate con liquido di Flemming è, come ho detto di sopra, facilissimo di rilevare che ogni imbuto corrisponde ad un'incisura, al contrario nelle fibre nervose trattate col metodo Golgi ciò è assai difficile. Perchè mentre da un lato nelle fibre nervose fissate colla miscela osmiobicromica le incisure sono ordinariamente assai strette, dall'altro i fili che costituiscono gli imbuti del Golgi, per la riduzione dell'argento su di loro acquistano una grossezza tale che alcune volte occupano completamente l'incisura e la mascherano (fig. 1, 2).

Per questo non di rado a livello di certi imbuti non può accertarsi l'esistenza dell'incisura altro che con una buona obbiettiva ad immersione omogenea; e nei preparati coll'iposolfito di sodio quando vanno scolorandosi si vedono farsi manifestissime alcune incisure prima affatto nascoste. E per lo stesso motivo, quando la riduzione dell'argento non è estesa a tutti i giri di un imbuto, ma è limitata soltanto ad un certo numero di questi, l'incisura può non esser visibile altro che in corrispondenza della parte di imbuto rimasta incolora (fig. 1), sebbene anche in questa parte a volte non sia rilevabile altro che a fortissimi ingrandimenti, in modo che non essendo premuniti, per antecedenti osservazioni fatte con altri metodi, sulla costante corrispondenza delle spirali colle incisure, nulla è più facile che considerare tali immagini, o quali manifestazioni di manichetti cilindrici, come fa il Ceci, o quali anelli situati nel corpo dei segmenti cilindroconici, come fanno il Golgi ed il Mondino.

Facile, ma non giusto, perchè certamente i fili spirali sono sempre disposti ad imbuto e corrispondono sempre ad un'incisura, sia che essi la determinino da sè soli, sia che la incisura dipenda anche da altre particolarità di struttura e gli imbuti abbiano l'ufficio di rinforzarla od altro.

La quale corrispondenza fra incisure ed imbuti striati non manca nemmeno quando questi in un certo numero o si seguono immediatamente od entrano per breve tratto l'uno nell'altro. Solo la maggior vicinanza degli imbuti e la loro parziale invaginazione è in rapporto colla esistenza di segmenti cilindroconici brevissimi (fig. 3) o aventi quella speciale disposizione segnalata per primo

dal Boll (1) e consistente in ciò che gli estremi dei segmenti midollari, invece di essere foggiati e disposti al solito modo, sono invece, l'uno fornito di una scanalatura circolare, e l'altro appuntito in modo che si ingranano insieme, ed in sezione ottica la relativa incisura apparisce come una V.

Ad ogni modo l'esistenza di un certo numero di imbuti vicini gli uni agli altri è quasi limitata in corrispondenza de' nuclei proprii della fibra nervosa (fig. 3), di raro si riscontra in altri punti (fig. 7), ed in generale è assai più rara di quella di imbuti più o meno lontani gli uni dagli altri. Il quale fatto se non si può accertarlo coi soli preparati all'argento, perchè attesa la nota instabilità delle reazioni di questo metallo, là dove gli imbuti sono separati da intervalli più o meno lunghi è permesso di dubitare che altri ne esistano non visibili perchè rimasti incolori, è invece manifestissimo ed indubitabile nei preparati ottenuti col liquido del Flemming, il quale nelle fibre nervose opportunamente fissate, mettendo in evidenza tutti gli imbuti che vi esistono e nello stesso tempo rendendo ben manifeste le incisure di Schmidt e Lanterman permette di asserire in modo reciso che vi ha una stretta corrispondenza fra la vicinanza e la forma delle incisure, la vicinanza e i reciproci rapporti degli imbuti.

Rispetto al restante apparecchio di sostegno della mielina, esso nelle fibre nervose trattate col liquido del Flemming non apparisce facilmente altro che in quelle fibre che hanno assunto un colore solo leggiermente bruno: nelle altre o non apparisce affatto o non si può rilevarlo altro che valendosi di buone obbiettive ad immersione. Ad ogni modo in un certo numero di fibre nervose, sia dilacerate, sia meglio ancora vedute in sezione longitudinale, il liquido del Flemming rende appariscente insieme colle spirali anche un'altra disposizione dello stroma della guaina midollare, corrispondente a quella da me già descritta in sezioni trasverse di fibre fissate con bicromato di ammoniaca.

La disposizione di cui discorro è data da tanti fili o bastoncini un poco più grossi dei fili spirali, omogenei e splendenti, che dalla periferia della fibra vanno con una leggiera obbliquità sino al cilindrasse, disposti in modo gli uni rispetto agli altri da costituire coi loro incrociamenti una trama a maglie poliedriche regolarissime (fig. 7).

(1) F. Boll, R Accad. dei Lincei 1875.

Questa trama è visibile in tutta la lunghezza dei singoli segmenti cilindroconici, così nel corpo come negli estremi (dei quali segue l'assottigliamento senza nulla mutare della sua struttura e regolarità), dove si accompagna agli imbuti striati (fig. 7).

Immagini eguali a quelle ora descritte ho ottenute in fibre nervose trattate col metodo del Golgi, poi per alcuni giorni lasciate in essenza di trementina; potendo così vedere, nel modo più chiaro, insieme cogli imbuti limitati alle incisure, la restante trama di sostegno della mielina estesa per tutta la lunghezza dei singoli segmenti cilindroconici (fig. 4).

Di più in fibre nervose trattate prima col metodo del Golgi, poi coll'iposolfito di sodio ed il cloruro d'oro, ho ottenuta non di rado una bella colorazione della trama più volte ricordata, la quale allora non solo era evidente allato al cilindrasse colla solita disposizione, ma nelle fibre nervose osservate in superficie appariva spiccatissima anche nelle parti assili, sotto forma di una regolare punteggiatura corrispondente alla sezione ottica dei suoi fili colorati dall'oro.

Per ultimo anche nelle fibre nervose trattate prima con bicromato ed acido osmico poi con trementina, ho avuta una conferma della disposizione da me sopra descritta nella trama di sostegno della mielina. E ciò tanto in dilacerazioni quanto in sezioni longitudinali e trasverse. Nelle quali ultime si hanno immagini del tutto corrispondenti a quelle che si hanno nei tagli trasversi di fibre nervose trattate con bicromato d'ammoniaca.

Cioè tanto nelle une quanto nelle altre sezioni trasverse si vede che i fili i quali costituiscono la trama della guaina midollare per un estremo sono attaccati ad una membranella sottilissima che sta subito all'indentro della guaina di Schwann (perimielinica), e per l'altro estremo ad un'altra membranella, parimente sottile che riveste il cilindrasse (periassile) (fig. 10, 11 *A*). Si vede inoltre che questi fili, assai vicini gli uni agli altri, un poco obliqui alla superficie e alla direzione del cilindrasse, ma nell'insieme quelli di uno stesso piano, paralleli gli uni agli altri, sono disposti in modo da formare tanti cerchi successivi, ognuno dei quali consta di fili che hanno, rispetto alla superficie e alla direzione del cilindrasse, un'obbliquità opposta a quella dei fili del cerchio sovra e sottoposto (fig. 10, 11 *A*). Il che apparisce dal fatto che mentre in un deter-

minato piano focale si vede tutto quanto un cerchio di raggi attorno al cilindrasse, del cerchio vicino non se ne vedono altro che gli estremi, o poco più (fig. 10, 11), incrociati con quelli dei fili del cerchio bene in fuoco, e quando si muova il piano focale i fili dei varii cerchii vicini, messi alternativamente in fuoco, danno l'apparenza come dei raggi di una ruota che girino in senso opposto.

I fatti che ho adesso descritto si rinvengono in tutte le sezioni di fibre ben conservate, comprese quelle in cui esistono oltre alla trama a bastoncini anche le linee circolari rappresentanti le spirali del Golgi (fig. 10 *B*, *C*; 11 *B*, *C*, *D*, *E*). Solo che in queste ultime sezioni, quando allato al filo spirale esiste un sottile spazio chiaro, la trama a bastoncini apparisce interrotta in corrispondenza di questo (fig. 11 *B*, *C*, *D*), da un lato finendo al filo spirale, dall'altro al confine dello spazio chiaro con un contorno abbastanza netto.

Tenendo conto della costante regolarità e perfetta corrispondenza delle immagini su descritte, e considerando che esse non possono rilevarsi altro che dopo l'uso di sostanze generalmente riconosciute come ottimi mezzi di fissazione, e solo nelle fibre che sono meglio fissate (cioè in quelle degli strati più superficiali di ogni fascio nervoso), e che di più tali immagini coesistono sempre con quelle degli imbuti striati, indubbiamente preformati perchè visibili anche a fresco, si deve concludere che nelle fibre nervose periferiche oltre agli imbuti limitati in corrispondenza delle incisure, esiste per tutta la lunghezza dei singoli segmenti midollari una trama costituita da tanti fili, i quali dalla guaina perimielinica vanno alla guaina periassile, diretti obbliquamente alla superficie e all'asse longitudinale del *cilinder-axis* ed incrociantisi gli uni cogli altri.

E questa trama evidentemente corrisponde al reticolo descritto dal Tizzoni, salvo le differenze di forma relative al metodo adoperato dal suddetto autore, col quale, come del resto col massimo numero degli ordinari reattivi, le maglie della trama di sostegno della mielina si allungano, si allargano, ed in parte vengono ad essere distrutte, sia per alterazioni proprie dei fili che la compongono, sia per deformazioni del cilindrasse e della mielina. Il che avviene anche coi migliori mezzi di fissazione in quelle fibre nervose che essendo meno superficiali non sono abbastanza presto compenetrate dal liquido fissatore.

Rispetto alle due guaine periassile e perimielinica, alle quali si fissano gli imbuti striati e la trama a bastoncini, poco posso aggiungere con queste mie ultime ricerche a quanto su tal proposito ho già esposto in due miei antecedenti lavori (1).

Infatti coi vari metodi più volte ricordati ho veduto queste due guaine ora incolore, ora colorate (argento, oro), tanto in sezione ottica quanto in sezioni trasverse e longitudinali, e così ho potuto confermare pienamente la loro esistenza ed il fatto, ammesso già dal Mondino (2) e da me, che mentre la periassile è continua per tutta la lunghezza del cilindrasse, invece la perimielinica è interrotta in corrispondenza degli strozzamenti del Ranvier. Di più tanto in dilacerazioni dopo il trattamento doppio coll'argento e coll'oro, quanto col bicromato e l'acido osmico in sezioni longitudinali bene orientate rispetto alla direzione delle fibre nervose e comprendenti il piano massimo di queste, ho potuto vedere con tutta chiarezza che il cilindrasse, il quale negli estremi dei segmenti interanulari è compresso e ristretto dalla guaina midollare che vi si addossa, in corrispondenza proprio dello strozzamento della fibra nervosa presenta un leggiero rigonfiamento rivestito dalla guaina periassile (fig. 8), la quale arriva sino a toccare l'anello della guaina di Schwann e manifestamente vi si fissa.

Questo attacco della guaina periassile alla guaina di Schwann (il quale per altro deve essere molto debole poichè tanto spesso viene ad esser rotto) può vedersi nello stesso modo anche quando la fibra nervosa è osservata, o in sezione ottica o in sezione longitudinale, non nel suo piano massimo, ma in un piano superficiale in modo che il rigonfiamento del cilindrasse non appare (fig. 9).

E deve essere stato appunto il fatto dell'attacco della guaina periassile all'anello della guaina di Schwann che ha indotto il Boveri (come risulta da recente comunicazione del Kupffer (3)), ad ammettere che la guaina di Schwann negli strozzamenti del Ranvier si rifletta sul cilindrasse e vada a rivestirlo, comportandosi per ogni segmento interanulare come un sacco sieroso.

La diversa grossezza delle due guaine e l'essere i loro contorni nell'anello del Ranvier accosti sì, ma non fusi, avrebbe

(1) L. c.
(2) L. c.
(3) *Sitzungberichte der Gesell. f. Physich. Morpho. in München.*

potuto ritrarre il suddetto osservatore da simile interpretazione. Per parte mia debbo completamente rigettarla, anche tenendo conto del fatto che la guaina di Schwann e la guaina periassile probabilmente hanno una costituzione chimica diversa, poichè questa riduce l'argento con molta facilità e quella o mai o quasi mai.

Accennerò qui di passaggio (come conferma all'opinione di moltissimi istologi) che negli stessi preparati nei quali ho rilevato l'attacco della guaina periassile all'anello della guaina di Schwann, come pure col liquido del Flemming e qualche volta colla miscela osmio-bicromica più il nitrato d'argento, ho potuto vedere distintissimamente la struttura fibrillare del cilindrasse, tanto in sezione ottica (in quella parte del cilindrasse che resta allo scoperto dalla guaina midollare negli strozzamenti del Ranvier), quanto in sezioni longitudinali e trasverse.

Nelle sezioni longitudinali si vede assai bene che le fibrille componenti il cilindrasse si avvicinano e si allontanano fra di loro, a seconda che il cilindrasse è ristretto negli estremi dei segmenti interanulari, od è espanso in corrispondenza dell'anello del Ranvier, nel quale ultimo punto la sostanza che sta fra le varie fibrille spesso si colora coll'argento e coll'oro in modo più o meno intenso ed esteso, dando luogo a varie immagini che non starò qui a descrivere.

Un ultimo punto che molto mi premeva di rischiarare era il modo di comportarsi delle guaine periassile e perimielinica a livello delle incisure di Schmidt e Lanterman.

Ma a tale riguardo non ho potuto stabilire nulla di preciso. Perchè se da una parte mi par certo che la guaina periassile non mandi nessun sepimento attraverso le incisure (quando non si voglia considerare come rappresentanti di questi sepimenti gli imbuti striati del Golgi), rispetto invece alla perimielinica non posso pronunciare un giudizio assoluto. Giacchè nei preparati coll'oro qualche volta mi è parso di vedere che questa membrana rivesta tutta la superficie esterna degli estremi sottili dei segmenti midollari, mentre la superficie interna degli estremi larghi sarebbe ricoperta dalla spirale del Golgi, ma con nessuno degli altri metodi non ho potuto avere una conferma abbastanza valida a questa apparenza. Infatti tanto nelle dilacerazioni, quanto nelle sezioni e longitudinali e trasverse, ho sempre veduti gli estremi dei segmenti midollari con un contorno netto anche

dal lato dell'incisura, ma non ho mai potuto stabilire che questo contorno sia dato da una vera e propria membrana, nè che questa membrana sia un'emanazione della perimielinica.

Perciò debbo concludere che nelle incisure non è dimostrata l'esistenza altro che delle spirali del Golgi, pur ritenendo come probabile che oltre di queste qualche altra cosa vi si trovi. E ciò perchè anche ammettendo che normalmente solo i fili spirali esistano nelle incisure e che non vi si abbia una corrispondente interruzione della trama a bastoncini (il che potrebbe benissimo verificarsi stante la disposizione di questa trama), tuttavia mal si comprende perchè questi bastoncini appaiano invece di regola interrotti nelle incisure, e perchè gli imbuti striati rimangano sempre all'esterno di questa interruzione, come se avessero validi attacchi cogli estremi larghi dei segmenti midollari, e nessun rapporto di continuità con gli estremi stretti.

Pertanto le conclusioni che scaturiscono dalle ricerche suddescritte sono le seguenti:

1° L'apparecchio di sostegno della mielina è molto complesso: esso consta di due guaine, di imbuti spirali e di una trama a rete.

2° Le due guaine, scoperte dall'Ewald e dal Kühne, sono l'una interna che riveste il cilindrasse, l'altra esterna che tappezza la guaina di Schwann. La esterna è interrotta in corrispondenza degli strozzamenti del Ranvier: l'interna è continua per tutta la lunghezza della fibra nervosa e negli strozzamenti del Ranvier si attacca all'anello della guaina di Schwann.

3° Gli imbuti spirali, per primo dimostrati e descritti dal Golgi, sono situati in corrispondenza delle incisure di Schmidt e di Lanterman: colla base si inseriscono alla guaina perimielinica, coll'apice a quella periassile.

4° La trama a rete, per primo messa in evidenza dal Tizzoni, è fatta da tanti fili sottili che vanno dalla guaina perimielinica a quella periassile, disposti in modo, sia rispetto alla superficie e alla direzione del cilindrasse, sia rispetto gli uni agli altri, da incrociarsi in vari punti. Questa trama, questa specie di spugna adattatissima ad essere imbevuta dalla mielina, esiste per tutta la lunghezza della fibra nervosa, essendo solo interrotta in corrispondenza delle normali interruzioni della guaina midollare, cioè negli strozzamenti del Ranvier e nelle incisure di Schmidt e Lanterman.

Tutte le figure di questa Tavola sono state disegnate coll'aiuto della camera lucida: le fig. 10 ed 11 coll' Oc. 4 e coll'im. ad acqua, lettera *H* di Zeiss: le restanti figure collo stesso oculare e coll'ob. *E* pure di Zeiss.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. Fibra nervosa trattata colla miscela osmio-bicromica ed il nitrato d'argento. Mostra una incompleta colorazione degli imbuti. Le incisure appariscono bene solo dove gli imbuti sono rimasti incolori.

» 2. Fibra nervosa trattata come la fig. 1, poi con una leggiera soluzione d' iposolfito di sodio. La colorazione degli imbuti è completa: le incisure non appariscono.

» 3. Fibra nervosa trattata come la fig. 2. Mostra un certo numero di imbuti, parte seguentisi gli uni agli altri, parte rientranti, in corrispondenza del nucleo della fibra nervosa. Sono visibili le corrispondenti incisure.

» 4. Fibra nervosa trattata come la fig. 1, poi tenuta per alcuni giorni in essenza di trementina. Mostra, in corrispondenza delle incisure, gli imbuti parte completamente, parte incompletamente coloriti dall'argento, e in tutta la lunghezza dei segmenti cilindroconici la trama di sostegno della mielina. In questa fibra è colorata dall'argento anche la guaina periassile.

» 5. Sezione longitudinale di fibra nervosa trattata con liquido del Flemming, osservata in glicerina con acqua. Mostra gli imbuti striati in corrispondenza delle incisure un poco allargate.

» 6. Sezione longitudinale come sopra. La striatura trasversa è visibile solo nell'incisura e manca nelle parti assili della fibra.

» 7. Sezione longitudinale come sopra. Mostra gli imbuti striati in corrispondenza delle incisure, e la trama di sostegno della mielina in tutta la lunghezza dei singoli segmenti midollari.

FIG. 8. Sezione longitudinale di fibra nervosa trattata colla miscela osmio-bicromica. Mostra la struttura fibrillare del cilindrasse, il suo rigonfiamento in corrispondenza dello strozzamento della fibra nervosa e l'attacco della guaina periassile all'anello della guaina di Schwann.

» 9. Sezione longitudinale come sopra. Mostra gli stessi fatti della figura precedente meno il rigonfiamento del cilindrasse in corrispondenza dello strozzamento del Ranvier.

» 10. Sezioni trasverse di fibre nervose trattate con bicromato di ammoniaca.

A. Mostra la trama di sostegno della mielina, la guaina periassile e la perimielinica alla quale si attaccano i fili che costituiscono essa trama.

B. Mostra gli stessi fatti della fig. *A*, più un giro di spirale.

C. Mostra gli stessi fatti della fig. *A*, più due giri di spirale, l'uno completo e l'altro incompleto.

» 11. Sezioni trasverse di fibre nervose trattate colla miscela osmio-bicromica, poi lasciate per alcuni giorni in essenza di trementina.

A. Mostra la trama di sostegno della mielina.

B. Mostra la trama di sostegno della mielina ed un giro di spirale situato vicino al cilindrasse ed avente attorno un sottile spazio chiaro.

C. Mostra la trama di sostegno della mielina ed un giro di spirale situato alla periferia della fibra.

D. Mostra la trama di sostegno della mielina ed un giro di spirale situato a metà circa della guaina midollare.

E. Mostra la trama di sostegno della mielina ed un giro di spirale senza spazio chiaro.

Fig 1

Fig 2

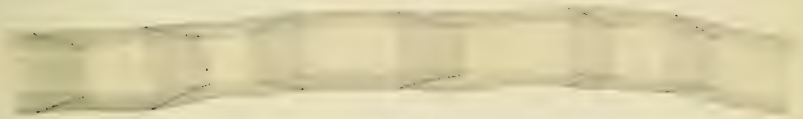


Fig 3

Fig 4

Fig 5

Fig 8

Fig 7

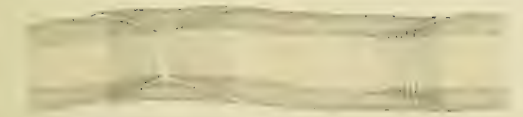


Fig 9

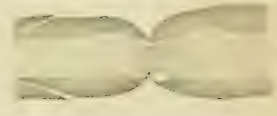


Fig 6

Fig 10

Fig 11

SULLA
AZIONE DELLE SOSTANZE
CHE PER MEZZO DEL SISTEMA NERVOSO
AUMENTANO O DIMINUISCONO LA TEMPERATURA ANIMALE

del Dott. Ugolino Mosso

I.

Nel mese di marzo 1885 Ch. Richet (1) pubblicava nei *Comptes Rendus* che facendo ad un coniglio una lesione nelle parti anteriori del cervello, succedeva un aumento della temperatura dell'animale.

In quell'epoca io mi occupava egualmente di ricerche intorno all'influenza che il sistema nervoso esercita sulla temperatura dei muscoli nella contrazione: e studiava l'aumento di calore che si produce nelle emozioni, e sotto l'influenza di alcuni veleni

I risultati delle mie ricerche li presentai nel luglio dell'anno scorso per la mia tesi di laurea (2). In questo primo lavoro ho esposto alcuni nuovi fatti che rendono evidente l'influenza del sistema nervoso sulla temperatura animale.

Nell'ottobre scorso due altri studenti di medicina dell'Università di Berlino, Aronsohn e Sachs (3), pubblicarono un lavoro intorno ai rapporti del cervello colla temperatura del corpo e

(1) Charles Richet, *Comptes Rendus*, 1885, 31 marzo.

(2) Ugolino Mosso, Giornale della R. Accademia di Medicina, fascicolo ottobre-novembre-dicembre 1885.

(3) Ed. Aronshon und J. Sachs, *Archiv für die gesammte Physiologie*, 1885, pag. 232.

colla febbre. Essi confermarono i risultati di Richet e sono giunti a dimostrare che l'aumento della temperatura dipende dall'eccitamento di elementi nervosi prodotto dalla puntura del cervello.

Questi recenti lavori segnano un nuovo indirizzo nello studio dei fenomeni termici dell'organismo; con essi si tenta un'analisi più minuta delle cause da cui dipende il calore animale e questi studi condurranno certo a dei risultati che avranno un'influenza sulla dottrina della febbre.

Le mie precedenti ricerche avendo dimostrato che la contrazione dei muscoli non basta per produrre l'aumento di temperatura che si osserva in molte condizioni fisiologiche del nostro organismo, credo di esser riuscito a scemare il valore della dottrina emessa da Röhrig e Zuntz, secondo la quale (1) la più gran parte del ricambio materiale si compie nei muscoli, e questi sarebbero essenzialmente l'apparato che riscalda il nostro organismo.

Non sappiamo ancora in che modo i nervi riescano a produrre una distruzione più attiva delle sostanze che compongono i nostri tessuti; ma è certo che i processi chimici i quali generano del calore sono sotto la loro influenza.

I fisiologi che si occupano di questi studi sulla temperatura, cercano, con ragione, di tener bene distinti i fenomeni che sono prodotti da una vera e reale produzione di calore per maggiore attività chimica, dai fenomeni vaso-motori, i quali producono delle variazioni nella temperatura solo perchè aumentano o diminuiscono le perdite di calore che subisce l'organismo.

Nelle ricerche di Richet, nelle mie ed in quelle di Aronhson e Sachs non trattasi di fenomeni vaso-motori, ma di una reale produzione di calore dovuta all'eccitamento dei nervi.

Nelle presenti ricerche mi sono servito dei veleni come mezzo di analisi, invece della vivisezione dei centri nervosi; ed ho cercato se per mezzo dei veleni, potevo aumentare o diminuire l'attività di quei centri, dai quali dipendono molto probabilmente i fenomeni termici dell'organismo.

Dopo aver stabilito nel mio precedente lavoro che la stricnina fa aumentare la temperatura del corpo, anche quando l'animale

---

(1) Roehrig und Zuntz, *Pflüger's Archiv*, vol. IV, pag. 90.

è reso immobile per mezzo del curaro, ho voluto analizzare meglio questo fatto.

Per spiegare che il curaro permette alla stricnina di elevare la temperatura, senza che vi sia una contrazione dei muscoli, dobbiamo supporre che si verifichi nell'organismo intero, il fatto che ho già osservato nei muscoli staccati delle rane: cioè: che quando noi eccitiamo un nervo, si producono due cose distinte: la contrazione muscolare e l'aumento di attività dei processi chimici, il quale ultimo continua anche dopo che è cessata da parecchi minuti la contrazione muscolare.

Il curaro sarebbe una sostanza che paralizza l'azione motrice dei nervi, ma non l'azione termica, e vedremo che in antagonismo al curaro vi sono altri veleni che diminuiscono l'azione termica del sistema nervoso, ma non paralizzano l'azione motrice.

Quando si amministra l'idrato di cloralio a dosi elevate, non è più possibile produrre un aumento della temperatura con nessuna delle sostanze che l'aumentano nello stato normale; i muscoli possono ancora contrarsi, la respirazione continuare, ma la temperatura si abbassa continuamente.

II.

Azione delle sostanze che aumentano la temperatura dell'organismo.

Fra i rimedi che possono considerarsi come eccitanti dei centri termici deve mettersi primo il cloridrato di cocaina (1).

Ad un cane del peso di 9400 gr. preparo la vena safena per iniettare il cloridrato di cocaina, quindi lo cloroformizzo; gli faccio la trapanazione del cranio sulla regione temporale e poi introduco nella breccia a traverso l'emisfero cerebrale un termometro Baudin sottile diviso in cinquantesimi di grado. Dopo 6 minuti faccio le seguenti osservazioni sulla temperatura del retto e del cervello.

(1) Vedi a questo riguardo i lavori pubblicati da Dumèril, Demarquay, Lecointe e i lavori di Falk e di Richet ed altri che si occuparono di questo argomento.

Ore	Cervello	Retto	
10.10	37°. 12		
» 16	» 12	36°. 70	
» 19	» 7	» 72	
» 21	» 4	» 70	
» 23	37°. »	» 70	
» 25	36°. 96	» 70	0,08 gr. cocaina.
» 28	» 86	» 64	0,04 gr. cocaina.
» 31	» 84	» 64	0,04 gr. cocaina.
» 35	» 82	» 62	0,04 gr. cocaina.
» 40	» 82	» 62	Pupilla dilatata — salivazione abbondante.
» 43	» 82	» 62	0,08 gr. cocaina; dopo cominciano le convulsioni.
» 44	» 82	» 62	
» 45	» 82	» 60	
» 51	» 80	» 61	0,04 gr. cocaina.
» 53	» 80	» 59	Contrazioni.
» 55	» 78	» 59	
» 57	» 78	» 59	
11 —	» 78	» 59	Immobile.
» 3	» 78	» 60	Solo ad intervalli qualche contrazione.
» 5	» 78	» 58	0,04 gr. cocaina.
» 6	» 78	» 54	Contrazioni.
» 7	» 78	» 52	Grida.
» 10	» 78	» 54	

Ore	Cervello	Retto	
11.13	36°. 78	36°. 58	
» 15	» 78	» 62	
» 19	» 88	» 70	
» 21	» 96	» 78	
» 22	37°. 10	» 90	
» 24	» 24	» 96	Si agita.
» 30	» 64	37°. 30	
» 35	37°. 40	38°. —	
» 37	» 70	» 22	
» 39	39°. 02	» 50	
» 40	» 36	» 84	
» 43	» 70	39°. 22	
» 46	40°. 04	» 65	
» 49	» 46	40°. 12	Il cuore batte celeremente. Continue convulsioni. Cessano le convulsioni.
» 53	41°. 10	» 66	
» 56	» 24	» 96	Salivazione abbondante e respirazione affannosa.
12. —	» 30	41°. 12	
» 6	» 30	» 21	
» 10	» 24	» 24	
» 14	» 22	» 24	
» 20	» 12	» 16	
» 28	40°. 98	40. 98	
La temperatura andò in seguito successivamente diminuendo.			

Per brevità non riferisco altre esperienze sul cloridrato di cocaina perchè l'azione fisiologica di questa sostanza la tratterò in un lavoro speciale.

Basti questo esempio per dimostrare quanto sia considerevole l'azione termica della cocaina data ad alte dosi (gr. 0,36). In un' ora e sei minuti vi fu un aumento di 4°. 72 pel retto; ed in soli quarantacinque minuti un aumento di 4°. 52 nella temperatura del cervello.

Non si può supporre che quest'aumento sia dovuto alla lesione del cervello, perchè in altre esperienze l'introduzione del termometro nel cervello dopo la trapanazione del cranio produsse sempre un abbassamento della temperatura. Del resto anche qui si vede che prima della cocaina la temperatura era in diminuzione costante, benchè il termometro fosse già messo nel cervello. In questa come in altre esperienze la temperatura

cominciò ad aumentare dopo mezz'ora dalla somministrazione della cocaina, e vediamo quanto la sua azione sia fugace perchè dopo 40 minuti l'animale incominciò a raffreddarsi.

L'aumento considerevole della temperatura di questa esperienza deve esclusivamente attribuirsi all'azione della cocaina.

Ho pure fatto delle esperienze colla *stricnina*, colla *tebaina* e colla *picrotossina* le quali diedero dei risultati analoghi; non le riferisco per brevità, bastandomi di essermi con esse convinto di un fatto che era sfuggito agli altri osservatori che fecero delle osservazioni analoghe, questo cioè che l'aumento della temperatura non è in rapporto intimo ed in stretta dipendenza colle contrazioni muscolari e le convulsioni.

III.

Le convulsioni non sono sempre seguite da un aumento di temperatura.

Prima di negare ai muscoli la grande importanza che loro si dà come focolai della temperatura animale, ho voluto assicurarmi se le misure della temperatura fatte nel retto erano sufficienti per conoscere la temperatura dell'organismo. A tale scopo in quasi tutte le mie esperienze misuravo la temperatura del sangue in vicinanza del cuore e nel retto ed in alcuni cani feci la trapanazione del cranio per prendere anche la temperatura del cervello.

I miei termometri Baudin erano paragonati fra di loro e capaci di dare l'esattezza nei centesimi di grado. Le osservazioni fatte contemporaneamente nel cervello, nel retto e nell'orecchietta destra dimostrarono che il sangue il quale veniva dalle estremità non era punto più caldo del cervello e del retto; anzi durante le contrazioni dei muscoli e le convulsioni prolungate constatai sempre una diminuzione della temperatura del sangue nell'orecchietta destra.

Questo fatto ripetutosi costantemente nelle mie osservazioni basterebbe già ad infirmare la dottrina che l'aumento della temperatura sia dovuto alla contrazione dei muscoli.

Nelle osservazioni che ho fatte colle sostanze convulsivanti

misurando la temperatura del sangue nella vena giugulare, ho veduto molte volte:

1° Che l' aumento della temperatura si manifestava già prima delle convulsioni.

2° Che durante le convulsioni la temperatura del sangue nell'orecchietta destra può abbassarsi.

3° Che quando esiste un aumento questo continua anche dopo che le convulsioni sono cessate da lungo tempo.

Riferisco alcuni esempi come prova di queste affermazioni.

Ad un cane del peso di 4760 gr. introduco un termometro nella giugulare fin presso il cuore e gli amministro 2 grammi di laudano nella safena alle ore 5.5.

Ore	Temp. giugulare		Ore	Temp. giugulare	
5. 15	36°. —		5. 42	35°. 05	
» 20	35°. 98		» 45	34°. 95	Forti convulsioni.
» 26	» 45	0,04 gr. cocaina.	» 47	» 90	
» 28	» 40	Fortissimo tetano con scosse violenti.	» 48	» 90	Sempre forti convulsioni.
» 29	» 42		» 52	» 80	0,04 gr. cocaina.
» 31	» 35		» 55	» 80	Convulsioni tetaniche.
» 34	» 22	Convulsioni tetaniche.	» 58	» 70	
» 36	» 15	0,04 gr. cocaina.	....	....	
» 38	» 10		....	....	

Da questa esperienza si vede che vi fu un abbassamento di 0°.70, in soli 30′ dopo che cominciarono le convulsioni.

Probabilmente il laudano come il cloralio agisce paralizzando l'azione termica del sistema nervoso senza agire con eguale intensità sull'azione motrice. Io non saprei spiegare in altro modo il risultato di questa esperienza, dove si vede che la cocaina produce ancora delle convulsioni, ma non più l'aumento di temperatura che certo essa avrebbe prodotto se non fosse preceduta l'iniezione del laudano.

Un cane col midollo tagliato sopra l' atlante ed a cui si praticava la respirazione artificiale, dopo la somministrazione di piccole dosi di stricnina ha avuto dei fortissimi accessi tetanici con opistotono e pleurostotono durante i quali si osservò una notevole diminuzione della temperatura; ecco un esempio:

Ad un cane del peso di 10350 grammi preparo la vena safena e la giugulare e dalle 9 ant. alle 2 pomeridiane inietto 54 centimetri cubici di lau-

dano. La temperatura del cane in questo frattempo diminuì da 38°.80 a 35°.60. Lasciato libero esso va ad accovacciarsi in un angolo della stanza.

Ripresa l'esperienza alle 3.23, la temperatura è di 30°.50.

Taglio il midollo sopra l'atlante e faccio la respirazione artificiale. Ecco come si comportò in seguito la temperatura:

Ore	Temperatura giugulare	
4. 28	35°. 65	
» 32	» 65	
» 35	» 55	
» 37	» 42	
» 41	» 25	
» 42	» 5	0,005 gr. di solfato di stricnina per iniezione sottocutanea.
» 43	35°. —	
» 44	34°. 95	
» 47	» 80	Toccato sulla schiena succede un tetano prolungato.
» 49	» 68	Ha delle contrazioni così forti che lo incurvano sul lato sinistro e sul destro.
» 50	» 65	Tetano fortissimo dei muscoli del dorso. Continue contrazioni.
» 52	» 60	0,005 gr. stricnina.
» 53	» 60	Sono così esagerati i riflessi che appena toccato per tastare il polso subito si agita convulsivamente.
5. —	» 45	
» 5	» 35	L'eccitabilità si esaurisce subito.
» 7	» 20	

Questa esperienza ci obbliga a fare alcune considerazioni: Noi vediamo che dopo il taglio del midollo allungato la temperatura si abbassa di 0°. 85 in venti minuti, mentre l'animale è immobile; e dopo nei venti minuti successivi sotto l'influenza della stricnina, benchè vi esistano delle forti contrazioni tetaniche persistenti, la temperatura si abbassa solo di 0°. 60. Dunque non sono le contrazioni che bastino ad aumentare la temperatura del corpo.

Si potrebbe credere che il taglio del midollo abbia sottratto una grande parte del corpo all'influenza dei centri termici: ed inferirne che questi si trovino solamente nel cervello e non nel midollo. Vedremo però nell'ultimo paragrafo che anche col midollo tagliato si può in un cane per mezzo della stricnina ottenere un aumento della temperatura. Probabilmente la dose altissima di laudano (54 cc.) iniettato nel sangue di questo animale aveva paralizzati i centri termici del midollo.

IV.

Esperienze intorno alle sostanze che diminuiscono la temperatura.

Intorno a quest'argomento dopo le prime ricerche di Dumèril, Demarquay e Lecointe ne vennero pubblicate altre recentemente, fra cui ricorderò quelle di Mayer che dimostrarono come il platino, il mercurio, il ferro, l'antimonio producono una diminuzione della temperatura: e così pure Grützner dimostrò che la potassa, il zinco, il manganese ed il tallio hanno una simile azione.

Fra i rimedi che possono considerarsi come paralizzanti dei centri termici tiene il primo posto il cloralio, come lo dimostra il seguente esempio:

Ad un cane di media grandezza scopro la trachea ed introduco nella vena giugulare un termometro Baudin fino in vicinanza del cuore. Alle 2.20 inietto nella vena safena 2 grammi di idrato di cloralio; e cessa il respiro, per cui sono obbligato a fare la respirazione artificiale col soffietto. La pupilla è molto ristretta e l'animale insensibile. Solo dopo mezz'ora, alle 2.50, incomincia a far da sè qualche movimento respiratorio. Il cane dopo un'ora si era rimesso e respirava spontaneamente.

Ore	Temperatura vena giugulare	Ore	Temperatura vena giugulare
2. 20	37°. 60	2. 42	36°. 20
» 24	» 45	» 44	» 10
» 26	» 35	» 50	35°. 90
» 28	» 20	» 53	» 70
» 30	» 5	» 56	» 50
» 33	36°. 90	» 57	» 40
» 36	» 70	» 59	» 35
» 38	» 65	....	....

In questa esperienza si vede quanto sia potente l'azione del cloralio perchè quantunque il cuore e la circolazione fossero in condizioni discrete, si ebbe una diminuzione della temperatura di 2°. 10 in 36 minuti. Evidentemente questo rapido raffreddamento è dovuto ad un arresto del potere termico perchè non si tratta qui di una dose mortale. Un cane per due grammi di

idrato di cloralio nelle vene si rimette completamente, e noi abbiamo avuto dei cani che resistettero senza morire a delle dosi molto maggiori.

Una dose analoga di curaro, cioè tale da permettere che l'animale si salvi per mezzo della respirazione artificiale, non produce certo una simile diminuzione della temperatura.

Anche il laudano ha la proprietà caratteristica di abbassare notevolmente la temperatura quando sia dato a dosi convenienti.

V.

Differente azione del cloralio e del curaro sulla temperatura animale.

Le esperienze dei precedenti paragrafi avevano per scopo di mostrare che fra le varie sostanze che rendono immobile un animale vi è una differenza profondissima per gli effetti che esse producono sulla temperatura dell'organismo. Il curaro che agisce paralizzando i muscoli ha una debole azione sulla temperatura. Ho già osservato che a piccole dosi anzi può aumentarla, e nel mio primo lavoro ho già pubblicato un'osservazione (1) dalla quale si vede che malgrado l'immobilità e la respirazione artificiale la temperatura del retto aumenta.

Il cloralio, benchè non agisca sui muscoli, diminuisce molto più fortemente la temperatura del curaro.

L'interpretazione più plausibile di questi due fatti è quella di abbandonare l'opinione fino ad ora generalmente seguita che siano i muscoli quelli che essenzialmente producono le variazioni della temperatura nel nostro organismo ed ammettere invece che vi sono delle sostanze le quali, come il cloralio, paralizzano l'azione termica, ed altre, come il curaro a piccole dosi, che lasciano persistere l'azione termica. Le seguenti esperienze dimostrano l'attendibilità di questa supposizione.

Quando si somministra l'idrato di cloralio a qualunque dose che non sia minima, non è più possibile produrre un aumento

(1) Loco citato, pag. 874.

di temperatura con quelle sostanze che abbiamo veduto precedentemente essere capaci di aumentare la temperatura.

Ad un cane del peso di 6630 gr. si prepara la giugulare e la safena.

Ore	Temperatura del sangue nella giugulare		Ore	Temperatura del sangue nella giugulare	
10. 25	. . . .	1 gr. di cloralio.	12. 8	35°. 40	
» 22	. . . .	Introduco il termometro dalla giugulare nell'orecchietta.	» 14	» 30	Reagisce al dolore.
			» 18	» 20	Si agita.
» 26	38°. 40	0,5 gr. cloralio.	» 24	» 14	Grida continuamente.
» 30	38°. —		» 30	» 10	Sensibilissimo.
» 35	37°. 70	0,5 gr. cloralio.	» 36	» 5	Si agita.
» 39	» 55		» 40	35°. —	Si agita.
» 42	» 35		» 44	34°. 90	1 gr. cloralio.
» 47	» 20		» 55	35°. —	
» 53	36°. 95	0,5 gr. cloralio.	1 6	35°. —	Addormentato profondamente.
11. —	» 75		» 12	34°. 95	
» 6	» 45		» 22	» 83	0,12 gr. cocaina.
» 12	» 32	1 gr. cloralio.	» 35	» 70	
» 19	» 40		» 43	» 55	
» 23	» 30		» 51	» 50	
» 30	» 20		» 58	» 42	0,08 gr. cocaina.
» 42	35°. 85	0,1 gr. cocaina.	2 04	» 40	Grida.
» 43	» 90		» 10	» 40	1 gr. cloralio.
» 45	» 95		» 12	» 50	Addormentato profondamente.
» 48	» 80		» 27	» 35	
» 52	» 70		» 42	» 05	0,12 gr. cocaina.
» 56	» 62		» 45	34°. —	Respiro superficiale. Cessa il respiro ed il battito cardiaco è debolissimo.
12. —	» 55				

In questa esperienza si vede che la cocaina anche per gr. 0.42, a dosi refratte, non è stata capace di produrre un aumento o di arrestare l'abbassamento della temperatura dopo circa 5 grammi di cloralio: invece si è prodotto un continuo abbassamento, malgrado che l'animale fosse completamente sveglio, eccitabilissimo e si agitasse.

Per brevità tralascio altri esempi che dimostrano come la tebaina e la picrotossina agiscano analogamente alla cocaina e alla stricnina.

Non solo la cocaina, ma anche la stricnina non esercita più alcuna influenza sulla temperatura dopo l'amministrazione di forti dosi di cloralio, quantunque la eccitabilità riflessa sia conservata e l'animale continui a muoversi.

Ad un cane del peso di 8370 gr. faccio la tracheotomia, preparo la giugulare e la safena.

Ore	Giugulare	Retto	
2.45	. . . .	. . . .	1 gr. cloralio.
3.03	37°. 40	. . . .	1 gr. cloralio.
» 7	» 23	38°. 25	1 gr. cloralio. Immobile, insensibile.
» 12	» 15		
» 15	36°. 95	» 15	0,10 gr. cocaina. Respiro più frequente.
» 19	37°. 5	» 8	
» 23	» 5	» 5	1 gr. cloralio.
» 25	37°. —	38°. —	
» 27	36°. 95	37°. 95	
» 31	» 80	» 80	
» 35	» 70	» 70	0,10 gr. cocaina. Durante la somministrazione si arresta il respiro momentaneamente.
» 39	» 55	» 50	
» 40	» 40	» 40	
» 45	» 35	» 30	
» 52	» 15	» 15	Insensibile.
» 55	» 10	» 10	
» 58	36°. —	37°. 04	
2 2	35°. 85	36°. 95	0,10 gr. cocaina.
» 4	» 80	» 90	
» 8	» 70	» 82	
» 12	» 65	» 75	1 gr. cloralio.
» 15	» 60	» 70	

Ore	Giugulare	Retto	
2.23	35°. 45	36°. 55	
» 29	» 20	» 35	0,002 gr. stricnina.
» 30	» 20	» 35	
» 32	» 20	» 30	
» 35	» 10	» 15	Eccitabilità riflessa aumentata.
» 37	35°. —	» 10	
» 42	34°. 90	35°. 95	0,005 gr. stricnina.
» 43	» 90	» 95	
» 48	» 80	» 90	Eccitabilità riflessa aumentata. Appena toccato entra in tetano. Il sangue cola dalle ferite.
» 50	» 78	» 82	
» 53	» 78	» 80	
» 57	» 70	» 70	0,002 gr. stricnina, sensibile al dolore.
» 59	» 60	» 70	
5.03	» 60	» 65	
» 6	» 55	» 60	Provoco delle contrazioni riflesse, ma la temperatura diminuisce.
» 12	» 50	» 55	
» 15	» 60	» 50	
» 20	» 55	» 40	Ha delle contrazioni spontanee.
» 26	» 45	» 30	
» 49	33°. 95	34°. 99	

Ho già dimostrato nel mio primo lavoro che la stricnina fa aumentare la temperatura dell'organismo negli animali a sangue freddo ed a sangue caldo, quando questi sono incapaci a muoversi per la precedente azione del curaro. Per questo riguardo rimando il lettore alla mia prima memoria. Debbo però aggiungere per coloro che ripetessero simili esperienze, che non sempre per azione della stricnina si osserva un aumento della temperatura dopo il curaro.

Due sono le cause che possono rendere negativi i risultati dell'esperienza, cioè: se si dà una dose troppo grande di curaro si paralizzano pure i centri termici: e se si dà una dose troppo grande di stricnina si ottiene il medesimo effetto.

Si sapeva già del resto per le ricerche di Paul Bongers (1) che la stricnina ha un'azione paralizzante come il curaro.

(1) Paul Bongers, *Archiv für Physiologie*, Du Bois Reymond, 1881, p. 336.

Nelle rane riesce assai più facilmente questa esperienza. Ne paralizzavo tre o quattro per mezzo del curaro e le mettevo sotto una piccola campana in modo che col loro corpo coprissero il bulbo di un termometro calorimetrico diviso in cinquantesimi di grado (1). Veduta l'azione del curaro sulla temperatura delle rane, iniettavo circa 0,00018 di solfato di stricnina nell'addome di ciascuna rana con un lungo ago dello schizzetto di Pravaz; poco dopo si produceva un aumento di temperatura senza che vi esistesse una contrazione dei muscoli.

Nei cani riesce meno facilmente questa esperienza; perchè è difficile amministrare la stricnina nelle dosi volute per ottenere un aumento di temperatura nell'animale sano; ma mi è spesso riuscito in una lunga serie di esperienze di ottenere quel giusto grado di immobilità per curaro che paralizza i muscoli senza ledere i centri termici; ed iniettando dopo la stricnina a piccole dosi, potei osservare considerevoli aumenti di temperatura, senza che l'animale facesse il più piccolo movimento, come lo prova il seguente esempio:

Ad un cane del peso di 13400 gr. faccio la tracheotomia, preparo la vena giugulare e la safena.

Ore	Temper. della giugulare	Temper. rettale		Ore	Temper. della giugulare	Temper. rettale	
2.58	38°. 70			3 58	38°. 65	39°. 40	
3. 2	» 60			4 02	» 75	» 50	Sempre immobile.
» 10	» 50			» 04	» 80	» 52	
» 14	» 45			» 06	» 85	» 56	Polso 166 al minuto.
» 25	» 30	. . . .	0,006 gr. curaro.	» 09	» 90	» 58	
» 30	» 15		0,006 gr. curaro. Forti contrazioni.	» 12	» 85	» 60	Polso 160 al minuto.
» 32	» 20	39°. 10		» 16	» 85	» 65	0,005 stricnina. Polso irregolare e lento.
» 36	» 20	» 15	Respirazione artificiale. Non reagisce più al dolore.	» 18	» 80	» 50	
				» 20	» 70	» 35	
» 42	» 10	» 10	0,005 gr. stricnina.	» 24	» 65	» 25	
» 44	» 25	» 10		» 24	» 65	» 20	L'animale ha dei sussulti, la temperatura diminuisce.
» 45	» 35	» 20					
» 47	» 40	» 20		» 26	» 60	» 20	
» 48	» 45	» 20	0,005 gr. stricnina.	. . .	. . . .	. . . .	
» 50	» 50	» 25		. . .	. . . .	. . . .	
» 54	» 60	» 30					

(1) Loco citato, pag. 870.

VI.

Sull'aumento di temperatura che in alcuni avvelenamenti precede la morte.

Nelle mie ricerche sull'azione dei veleni ho veduto spesso un fatto che dimostra in modo evidente l'azione del sistema nervoso sulla temperatura. Si tratta di animali avvelenati colla tebaina, colla picrotossina e coll'acido lattico, nei quali subito dopo l'azione del veleno la temperatura rettale presentò una forte diminuzione e trascorso un certo periodo cominciò ad aumentare senza causa nota. L'animale non presentò delle convulsioni e delle contrazioni muscolari esagerate, e ciò nullameno la temperatura crebbe rapidamente e dopo l'animale moriva.

Prima di riferire alcune esperienze in proposito che feci sui colombi, accennerò un fatto che dimostra in altro modo egualmente sicuro l'influenza del sistema nervoso sulla temperatura animale.

Ho già fatto conoscere nel mio precedente lavoro il forte aumento che presenta la temperatura rettale dei cani quando questi si trovano sotto l'influenza di una emozione (1); ho voluto vedere se potevo confermare il medesimo fatto per i piccioni.

A tale scopo mi bastava di sorprendere questi animali nella piccionaia e fare in modo da misurare quanto più presto mi era possibile la loro temperatura, senza dar tempo all'emozione prodotta dalla mia presenza di aumentare la temperatura del loro corpo.

Le osservazioni fatte a questo modo mi diedero le temperature più basse che io abbia osservato in questi uccelli: nei mesi di marzo ed aprile esse oscillavano fra i 40° ed i 40°.50. Dopo avere sorpreso un colombo nello stato di profonda tranquillità basta tenerlo fra le mani per vedere che la sua temperatura aumenta in circa 15 minuti di oltre mezzo grado, e questo succede anche se l'animale è tenuto in modo che non possa agitare le ali.

---

(1) Loco citato, pag. 877.

Picrotossina.

Alle ore 3.30 prendo nella piccionaia un colombo trigono bigio, subito dopo la temperatura rettale = 40°.40. Portato a basso dopo 17 minuti temperatura = 41°. Quindi senza causa nota la temperatura diminuisce: durante questo periodo ho iniettato nei muscoli pettorali per mezzo di uno schizzetto Pravaz in due volte 0,002 di picrotossina. La seguente tabella indica come variò la temperatura. Alle 4.29 incominciò a manifestarsi un aumento di temperatura senza causa nota e senza che vi esistano convulsioni. L'animale fa alcuni movimenti come se volesse vomitare, sembra più sofferente di prima e vomita. La temperatura in 12 minuti aumentò di 1°.25.

Ore	Temp. rettale		Ore	Temp. rettale	
3. 30	40°. 40	Nella piccionaia.	4. 22	40°. 35	
» 34	» 65	Portato in laboratorio.	» 25	» 30	
» 38	» 70	Lo tengo in mano.	» 27	» 30	
» 40	» 80	Id.	» 29	» 20	0,001 gr. di picrotossina.
» 41	» 90	Sempre immobile.	» 30	» 30	
» 45	» 95	Id.	» 31	» 45	
» 47	41°. —	Aumento di 0°.60 per emozione.	» 34	» 50	Fa dei movimenti colla testa. È molto sofferente.
» 55	40°. 90	Sempre immobile.			
4 00	» 90		» 35	» 75	Vomita.
» 05	» 90	0,001 gr. **picrotossina** per iniezione intramuscolare.	» 37	41°. 15	Respirazione affannosa.
			» 38	» 30	
» 08	» 80		» 39	» 50	Muore in un repentino accesso di convulsioni, mentre prima era stato calmo ma in uno stato di malessere spiccato.
» 10	» 70				
» 14	» 80				
» 15	» 85				
» 20	» 55	Vomita.	» 41	» 30	
» 21	» 50		» 45	» 30	

Tebaina.

Su quattro esperienze fatte sui piccioni colla tebaina, osservai due volte un aumento premortale della temperatura. Riferisco una di queste esperienze.

Un colombo monaro aveva alle 2,45 una temperatura di 42°.10, dopo 25 minuti la temperatura rettale era discesa a 40°.90; alle 3.10 inietto sotto la

pello 0,005 gr. di tebaina; le variazioni successive della temperatura sono date nella seguente tabella.

Ore	Temp. rettale		Ore	Temp. rettale	
3. 10	40°. 90	0,005 gr. tebaina.	3. 38	40°. 50	102 pulsaz.
» 11	» 90		» 39	» 60	
» 12	» 95	108 pulsaz. al 1'.	» 40	» 70	
» 15	» 85		» 41	» 95	Ha un accesso di convulsioni, boccheggia, è sofferente.
» 17	» 75				
» 18	» 70		» 42	41°. —	Frequenti respirazioni, pulsazioni assai celeri, cessate le convulsioni.
» 20	» 60	90 pulsaz. al 1'.			
» 24	» 40		» 44	» 10	
» 27	» 70		» 45	» 20	
» 28	» 80		» 46	» 35	Muore.
» 31	» 85	132 pulsaz. al 1'.	» 47	» 42	
» 35	» 80	112 pulsaz. al 1'.	» 48	» 45	
» 36	» 65	0,005 gr. tebaina.	» 49	» 50	
» 37	» 55	108 pulsaz. al 1'.	» 54	» 50	È già incominciata la rigidità.

In questa esperienza l'aumento di temperatura prima di morire è stato di 0°.95 in 22 minuti e l'aumento totale di 1°.10 in 29 minuti.

Acido lattico.

Ad un cane di media grandezza si iniettano quattro grammi di acido lattico sciolto in 50 grammi di acqua nella cavità addominale; in tutto il giorno non presenta alcun fenomeno notevole tranne le orine rosse contenenti metaemoglobina, vomito, inappetenza. Nel giorno successivo l'animale è abbattuto. Temperatura rettale = 35°.3. Polso = 120. Resp. 20 al 1'. L'animale è però abbastanza in forza da reggersi sulle gambe e passeggia pel Laboratorio: ore 1,25 pom. temperatura = 33°.35, Polso 106. Respiro 14; pupilla normale, estremità insensibili alla pressione.

Alle ore 2,35 dopo che esso è rimasto da circa un'ora completamente immobile disteso sul pavimento trovo con sorpresa che la temperatura è cresciuta a 37°.50, polso 120, respiro 8. Vi fu dunque un aumento di più di 4 gradi in quasi un'ora; e questo grande sviluppo di calore ebbe luogo sotto i miei occhi mentre l'animale era perfettamente immobile. Il termometro era ancora nel retto quando l'animale ebbe un accesso

di convulsioni; i muscoli delle estremità si contrassero così forte che le zampe divennero rigide e si conservarono in tale stato per quasi un minuto, la testa si piegò fortemente all'indietro, ed il respiro cessò per alcuni momenti, poi riprese ed i muscoli si rilasciarono. Vi furono due altri accessi e dopo il respiro cessò completamente. Alle ore 2.42 la temperatura = 37°.90 ed il cuore cessava di battere.

Negli ultimi minuti che visse osservai una forte differenza nella dilatazione delle due pupille; una rimase quasi normale e l'altra si dilatò ampiamente. Questo fatto accenna ad un disturbo nelle funzioni dei centri nervosi. L'aumento di 0°.4 che si osservò durante le convulsioni non devesi mettere unicamente a carico della contrazione muscolare perchè una parte notevole di quest'aumento dipende pure dall'asfissia.

In un altro cane del peso di 20 chilog. avvelenato coll'acido lattico nei 7 minuti che precedettero la morte vi fu un aumento di mezzo grado da 41°.2 a 41°.7.

L'elevazione della temperatura che precede la morte è così grande in queste esperienze che dobbiamo escludere si tratti semplicemente di una diminuzione della perdita periferica di calore per la circolazione meno attiva alla superficie del corpo.

È probabile che a quest'aumento premortale della temperatura non sia del tutto estraneo il rallentamento del respiro, che per mezzo dell'acido carbonico eccita i centri nervosi; ma anche ammessa questa spiegazione resterebbe dalle mie esperienze egualmente dimostrato che i centri nervosi possono indipendentemente dalle contrazioni dei muscoli produrre un forte aumento della temperatura prima della morte.

VII.

Sull'azione dei veleni negli animali che hanno il midollo tagliato.

Dopo di essermi convinto, per le precedenti esperienze, che vi sono delle sostanze le quali agiscono sul potere termico del sistema nervoso, ed altre che non hanno eguale influenza, ho voluto ricercare se i centri di questa attività si trovano esclusivamente nel cervello, o se pure siano sparsi anche nella sostanza nervosa del mi-

dollo spinale. A tale scopo bastava tagliare il midollo spinale dopo aver scoperto la membrana atlanto-occipitale e vedere come si comportava la temperatura dopo la somministrazione della stricnina.

Esperienze	Temperatura		
Ore	retto	giugulare	
11. 19	33°. 35	32°. 60	
» 20	» 30	» 50	Convulsione spontanea.
» 25	» 20	» 40	Forte tetano.
» 28	» 05	» 45	Eccitabilità riflessa aumentata.
» 32	. . . .	» 20	Tetano spontaneo generale.
» 33	. . . .	31°. 80	
» 34	. . . .	» 50	
» 37	. . . .	» 60	Cessate le convulsioni generali, la temperatura aumenta.
» 38	32. 25	» 70	
» 40	. . . .	32°. —	
» 43	. . . .	» 15	Alcune contrazioni isolate. Toccandolo si provocano contrazioni tetaniche.
» 44	32. —	» 25	
» 50	32°. 80	31°. 80	

In questa esperienza si osserva che durante il tetano e le convulsioni la temperatura della giugulare di un cane col midollo tagliato sopra l'atlante, diminuisce di 1°.10 nello spazio di 15 minuti; e che quando sono cessate le contrazioni generali la temperatura aumentò di 0°.65 in 10 minuti.

In base a questa ed altre esperienze si può ammettere che esistano dei centri termici anche nel midollo spinale.

SULLA

LEGGE DI RIPARTIZIONE

DELL'INTENSITÀ LUMINOSA

FRA I RAGGI BIRIFRATTI DA LAMINE CRISTALLINE

del Socio Prof. G. Basso

I.

Nel capitolo terzo della celebre sua Memoria *Sulla teoria della doppia rifrazione* (*) Malus presentò la nota legge del *coseno quadrato*, la quale può enunciarsi nel modo seguente. Quando un raggio di luce naturale cade normalmente sopra una faccia di un cristallo di calcite e ne esce da una seconda faccia parallela alla prima, i due raggi emergenti, l'ordinario e lo straordinario, hanno la medesima intensità; ma se il raggio incidente è totalmente polarizzato in un piano facente l'angolo θ colla sezione principale dalla lamina cristallina, le intensità dei due raggi uscenti stanno fra di loro nel rapporto di $\cos^2\theta$ a $\operatorname{sen}^2\theta$.

Non pare che a questa legge Malus sia stato condotto da considerazioni teoriche; è invece probabile che egli l'abbia accolta per vera, per la ragione che essa interpreta nel modo più semplice i fatti da lui osservati direttamente per il caso in cui θ è nullo, o retto, o semiretto, e soddisfa ad un tempo la condizione che la somma delle intensità dei due raggi birifratti è sempre eguale all'intensità della luce penetrata nel cristallo.

Verso il 1830 F. Arago (**) intraprese una serie di accurate

(*) *Théorie de la double réfraction*, par M. Malus; Mémoire couronné dans la séance publique de l'Institut du 2 Janvier 1810.

(**) *Œuvres complètes* de F. Arago (Mémoires scientifiques), tom. 1.

esperienze per sottoporre alla verificazione sperimentale la legge di Malus. Applicando un procedimento fotometrico indipendente dai fenomeni di polarizzazione, egli incominciò a costruire una tavola delle intensità della luce riflessa sotto varie incidenze da una lamina di vetro; poscia paragonò queste intensità con quelle che, ammessa la legge di Malus, gli erano fornite da luce attraversante un prisma birifrangente di calcite. Da questo confronto Arago credè di poter inferire che la legge in discorso si trova in pieno accordo coll'esperienza. Per ciò che riguarda l'eguaglianza d'intensità dei due raggi birifratti, provenienti da luce incidente naturale, Laugier e Petit eseguirono, per incarico dello stesso Arago, altri studi adoperando lamine di cristallo di rocca, e trovarono che il rapporto di quelle intensità differiva dall'unità per meno di un cinquantesimo.

Dopo tutte queste ricerche l'esattezza della legge di Malus non fu più per lungo tempo messa in discussione. Arago l'assunse come principio fondamentale del suo noto fotometro, cui egli stesso ed altri applicarono a varie sorta di investigazioni; p. e. allo studio del potere riflettente dei metalli, alla misura dell'intensità luminosa delle stelle, del sole e delle varie regioni del disco solare, alla graduazione dei polarimetri, ecc. Più recentemente la stessa legge fu applicata da A. Beer e da O. Hagen (*) nei loro lavori sull'assorbimento della luce nei cristalli e da Provostaye e Desains (**) nella determinazione del potere emissivo dei corpi incandescenti.

Però la questione dell'attendibilità della legge in discorso fu ravvivata dal sig. H. Wild (***) in un lavoro pubblicato nel 1863 sopra delicate ricerche fotometriche da lui eseguite. Facendo uso del fotometro che porta il suo nome il sig. Wild sperimentò sulla luce completamente polarizzata, cui egli faceva, con incidenza normale, attraversare una lamina di spato calcare a facce parallele e cercò quale era l'angolo θ del piano di polarizzazione del raggio incidente colla sezione principale, quando, all'uscita dalla lamina, i due raggi, ordinario e straordinario, presentavano la stessa intensità. Trovò, come valore medio delle sue osservazioni:

(*) Annalen der Physik und Chemie; B. 81 and 106.

(**) Compt. rend. de l'Acad. de Paris, t. 38.

(***) *Photometrische Untersuchungen;* Annalen der Physik und Chemie; B. 118.

$\theta = 44^\circ\ 36'$ e non 45°, come dovrebbe essere se la legge di Malus fosse esatta. Questa discrepanza di $24'$ apparisce abbastanza importante, quando si consideri che la delicatezza del procedimento fotometrico adoperato consentiva la determinazione dell'angolo θ con un errore non eccedente il mezzo minuto primo.

Inoltre, ricorrendo a luce incidente naturale, mentre secondo la legge di Malus i due raggi emergenti avrebbero dovuto apparire sempre di eguale intensità, ciò non si verificò esattamente; il dott. Simmler, aiuto del prof. Wild, riconobbe che il raggio straordinario è sempre un po' più intenso dell'ordinario, la qual cosa d'altronde era già stata affermata prima da Haidinger.

Lo stesso sig. Wild ha in seguito dimostrato che i risultati sperimentali da lui ottenuti si accordano meglio colla nota teoria di F.-E. Neumann (*). Però questa teoria si fonda essenzialmente sopra due ipotesi che non sono dal maggior numero dei fisici ammesse, perchè in contraddizione coi postulati fondamentali dell'ordinaria teoria meccanica della luce; cioè essa suppone che il piano di polarizzazione per un raggio polarizzato rettilineamente passi per la direzione del raggio, e contenga le linee di vibrazione, e che l'etere sia egualmente denso in tutti i mezzi, e diversamente elastico secondo la varia natura di questi.

Io mi propongo nelle pagine seguenti di esaminare teoricamente la questione del modo con cui si riparte la intensità luminosa fra i due raggi birifratti che attraversano od escono da una lamina di cristallo uniasse; però intendo di battere un'altra via, partendo dal concetto della intensità luminosa, quale scaturisce dalla teoria elettromagnetica della luce.

II.

Quando si assume, per l'interpretazione dei fenomeni ottici, la ordinaria teoria meccanica elaborata specialmente da Fresnel, l'intensità di un dato fascetto luminoso è rappresentata dalla somma delle forze vive animanti, in un istante qualunque, le particelle eteree contenute in una porzione prismatica del fascetto, la quale abbia per altezza la lunghezza d'onda. Invece nella

(*) *Theoretische Untersuchung der Gesetze, nach welchen das Licht an der Grenze zweier wollkommen durchsichtigen Medien reflectirt und gebrochen wird;* Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1835.

teoria elettromagnetica della luce si considera l'energia potenziale elettrodinamica posseduta dal sistema di correnti elettriche che occupa il volume del detto prisma e si deve calcolare il potenziale elettrodinamico di tale sistema su se stesso, ricorrendo alla sua espressione generale:

$$-\frac{1}{2}\iiint dx\,dy\,dz\,(Fu+Gv+Hw)\ .$$

Quivi dx, dy, dz sono le proiezioni, secondo gli assi coordinati rettangolari, di una corrente elementare qualunque di posizione (x, y, z) per la quale le componenti del flusso elettrico sono u, v, w. (Si sa che il flusso elettrico nella teoria elettromagnetica della luce corrisponde alla velocità vibratoria o *amplitudine* di vibrazione eterea nella teoria fresnelliana). Le F, G, H sono tre note funzioni così designate da Maxwell (*) dalla cui conoscenza dipende la determinazione delle azioni esercitate dal sistema dei flussi elettrici che costituiscono lo stato periodicamente variabile di polarizzazione in un mezzo coibente.

Un raggio luminoso, dopo di aver attraversato un mezzo isotropo com'è l'aria, cada coll'angolo i d'incidenza sopra una faccia di un cristallo birifrangente uniasse e generi così un raggio riflesso e due raggi rifratti, l'ordinario e lo straordinario. Sulla faccia rifrangente prendasi una porzione d'area σ piccolissima e la si consideri come base comune di quattro fascetti luminosi, aventi le direzioni dei quattro raggi, incidente, riflesso e due rifratti. Limitando le lunghezze dei fascetti in modo che esse rappresentino le rispettive lunghezze d'onda L, L, L_1, L_2, ne risultano quattro prismi, per ciascuno dei quali si deve esprimere il potenziale elettrodinamico corrispondente. Si indichino questi potenziali con P, P', P_1, P_2. In un mio precedente lavoro (**) ho dimostrato che designando con T la durata di ogni perturbazione od oscillazione elettrica e ponendo:

$$\int_0^1 dz\,\mathrm{sen}^2(Tz-t)=2\,Q\ .$$

(*) *A treatise on electricity and magnetism*, by J. Clerk Maxwell, vol. 2, Chapter XX.

(**) *Fenomeni di riflessione cristallina interpretati secondo la teoria elettromagnetica della luce;* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XX, 1885.

le espresssioni dei detti potenziali elettrodinamici si possono presentare sotto la forma:

$$P = Q \frac{T^2 \sigma \cos i}{4 \pi L} ,$$

$$P' = Q \frac{T^2 \sigma \cos i}{4 \pi L} V^2 ,$$

$$P_1 = Q \frac{T^2 \sigma \cos r}{4 \pi L_1} u_1^2 ,$$

$$P_2 = Q \frac{T^2 \sigma \cos \lambda}{4 \pi L_2 \cos \omega} u_2^2 .$$

V, u_1, u_2 sono i flussi elettrici proprii della luce riflessa e della luce ordinaria e della straordinaria rifratte, assumendo come unità il flusso elettrico del raggio incidente; r è l'angolo di rifrazione ordinaria, ω l'angolo che il raggio rifratto straordinario fa colla normale al suo elemento d'onda, e λ è l'angolo che l'onda elementare straordinaria fa colla faccia rifrangente.

Il principio della *conservazione dell' energia luminosa* si traduce nella equazione:

$$P = P' + P_1 + P_2 \qquad \ldots (1)$$

la quale dice, in altri termini, che la quantità di luce che costituisce il raggio incidente si suddivide integralmente nel raggio riflesso e nei due rifratti.

Perciò nel caso attuale si ha:

$$\frac{\cos i}{L} = \frac{\cos i}{L} V^2 + \frac{\cos r}{L_1} u_1^2 + \frac{1}{L_2} \frac{\cos \lambda}{\cos \omega} u_2^2 ,$$

od ancora:

$$1 - V^2 = \frac{L}{L_1} \frac{\cos r}{\cos i} u_1^2 + \frac{L}{L_2} \frac{\cos \lambda}{\cos i \cos \omega} u_2^2 . \qquad \ldots (2)$$

Di guisa che, essendo eguale all'unità l'intensità del raggio incidente, l'intensità del raggio riflesso sarà V^2 e le intensità

I_0, I_s dei due raggi birifratti, ordinario e straordinario, saranno:

$$I_0 = \frac{L}{L_1} \frac{\cos r}{\cos i} u_1^2 , \qquad I_s = \frac{L}{L_2} \frac{\cos \lambda}{\cos i \cos \omega} u_2^2 ,$$

La determinazione delle quantità da cui dipendono i cercati valori di I_0 e I_s esige che si tenga ancora conto del così detto *principio di continuità*.

Nel mio lavoro citato precedentemente (pag. 19 e seg.) ho dimostrato che, quando il piano d'incidenza coincide colla sezione principale del cristallo, questo principio conduce alle tre equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &\cos i (\operatorname{sen} \theta + V \operatorname{sen} \psi) = u_2 \operatorname{sen} \alpha \\ &\cos \theta + V \cos \psi = -u_1 \\ &\cos \theta - V \cos \psi = -u_1 \frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

dove α è l'angolo che la direzione del flusso elettrico pel raggio rifratto straordinario fa colla normale alla faccia rifrangente e ψ è l'angolo che il piano di polarizzazione del raggio riflesso fa col piano d'incidenza.

III.

Per applicare le nozioni precedenti al problema di cui qui si tratta dobbiamo discendere alle condizioni speciali in cui la legge di Malus venne proposta dal suo autore. Perciò abbiasi un cristallo birifrangente uniasse i cui indici di rifrazione ordinaria e straordinaria siano rispettivamente $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ e si prenda come superficie rifrangente una faccia del cristallo facente l'angolo ε coll'asse ottico. Se un raggio d'intensità *uno* cade normalmente sopra questa faccia, esso penetra nel cristallo dando luogo ad un raggio rifratto ordinario d'intensità I_0 pure normale alla faccia stessa e ad un raggio straordinario d'intensità I_s che fa colla normale alla faccia un certo angolo ρ. S'intenda costruita nella sezione principale del cristallo e nell'interno di questo l'ellissi che ha per centro il punto d'incidenza e per semiassi a e b, essendo il primo di questi semiassi diretto secondo l'asse ottico.

Condotta parallelamente alla faccia rifrangente la tangente all'ellissi, la retta che congiunge il punto di contatto col punto d'incidenza rappresenta, conformemente alla notissima costruzione di Huyghens, il raggio rifratto straordinario. Se ne deduce facilmente la relazione:

$$\operatorname{tang}\rho = \frac{(b^2 - a^2)\operatorname{tang}\varepsilon}{a^2\operatorname{tang}^2\varepsilon + b^2}\,.$$

Inoltre, trattandosi qui d'incidenza normale, sarà:

$$\lambda = 0\,, \qquad \omega = \rho\,,$$

perchè l'elemento d'onda straordinaria è parallelo alla faccia rifrangente.

Chiaminsi a', b' i due semidiametri coniugati dell'ellissi, dei quali il primo giace sulla faccia rifrangente e fa per conseguenza l'angolo ε coll'asse ottico; sia ε' l'angolo che collo stesso asse ottico fa il secondo diametro coniugato. Si ricordino le relazioni note:

$$\operatorname{tang}\varepsilon\operatorname{tang}\varepsilon' = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2\operatorname{sen}^2\varepsilon + b^2\cos^2\varepsilon}\,, \qquad b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2\operatorname{sen}^2\varepsilon' + b^2\cos^2\varepsilon'}\,.$$

Il rapporto $\frac{L_1}{L}$ è uguale a $\frac{\operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} i}$ e vale a per qualunque incidenza; il rapporto $\frac{L_2}{L}$ per qualunque incidenza è uguale a

$$\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{sen} i}\,;$$

e siccome la costruzione di Huyghens dà:

$$\operatorname{sen}\lambda = \frac{b'\operatorname{sen} i}{\sqrt{1 + (b'^2 - a'^2)\operatorname{sen}^2 i}}\,,$$

si avrà per l'incidenza normale:

$$\frac{L_2}{L} = b'\,.$$

Sostituendo questi valori nell'equazione (2) essa diventa:

$$1 - V^2 = \frac{u_1^2}{a} + \frac{u_2^2}{b' \cos \rho} \,. \qquad \ldots (4)$$

La direzione del flusso elettrico pel raggio rifratto straordinario forma l'angolo ρ colla faccia rifrangente; perciò introducendo nella terna di equazioni (3) le condizioni:

$$i = 0 \,, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} - \rho \,,$$

se ne ottiene:

$$\operatorname{sen} \theta + V \operatorname{sen} \psi = u_2 \cos \rho$$

$$\cos \theta + V \cos \psi = - u_1$$

$$\cos \theta - V \cos \psi = - \frac{u_1}{a} \,,$$

ovvero più comodamente:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta + V \operatorname{sen} \psi &= u_2 \cos \rho \\ u_1 &= - \frac{2 a \cos \theta}{1 + a} \\ V \cos \psi &= - \cos \theta \frac{1 - a}{1 + a} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (5)$$

L'equazione (4) e le tre (5) servono ad eliminare la V e la ψ ed a fornirci i valori di u_1 e di u_2. Si ottiene così:

$$u_1 = - \frac{2 a}{1 + a} \cos \theta$$

$$u_2 = \frac{2 b' \cos^2 \rho}{1 + b' \cos^3 \rho} \,.$$

Ricorrendo ora alle espressioni generali già ottenute per I_0 e I_s e ponendo anche in esse:

$$i = r = \lambda = 0 \,, \qquad \omega = \rho \,,$$

se ne ricava:

$$I_0 = \frac{4a}{(1+a)^2} \cos^2 \theta$$

$$I_s = \frac{4c}{(1+c)^2} \operatorname{sen}^2 \theta$$

dove si è messo per brevità:

$$c = b' \cos^3 \rho .$$

La quantità c sarebbe eguale ad a se fosse: $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, cioè se la faccia rifrangente fosse normale all'asse ottico; essa va crescendo col diminuire di ε e diventa eguale a b per $\varepsilon = 0$.

Da ciò che precede vedesi che il rapporto $\frac{I_0}{I_s}$ non è eguale a $\frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}$ e che perciò, per i due raggi birifratti, considerati nell'interno del mezzo indefinito, la legge di Malus non è dalla teoria esattamente verificata. Lo sarebbe soltanto nel caso in cui, a motivo del debole potere birifrangente del mezzo, si potesse assumere c come sensibilmente eguale ad a.

Vedesi inoltre che l'eguaglianza d'intensità pei due raggi rifratti non ha luogo per $\theta = 45°$, bensì si ha quando l'angolo θ_1 del piano di polarizzazione della luce incidente colla sezione principale è tale da verificare la condizione:

$$\operatorname{tang} \theta_1 = \frac{1+c}{1+a} \sqrt{\frac{a}{c}} .$$

Scendendo ad un esempio numerico, prendasi come mezzo birifrangente la calcite, per la quale le migliori determinazioni sperimentali dànno:

$$a = 0{,}6045 , \qquad b = 0{,}6742 .$$

La superficie rifrangente sia una delle facce naturali della forma romboedrica fondamentale, per cui si ha:

$$\varepsilon = 45° \, 23' \, 20'' .$$

Dalle formole precedenti si ottiene:

$$\rho = 6^\circ\, 12' , \qquad b' = 0{,}6436 ,$$

e quindi

$$\frac{4a}{(1+a)^2} = 0{,}9392 ,$$

$$\frac{4a}{(1+c)^2} = 0{,}9492 .$$

Si scorge che, per $\theta = 45^\circ$, l'intensità del raggio straordinario supera di circa un centesimo del suo valore quella del raggio ordinario. Per avere l'eguaglianza rigorosa d'intensità fra i due raggi bisogna che l'azimut θ_1 di polarizzazione del raggio incidente sia:

$$\theta_1 = 44^\circ\, 50'\, 55'' .$$

IV.

Affinchè i risultati teorici siano meglio suscettibili di confronti sperimentali, conviene studiare ancora il fenomeno dell'uscita dei due raggi birifratti da una seconda faccia del cristallo parallela a quella d'entrata su cui ha luogo l'incidenza normale.

I raggi emergenti sono entrambi normali alle facce del cristallo; però, mentre il raggio ordinario trovasi sul prolungamento del raggio incidente, lo straordinario se ne scosta della quantità $s \operatorname{tang} \rho$, essendo s lo spessore della lamina cristallina.

Il raggio ordinario interno, pel quale si trovò il flusso elettrico u_1 espresso da: $-\frac{2a}{1+a}\cos\theta$, genera alla faccia d'uscita un raggio riflesso di flusso v_1 ed un solo raggio rifratto (l'emergente ordinario) di flusso U_1. Le direzioni dei tre flussi essendo normali alla sezione principale, il principio di continuità dà luogo all'unica condizione:

$$u_1 + v_1 = U_1 . \qquad \ldots (6)$$

Per altra parte il potenziale elettrodinamico P_1, che rappresenta l'intensità del raggio ordinario interno, si è trovato

essere eguale a

$$Q\frac{T^2\sigma\cos i}{4\pi L_1}u_1^2$$

e trovasi, in modo analogo, che i potenziali elettrodinamici R e E per il raggio riflesso ed il raggio emergente sono rispettivamente:

$$R=Q\frac{T^2\sigma\cos i}{4\pi L_1}v_1^2\,,$$

$$E=Q\frac{T^2\sigma\cos r}{4\pi L}U_1^2\,.$$

Essendo nel nostro caso:

$$i=r=0\,,\qquad \frac{L_1}{L}=a\,,$$

l'equazione che esprime la conservazione dell'energia, cioè:

$$P_1=R+E$$

qui diventa:

$$u_1^2-v_1^2=aU_1^2. \qquad \ldots(7)$$

Combinando la (6) e la (7) e ricordando l'espressione di u_1 si ottiene:

$$v_1=\frac{1-a}{1+a}u_1=-\frac{2a(1-a)}{(1+a)^2}\cos\theta$$

$$U_1=-\frac{4a\cos\theta}{(1+a)^2}\,.$$

Essendo sempre *uno* l'intensità del primo raggio incidente, indichiamo con R_0, E_0 rispettivamente le intensità del raggio riflesso interno di flusso v_1 e del raggio ordinario emergente di flusso U_1. Si avrà immediatamente:

$$R_0=\frac{R}{P}=\frac{L}{L_1}v_1^2=\frac{v_1^2}{a}=\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 I_0=\frac{4a(1-a)^2}{(1+a)^4}\cos^2\theta$$

$$E_0=\frac{E}{P}=U_1^2=\frac{4a}{(1+a)^2}I_0=\frac{16a}{(1+a)^4}\cos^2\theta\,.$$

Vedesi che, nello attraversare normalmente una faccia cristallina, tanto nel caso di entrata, come in quello di uscita, un raggio polarizzato nella sezione principale diminuisce d'intensità in modo che il rapporto fra la sua intensità dopo l'attraversamento e l'intensità che prima aveva trovasi espresso da

$$\frac{4a}{(1+a)^2}.$$

Risulta pure che, in ogni riflessione interna di un raggio polarizzato nella sezione principale, l'intensità del raggio riflesso sta a quella del raggio incidente nel rapporto di $\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2$ ad uno.

Il raggio straordinario interno I_s giungendo alla faccia di uscita genera un raggio riflesso sotto l'angolo ρ d'incidenza e di riflessione ed un raggio rifratto emergente normale alla faccia. I flussi elettrici, che chiamo u_2, v_2, U_2 rispettivamente per il raggio incidente, il riflesso e l'emergente, hanno direzioni giacenti nella sezione principale e si è già trovato:

$$u_2 = \frac{2b' \cos^2 \rho}{1 + b' \cos^3 \rho} \operatorname{sen} \theta .$$

Le proiezioni dei tre flussi sulla faccia di emergenza essendo

$$u_2 \cos \rho , \qquad v_2 \cos \rho , \qquad U_2 ,$$

il principio di continuità si esprime colla semplice relazione:

$$\cos \rho (u_2 + v_2) = U_2 . \qquad \ldots (8)$$

Chiamando rispettivamente P_2, R', E' i potenziali elettrodinamici relativi ai tre raggi, ricordiamo che si è già ottenuto:

$$P_2 = Q \frac{T^2 \sigma}{4 \pi L_2} \frac{1}{\cos \rho} u_2^2 ;$$

otteniamo egualmente:

$$R' = Q \frac{T^2 \sigma}{4 \pi L_2} \frac{1}{\cos \rho} v_2^2$$

$$E' = Q \frac{T^2 \sigma}{4 \pi L} U_2^2 .$$

Quindi il principio della conservazione dell'energia che qui dice:

$$P_2 = R' + E'$$

dà luogo alla relazione:

$$\frac{1}{\cos\rho}(u_2^2 - v_2^2) = b' U_2^2. \qquad \ldots (9)$$

Risolvendo le due equazioni (8) e (9) rispetto a v_2 e u_2 e ricordando il valore già trovato di u_2 si ottiene:

$$v_2 = \frac{2b'\cos^2\rho(1 - b'\cos^3\rho)}{(1 + b'\cos^3\rho)^2}\operatorname{sen}\theta$$

$$U_2 = \frac{4b'\cos^3\rho}{(1 + b'\cos^3\rho)^2}\operatorname{sen}\theta\ .$$

Infine, essendo sempre assunta come unità l'intensità del primitivo raggio incidente e ricordando che:

$$I_s = \frac{4c}{(1+c)^2}\operatorname{sen}^2\theta\ , \qquad c = b'\cos^3\rho\ ,$$

si ha per le intensità R_s, E_s del raggio straordinario riflesso internamente alla faccia d'uscita e del raggio straordinario emergente:

$$R_s = \frac{R'}{P} = \frac{v_2^2}{b'\cos\rho} = \left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2 I_s = \frac{4c(1-c)^2}{(1+c)^4}\operatorname{sen}^2\theta$$

$$E_s = \frac{E'}{P} = U_2^2 = \frac{4c}{(1+c)^2} I_s = \frac{16c^2}{(1+c)^4}\operatorname{sen}^2\theta\ .$$

Da queste espressioni si scorge che:

1° Un raggio polarizzato normalmente alla sezione principale si indebolisce nello uscire dalla seconda faccia della lamina cristallina di tanto come si è indebolito nello entrare attraversando la prima faccia; cioè, nello attraversare tanto l'una faccia come l'altra, la nuova intensità che assume sta all'intensità che prima aveva, come $\frac{4c}{(1+c)^2}$ sta ad *uno*;

2° Un raggio polarizzato normalmente alla sezione principale nel riflettersi internamente sopra una delle facce della

lamina genera un raggio riflesso, la cui intensità sta a quella del rispettivo raggio incidente come $\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2$ sta ad *uno*.

Se la lamina cristallina è di calcite ed ha le facce parallele a quelle della forma principale romboedrica, nelle espressioni ora trovate:

$$E_0 = \frac{16\,a^2}{(1+a)^4}\cos^2\theta\,, \qquad E_s = \frac{16\,c^2}{(1+c)^4}\operatorname{sen}^2\theta\,,$$

basterà sostituire i dati numerici già indicati. Si ottiene a questo modo l'intensità $0{,}8822\cos^2\theta$ per il raggio ordinario emergente e l'intensità $0{,}9010\operatorname{sen}^2\theta$ per l'emergente raggio straordinario. L'angolo θ_2 che il piano di polarizzazione del primo raggio incidente deve fare colla sezione principale affinchè i due raggi emergenti abbiano la stessa intensità, è:

$$\theta_2 = 44^\circ\,41'\,49''.$$

V.

L'esame delle intensità dei raggi emergenti da una lamina a facce parallele si può compiere in modo più esatto tenendo conto dell'influenza esercitata su di esse dai fenomeni di riflessione interna. Ed invero, ciascuno dei due raggi emergenti non contiene soltanto la quantità di luce ora calcolata; si deve anche tener conto della luce che, dopo di aver attraversata la lamina, viene internamente riflessa alla faccia d'uscita, poi attraversa la lamina una seconda volta, si riflette alla faccia d'entrata, attraversa di nuovo la lamina e finalmente, escendo da questa, si aggiunge al raggio emergente. Si ha così un raggio parziale o secondario che ha subìto due riflessioni interne. Allo stesso modo si aggiungono ancora a ciascun raggio emergente altri raggi parziali che hanno subìte nell'interno della lamina 4, 6, ... riflessioni. Per ciò, ponendo per brevità:

$$m = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2,$$

per avere la quantità totale $\mathcal{E}_0$ di luce che costituisce il raggio

emergente ordinario, bisognerà scrivere:

$$\mathcal{E}_0 = E_0(1+m^2+m^4+\cdots\cdots) = \frac{16\,a^2}{(1+a)^4}\,\frac{\cos^2\theta}{1-m^2} = \frac{2\,a}{1+a^2}\cos^2\theta\,.$$

Ragionando analogamente per il raggio straordinario e ponendo:

$$n = \left(\frac{1-c}{1+c}\right)$$

si ha per tutta la quantità $\mathcal{E}_s$ di luce del raggio emergente straordinario:

$$\mathcal{E}_s = E_s(1+n^2+n^4+\cdots\cdots) = \frac{2\,c}{1+c^2}\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,.$$

Per la calcite stata finora presa ad esempio si ha:

$$\frac{2\,a}{1+a^2} = 0{,}8955\,,$$

$$\frac{2\,c}{1+c^2} = 0{,}9035\,.$$

L'angolo θ_3 del piano di polarizzazione del raggio incidente colla sezione principale del cristallo, quando i due raggi emergenti sono egualmente intensi, è

$$\theta_3 = 44^0\ 42'\ 38''.$$

Qui non è inutile avvertire che il problema ora risolto, ove venisse trattato colla guida della teoria di Neumann, darebbe luogo ai seguenti risultati. L'intensità della luce emergente ordinaria sarebbe ancora:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{2\,a}{1+a^2}\cos^2\theta\,.$$

Ma l'intensità della luce straordinaria avrebbe invece per espressione:

$$\frac{2\,c'}{1+c'^2}\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

essendo:

$$c' = \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,\varepsilon + b^2\cos^2\varepsilon}\,.$$

Questa quantità c' rappresenta la velocità con cui si trasmette l'onda straordinaria quando la propagazione si fa in direzione normale alla superficie formante l'angolo ε coll'asse ottico. Per la calcite si avrebbe:

$$c' = 0{,}6326$$

e quindi:

$$\frac{2c'}{1+c'^2} = 0{,}8976 \ .$$

Per conseguenza la teoria di Neumann darebbe come angolo θ_4 dell'azimut di polarizzazione della luce incidente che corrisponde ad intensità eguali dei due raggi emergenti:

$$\theta_4 = 44^\circ\, 48'\, 19''.$$

Il procedimento seguìto in questo lavoro ha condotto al valore θ_3 che, essendo un po' minore di θ_4, si allontana alquanto più di questo dalla legge di Malus; però questo θ_3 si avvicina più del θ_4 al valore che risulta dalle determinazioni fotometriche di Wild.

Per ultimo si consideri il caso in cui la luce cadente sulla lamina cristallina non è affatto polarizzata. Se la legge di Malus fosse esatta, i due raggi emergenti dovrebbero contenere sempre eguali quantità di luce; ma questo rigorosamente non è. Per studiare razionalmente ciò che qui avviene, si può, come generalmente si usa, sostituire al raggio incidente naturale un sistema di due raggi eguali polarizzati ad angolo retto. Lo stesso raggio incidente si può pur considerare come costituito da infiniti raggi uguali, riuniti fra loro, d'intensità infinitesima e polarizzati in tutti i piani distribuiti uniformemente intorno alla linea che rappresenta la sua direzione.

Conformemente a quest'ultimo concetto, sia sempre *uno* l'intensità del raggio incidente naturale; l'angolo θ per uno qualunque dei raggi elementari che lo costituiscono, d'intensità dx, può essere espresso da $2\pi x$, dovendo x assumere poi tutti i valori compresi fra zero ed uno; si indichino con de_0, de_s le intensità dei due raggi elementari emergenti che derivano dal

raggio elementare incidente dx. Si avrà:

$$de_o = \frac{2a}{1+a^2} dx \cos^2 2\pi x$$

$$de_s = \frac{2c}{1+c^2} dx \operatorname{sen}^2 2\pi x \ .$$

Quindi, essendo e_o, e_s le intensità dei due raggi emergenti, si ottiene:

$$e_o = \frac{2a}{1+a^2} \int_0^1 dx \cos^2 2\pi x = \frac{a}{1+a^2}$$

$$e_s = \frac{2c}{1+c^2} \int_0^1 dx \operatorname{sen}^2 2\pi x = \frac{c}{1+c^2} \ .$$

Applicando questi risultati alla lamina di calcite già più volte scelta ad esempio, si trova che, dei due raggi escenti dalla medesima, l'ordinario ha un'intensità, riferita a quella della luce incidente, espressa dal numero 0,4427, mentre l'intensità del raggio straordinario vale 0,4518, cioè supera quella del primo di circa un cinquantesimo del loro valore. La differenza fra la loro somma e l'intensità del raggio incidente vale 0,1055; questa differenza rappresenta la quantità di luce riflessa alla faccia d'entrata, sommata con tutte quelle che escono dalla stessa faccia dopo di aver subite riflessioni interne.

L'Accademico Segretario
A. Sobrero.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 4 Aprile 1886 . . . . . *Pag.* 357

BRUNO — Relazione sopra un lavoro del Dott. Corrado SEGRE, col titolo: *Le coppie di elementi imaginari nella geometria proiettiva sintetica* . . . . . » 357

ADUNANZA del 18 Aprile 1886 . . . . . » 361

GENOCCHI — Breve commemorazione dell'Ingegnere Savino REALIS » 361

CATTANI — Sull'apparecchio di sostegno della mielina nelle fibre nervose midollari periferiche . . . . . » 365

MOSSO — Sull'azione delle sostanze che per mezzo del sistema nervoso aumentano o diminuiscono la temperatura animale . . . » 381

BASSO — Sulla legge di ripartizione dell'intensità luminosa fra i raggi birifratti da lamine cristalline . . . . . » 398

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXI, DISP. 6ª (*Maggio* 1886)

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

—

Maggio

1886

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE
ECONOMATO
TORINO

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 9 Maggio 1886.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANGELO GENOCCHI

Sono presenti i Soci: GENOCCHI, LESSONA, DORNA, BRUNO, BERRUTI, CURIONI, SIACCI, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI e BASSO, il quale, per incarico del Presidente, tiene le veci del Segretario Accademico SOBRERO, assente per malattia.

Vien letto l'atto verbale dell'adunanza precedente, che è approvato.

Il Presidente presenta in dono all'Accademia, in nome dell'autore, unitamente al fascicolo del mese di luglio 1885, tomo XVIII del *Bollettino di storia e di bibliografia delle Scienze matematiche e fisiche*, anche un opuscolo del Principe B. BONCOMPAGNI, col titolo: *Sur l'histoire des Sciences mathématiques et physiques de M.* Maximilien MARIE.

Il Socio BASSO segnala il dono fatto all'Accademia dal signor Pietro LAZERGE, già Presidente della Società di Scienze fisiche e naturali di Tolosa (Francia), di due suoi lavori, uno dei quali intitolato: *Du rôle de l'eau dans l'univers — Tremblements de terre;* e l'altro: *Un mémoire sur quelques points de météréologie.*

Il Socio Berruti presenta a nome del Socio Bellardi, assente per ragioni di salute, un lavoro di quest'ultimo col titolo: *I Molluschi dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria*, Parte V — *Monografia delle Mitridi.*

La Classe con voto unanime approva l'inserzione di questo lavoro nei volumi delle *Memorie* dell'Accademia.

Il Socio Dorna presenta per la consueta pubblicazione un lavoro del Dott. Angelo Charrier, Assistente all'Osservatorio di Torino, col titolo: *Tavola indicante l'ora delle temperature estreme dell'anno* 1885, *dedotte dalla linea termografica.*

Il Socio D'Ovidio presenta una Memoria del Dott. Gino Loria, col titolo: *Rappresentazione su un piano delle congruenze* $(2,6)_2$ e $(2,7)$.

Infine la Classe, sulla proposta del Presidente, delibera di non tener seduta il 23 del corrente mese, nel quale giorno debbono aver luogo le elezioni politiche generali.

LETTURE

RAPPRESENTAZIONE SU UN PIANO DELLE CONGRUENZE $[2, 6]_2$ E $[2, 7]$

del Dott. Gino Loria

In un lavoro precedente (*) esposi la rappresentazione su i punti di una superficie di 2° ordine delle congruenze di 2ª classe contenute in un complesso tetraedrale. Siccome questa superficie è rappresentabile univocamente su un piano, così da esso potevasi trarre la rappresentazione piana delle congruenze (**) $(6, 2)_1$, $(5, 2)$, $(4, 2)$, $(3, 2)$, $(2, 2)$, e quindi delle correlative $(2, 6)_1$, $(2, 5)$, $(2, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 2)$. Laonde di due sole fra le congruenze scoperte da Kummer (cioè delle congruenze $(2, 6)_2$ e $(2, 7)$) restava da trovarsi la rappresentazione; a complemento dello studio da me precedentemente fatto credo opportuno esporre questa rappresentazione, con qualche particolare, nella presente breve Nota.

Il procedimento di cui mi servo per ottenere la rappresentazione è in sostanza una proiezione centrale su un piano delle congruenze suddette (***); esso può servire anche a rappresentare tutte le congruenze di Kummer tranne la $(2, 6)_1$ (****); gli è perciò

(*) *Intorno alla Geometria su un complesso tetraedrale.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XIX (Seduta del 25 maggio 1884).

(**) Indico in generale con (m, n) una congruenza di ordine m e classe n, in particolare con $(2, 6)_1$ e $(2,6)_2$ le due congruenze di 2° ordine e 6ª classe.

(***) Questo stesso procedimento servì al Prof. Caporali nella rappresentazione su un piano della congruenza quadratica. V. *Sui complessi e sulle congruenze di 2° grado.* Atti della R. Acc. dei Lincei, Serie III, V. 2.

(****) Un fatto degno di nota è che, tenendo conto unicamente della proprietà, di cui gode ognuna delle congruenze di Kummer tranne la $(2,6)_1$, di

che credo che esso coincida con quello a cui alludeva il Professore Bertini nella sua importante Nota: *Sulla congruenza di 2° ordine, 6ª classe e 1ª specie dotata soltanto di superficie focale* (*).

I.

1. La congruenza di 2° ordine, 6ª classe e 2ª specie — che, come già avvertii, indico col simbolo $(2, 6)_2$ — ha un punto singolare C con un cono di raggi di 5° ordine. Questo cono ha sei generatrici doppie r_i $(i = 1, \ldots, 6)$ su ognuna delle quali si trova un punto singolare C_i con un cono di raggi di 3° ordine avente r_i per generatrice doppia. La stessa congruenza possiede ancora un punto singolare F con fascio di raggi e quattro punti singolari D_j $(j = 1, \ldots, 4)$ con coni di raggi di 2° ordine (**).

I punti F, C, D_j stanno sulla conica di contatto del piano φ del fascio di raggi di centro F con la superficie focale della congruenza. Le 4 rette che uniscono C ai punti D_j sono generatrici del cono di 5° ordine di vertice C, perchè, ove non lo fossero, ogni piano per la retta $C D_j$ conterrebbe almeno *sette* rette della congruenza, il che non può accadere se, come supponiamo, questa non degenera.

2. Un piano qualunque ρ' condotto per C contiene sei raggi della congruenza; cinque di essi si trovano sul cono di raggi di vertice C, il sesto non vi appartiene; dunque *a ogni piano per* C *corrisponde una retta della congruenza non passante per* C. Viceversa *qualunque retta* r *della congruenza determina con* C *un piano* ρ' il quale non contiene evidentemente altra retta della congruenza non uscente da C. Dunque *fra le rette* r *della congruenza e i piani* ρ' *della stella di centro* C *esiste corrispondenza univoca.* Secando la stella con un piano qualunque non contenente C si otterrà un sistema rigato i cui elementi r'

---

possedere un cono di raggi di ordine inferiore di un'unità alla sua classe e applicando il procedimento tenuto nel testo, si perviene a una loro rappresentazione univoca su un piano, dalla quale si possono dedurre le principali proposizioni relative ad esse.

(*) R. Accademia dei Lincei. Transunti. Novembre 1879.

(**) Kummer. *Ueber die algebraischen Strahlensysteme u. s. w.* Mathematische Abhandlungen d. k. Ak. d. Wiss. zu Berlin, 1866, § 12. Teorema XLVII.

corrispondono univocamente ai piani ρ' e però alle rette r della congruenza.

Nella rappresentazione su un piano della congruenza $(2, 6)_2$ che resta così stabilita, è eccezionale la traccia f' del piano φ, giacchè essa è imagine di ogni raggio del fascio singolare.

3. Consideriamo una retta l dello spazio; le rette della congruenza incontranti l formano una rigata Λ_x il cui grado x è eguale all'ordine di molteplicità di l per questa, aumentato del numero delle rette della congruenza situate in un piano passante per l. Ora, il primo numero è 2 perchè da ogni punto di l escono due rette della congruenza (di 2° ordine), il secondo è 6 per la definizione di congruenza di 6ª classe; dunque il grado x di Λ_x è 8 (*).

Ma quando l passa per C, dalla rigata Λ_8 si separa il cono di 5° ordine avente il vertice in C e rimane una rigata di 3° grado Ω_3 avente l per direttrice doppia e le cui generatrici corrispondono univocamente ai raggi del fascio posto nel piano rappresentativo e avente per centro la traccia O' di l.

Due fasci O', $\overline{O}'$ del piano di rappresentazione hanno comune una retta che è l'imagine della retta della congruenza posta nel piano $C\,O'\,\overline{O}'$ ma non uscente da C.

4. La rigata Λ_8, costituita dalle rette della congruenza appoggiate a una retta data l, ha 5 generatrici passanti per C, tre passanti per ciascuno dei punti C_i, due passanti per ciascuno dei punti D_j e finalmente una passante per F. Essa sarà rappresentata da una curva l'_x di cui vogliamo determinare la classe x. Siccome questa è eguale al numero delle tangenti di l'_x che escono da un punto qualunque O' del piano di rappresentazione, così essa è anche eguale al numero dei piani passanti per una retta uscente da C e contenenti ciascuno una generatrice di Λ_8 non uscente da C; ora essendo la rigata di 8° grado e avendo essa 5 generatrici uscenti da C tale numero è 3. Dunque l'*imagine della rigata* Λ_8 *è una curva* l'_3 *di* 3ª *classe. Questa curva tocca* f', perchè Λ_8 ha una generatrice nel piano φ.

5. Quando la retta l considerata nel n. precedente appartiene al cono singolare di vertice C, la corrispondente rigata Ω_3 ha due

---

(*) Questo stesso ragionamento serve a dimostrare che le rette di una congruenza (m, n) appoggiate a una retta fissa formano una rigata di grado $m+n$, avente quella retta per direttrice $m-$pla; se la retta è $(m-1)-$pla per la congruenza, tale rigata è razionale.

direttrici infinitamente vicine; il piano tangente alla superficie lungo l, è un piano focale di l perchè contiene una generatrice della superficie infinitamente vicina ad l ma non passante per C; questo piano seca il piano rappresentativo in una retta che è imagine della retta infinitamente vicina ad l e quindi di l stessa. Vediamo quindi che nel piano rappresentativo e da ogni punto P della traccia del cono singolare di 5° ordine, esce una retta determinata la quale è imagine della generatrice del cono stesso passante per P. Facendo prendere a P tutte le posizioni di cui è capace si ottengono infinite rette del piano rappresentativo: quale ne è l'inviluppo? Questo è la traccia sul suddetto piano del cono inviluppato da' piani tangenti alle rigate cubiche corrispondenti alle varie generatrici del cono singolare di 5° ordine lungo le generatrici stesse; ognuno di questi piani è quindi uno de' piani tangenti in C alla superficie focale della congruenza, onde il loro inviluppo non differisce dal cono osculatore in C a questa superficie. Concludiamo pertanto:

I punti della traccia sul piano rappresentativo del cono di raggi di 5° ordine, corrispondono univocamente alle tangenti di una conica Q, *la quale è inviluppo delle imagini delle tracce di quel cono e traccia del cono osculatore alla superficie focale nel centro di quel cono; essa tocca la retta* f'.

6. Le curve di 3ª classe analoghe a l'_3 (n. 5) debbono formare — come le rette dello spazio a cui in un certo senso corrispondono — un sistema quadratico quadruplicamente infinito. Per vedere che ciò accade realmente basta dimostrare che vi sono due e solo due di esse tangenti a quattro rette a', b', c', d' del piano rappresentativo. Ora se a, b, c, d sono le rette della congruenza di cui a', b', c', d' sono le imagini, e se l, $\bar{l}$ sono le due rette che le secano, chiamiamo Λ_8 e $\bar{\Lambda}_8$ le rigate corrispondenti a l', $\bar{l}'$ rispettivamente. Queste sono rappresentate da due curve l'_3, $\bar{l}'_3$ appartenenti al sistema e tangenti ad a', b', c', d'. Che poi l'_3 e $\bar{l}'_3$ siano le uniche curve del sistema soddisfacenti a questa condizione, risulta dal modo stesso con cui esse vennero determinate; infatti se vi fosse una terza curva analoga ad l'_3, $\bar{l}'_3$, essa corrisponderebbe a una rigata costituita da rette della congruenza appoggiate a una retta incontrante a, b, c, d, e diversa da l, $\bar{l}$; ma l'esistenza di una tale retta è impossibile se a', b', c', d' vennero scelte in modo affatto arbitrario, dunque ecc.

Le quattro condizioni comuni — oltre al toccare f' — a cui sono sottoposte tutte le curve del sistema ora considerato, *non possono essere di dover esse toccare altre rette fisse.* Infatti due rette qualunque dello spazio l, $\bar{l}$ sono incontrate da otto rette della congruenza (perchè una di esse incontra in otto punti la rigata corrispondente all'altra); onde le curve del sistema devono avere a due a due otto tangenti mobili comuni e però non ne possono avere più di una, f', fissa.

Le predette condizioni non sembrano suscettibili di un enunciato semplice, ma un'idea della specie del predetto sistema può dedursi dall'osservazione che *di esso fanno parte le* ∞^2 *curve* (*di* 3ª *classe*) *formate ciascuna dalla conica fissa* Q *e da un fascio di raggi del piano di rappresentazione;* ciò è conseguenza di quanto già osservammo (n. 4) che la rigata Λ_8 corrispondente a una retta dello spazio si scinde nel cono di raggi di centro C (avente per imagine Q) e in una rigata cubica (rappresentata da un fascio di raggi).

Osserviamo finalmente che il sistema lineare a cinque dimensioni, il quale, in grazia di un teorema noto, deve contenere il sistema quadratico di curve di cui trattiamo, è costituito dalle curve imagini delle rigate della congruenza contenute negli ∞^5 complessi lineari dello spazio (cf. n. 11).

7. Da ogni punto M dello spazio escono due rette p, q della congruenza, le quali sono rappresentate da due rette p', q' uscenti dalla traccia O' della retta $CM \equiv o$. Facendo variare il punto M sulla retta o, le rette p', q' formeranno un'involuzione di raggi; infatti ogni retta p' uscente da O' è imagine di una retta p della congruenza incontrante o in un punto M, da questo esce una seconda retta q della congruenza, la quale è proiettata nella retta q' uscente da O'; viceversa partendo da q' si trova p'; quindi — poichè la corrispondenza fra p' e q' è evidentemente algebrica — possiamo concludere:

Ogni punto O′ *del piano rappresentativo è centro di un'involuzione di raggi le cui singole coppie corrispondono univocamente ai punti del raggio proiettante* O′ *da* C.

In generale le curve di 3ª classe del sistema quadratico quadruplicamente infinito dianzi considerato tangenti a due rette fisse r'_1 r'_2 del piano di rappresentazione formano un sistema quadratico doppiamente infinito; ma se queste due rette fisse sono coniugate nell'involuzione che spetta al loro punto comune

(se cioè le rette r_1 r_2 s'incontrano) le curve che le toccano formano due distinti sistemi lineari doppiamente infiniti. Uno di questi comprende le curve corrispondenti alle rette (*) che escono dal punto P d'intersezione delle rette r_1 r_2; tutte le curve che fanno parte di esso hanno solo 3 tangenti comuni, cioè f' e r_1' r_2'. L'altro comprende le curve corrispondenti alle rette che si trovano nel piano π delle due rette r_1 r_2; tutte le curve che fanno parte di esso hanno 7 tangenti comuni, cioè f' e le imagini delle rette della congruenza che stanno in π.

La conica Q ha una parte importante anche nello studio di queste involuzioni; per riconoscerlo basta osservare che *le due tangenti condotte ad essa da un punto qualunque* P' *del piano rappresentativo si corrispondono nell' involuzione che spetta al punto* P' perchè le rette di cui esse sono imagini s'incontrano.

I raggi doppi dell'involuzione formata dalle rette uscenti da P' sono le proiezioni delle due rette della congruenza uscenti dai 2 punti d'intersezione (diversi da C) di CP' con la superficie focale; quindi *quelle due rette della congruenza sono coniugate rispetto al cono osculatore della superficie avente il suo centro in* C (**).

8. L'intimo legame delle involuzioni suddette col sistema già considerato di curve di 3ª classe, spicca assai chiaramente da quanto segue.

Consideriamo una retta r' del piano di rappresentazione. A ogni suo punto spetta una determinata involuzione, in ciascuna di queste r' ha per coniugata una retta determinata; *l'inviluppo delle* ∞^1 *rette corrispondenti a* r' *in quelle* ∞^1 *involuzioni è la curva di* 3ª *classe che è imagine della rigata costituita dalle*

(*) La curva corrispondente a una retta l è l'inviluppo delle imagini delle rette della congruenza appoggiate a l.

(**) Il Dott. Corrado Segre, mio amico carissimo, fecemi osservare come dalle proprietà esposte (qui e al n. 15) segua facilmente che ogni congruenza $[6, 2]_2$ duale a quella che stiamo studiando si può sempre, con una conveniente trasformazione proiettiva, ridurre ad avere la proprietà seguente: sui varii piani aventi una stessa giacitura arbitraria le coppie di rette della congruenza hanno direzioni simmetriche rispetto a due direzioni determinate, che sono quelle delle due rette della congruenza poste nei due piani (al finito) aventi quella stessa giacitura e tangenti alla superficie focale, sicchè le direzioni di queste due rette sono fra di loro ortogonali.

rette della congruenza che incontrano la retta r *della congruenza che è rappresentata da* r'; siccome r è incontrata da due rette della congruenza infinitamente vicine ad essa, così r' *è tangente doppia di quella curva di* 3ª *classe*. Ogni retta del piano di rappresentazione è dunque retta doppia di due fra le involuzioni che corrispondono a' suoi punti.

Due curve $l'_3\ \bar{l}'_3$ del sistema più volte considerato hanno comuni, come già notammo, otto tangenti mobili $r'_1 \ldots r'_8$, le quali rappresentano le rette $r_1 \ldots r_8$ appartenenti alla congruenza e appoggiate alle due rette l, $\bar{l}$ corrispondenti rispettivamente a l'_3, $\bar{l}'_3$. Se due (r'_m, r'_n) di quelle tangenti si corrispondono nell'involuzione che spetta al loro punto comune, le corrispondenti rette r_m, r_n avranno un punto comune M e un piano comune μ. Allora o anche l, $\bar{l}$ s'incontreranno, oppure l passerà per M e $\bar{l}$ starà in μ.

Nel primo caso le otto rette r si distribuiranno in due gruppi, l'uno di *due*, l'altro di *sei* rette, il primo dei quali comprende le rette uscenti da M, il secondo le rette poste in μ. Corrispondentemente le rette r' si distribuiranno in due gruppi, l'uno di *due*, l'altro di *sei* rette; le due rette del primo si corrispondono nell'involuzione che spetta al loro punto comune e della stessa proprietà godono due qualunque rette del secondo gruppo; due rette qualunque appartenenti a gruppi diversi non si corrispondono nell'involuzione corrispondente al loro punto d'intersezione.

Nell'altro caso le sole rette $r'_m\ r'_n$ si corrisponderanno nell'involuzione corrispondente alla loro intersezione.

9. Un piano qualunque dello spazio si può considerare come determinato dalle imagini delle sei rette della congruenza giacenti in esso.

Due qualunque sestuple di rette di tale specie sono dodici tangenti d'una curva di 3ª classe del sistema già studiato, cioè di quella che corrisponde all'intersezione dei due piani rappresentati da quelle due sestuple.

Tre sestuple rappresentano tre piani di un fascio solo quando i loro elementi toccano una stessa curva di 3ª classe.

Date tre sestuple quali si vogliano, esiste nel piano di rappresentazione una sola coppia di rette che si corrispondano nella involuzione che spetta al loro punto comune e che tocchino le tre curve di 3ª classe determinate dalle date sestuple prese a due a due; essa rappresenta l'intersezione dei tre piani di cui queste sestuple sono imagini.

10. Consideriamo nella congruenza una rigata qualunque di grado g di cui α_C generatrici passino per C e α_F per F e chiamiamo c'_x la curva di classe x che la rappresenta. Preso un punto qualunque O' del piano rappresentativo, la retta $C\,O'$ sarà incontrata da $g-\alpha_C$ rette della rigata non uscenti da C; ne viene che per O passeranno $g-\alpha_C$ tangenti di c'_x, dunque $x=g-\alpha_C$. Le α_F generatrici della rigata uscenti da F sono tutte proiettate in f', onde questa è tangente α_F-pla di $C_{g-\alpha_C}$. Concludiamo pertanto:

L'imagine di una rigata di grado g *di cui* α_C *generatrici passano per* C *e* α_F *per* F *è una curva di classe* g $-\alpha_C$ *avente* f' *per tangente* α_F-*pla*.

P. e: *la rigata costituita dalle rette della congruenza che appartengono a un complesso di grado* n *ha per imagine una curva di classe* 3n *di cui* f' *è tangente* n — *pla*, perchè essa rigata è di grado $8n$ ed ha $5n$ generatrici uscenti da C e n uscenti da F.

11. Viceversa, una curva c'_k di classe k avente f' per tangente r pla è imagine di una rigata Γ_x di grado x; alle rette della rigata che incontrano una retta qualunque l dello spazio corrispondono le tangenti comuni a c'_k e alla curva l'_3 corrispondente ad l che non cadono in f'. Queste sono evidentemente $3k-r$, dunque $x=3k-r$. — Inoltre, siccome per ogni punto del piano di rappresentazione passano soltanto k tangenti della curva c'_k, così la rigata Γ_{3k-r} è incontrata da ogni retta uscente da C in soli k punti diversi da C e però $2k-r$ sue generatrici passano per C.

Possiamo dunque dire:

A una curva di classe k *del piano di proiezione avente* f' *per tangente* r — *pla corrisponde una rigata di grado* 3 k — r *di cui* 2 k — r *generatrici passano per* C *e* r *per* F.

12. Da questo teorema discende che *nella congruenza* $(2, 6)_2$ *non si trova altro fascio di raggi oltre quello di centro* F. Per trovare le rigate della congruenza indicheremo con g il grado di una di queste e cercheremo le soluzioni intere non negative dell'equazione indeterminata:

$$g=3k-r.$$

Distingueremo perciò i tre casi seguenti:

$$g=3y-1\ ,\quad g=3y\ ,\quad g=3y+1\ ;$$

tale distinzione è utile perchè, tenendo conto della condizione che per una curva propria l'ordine di molteplicità, r, di una tangente dev'esser minore della classe, k, della curva (tranne nel caso in cui la curva riducasi a un punto), si trova che le soluzioni generali di quella equazione indeterminata sono ordinatamente:

$g = 3y - 1$, $r = 3m + 1$, $k = y + m$ essendo m un intero soggetto alla limitazione $0 \leq m \leq \frac{1}{2}(y - 1)$.

$g = 3y$, $r = 3m$, $k = y + m$ essendo m un intero soggetto alla limitazione $0 \leq m \leq \frac{1}{2}y$.

$g = 3y + 1$, $r = 3m - 1$, $k = y + m$ essendo m un intero soggetto alla limitazione $0 \leq m \leq \frac{1}{2}(y + 1)$.

Supponendo ad esempio $y = 1$ si ottengono i risultati seguenti:

a) . . . . . $g = 2$, $m = 0$, $r = 1$, $k = 1$, $\alpha_C = 1$.

Nella congruenza $[2, 6]_2$ *si trovano* ∞^1 *rigate quàdriche; una qualunque di esse è rappresentata da un fascio di raggi avente il centro in un punto di* f'.

È facile rendersi ragione di questo teorema; infatti, una retta qualunque uscente da C è incontrata da ∞^1 rette della congruenza costituenti una rigata di 3° grado (n. 4), ma se quella retta sta nel piano φ questa rigata si scinde nel fascio di centro F e in una quadrica che è appunto rappresentata dal fascio che ha per centro la traccia di quella retta sul piano rappresentativo.

b) . . . . . $g = 3$, $m = 0$, $r = 0$, $k = 1$, $\alpha_C = 2$.

Nella congruenza $(2, 6)_2$ *non esistono altre rigate di* 3° *grado che quelle formate dalle rette della congruenza appoggiate a rette uscenti da* C.

c) . . . . . $g = 4$.

Nella congruenza $(2, 6)_2$ *non esistono rigate di* 4° *grado, eccetto quelle degenerate in coppie di quadriche.*

Supponendo invece $y=2$ si traggono le seguenti conclusioni:

α) ..... $g=5$, $m=0$, $r=1$, $k=2$, $\alpha_C=3$.

Nella congruenza $(2, 6)_2$ *esistono* ∞^4 *rigate (razionali) di* 5° *grado; esse sono rappresentate dalle coniche tangenti ad* f'.

β) ..... $g=6$, $m=0$, $r=0$, $k=2$, $\alpha_C=4$.

Nella congruenza $(2, 6)_2$ *esistono* ∞^5 *rigate (razionali) di* 6° *grado; esse corrispondono univocamente alle coniche del piano di rappresentazione.*

γ) ..... $g=7$, $m=1$, $r=2$, $k=3$, $\alpha_C=4$.

Nella congruenza $(2, 6)_2$ *esistono* ∞^6 *rigate (razionali) di* 7° *grado; esse sono rappresentate dalle curve di* 3ª *classe aventi* f' *per tangente doppia.*

Ecc., ecc.

II.

13. La congruenza di 2° ordine e 7ª classe ha un punto singolare C da cui esce un cono di raggi di 6° ordine avente dieci generatrici doppie r_i $(i=1, 2. . ., 10)$; su ognuna di queste si trova il centro C_i di un cono di raggi di 3° ordine avente per generatrice doppia la retta r_i su cui esso si trova (*).

Essa può rappresentarsi in modo analogo a quello tenuto per la congruenza $(2, 6)_2$. Si può, cioè, far corrispondere a una retta qualunque r della congruenza non uscente da C la sua proiezione r' da C su un piano fisso arbitrario non passante per C; e tale corrispondenza è univoca perchè ogni piano per C contiene una e una sola retta della congruenza non passante per C.

14. *Tutte le rette della congruenza appoggiate a una retta arbitraria* l *dello spazio formano una rigata di cui* l *è direttrice doppia;* ogni piano per l contiene altre sette rette della rigata, dunque *questa è di* 9° *grado* e s'indicherà quindi con Λ_9.

(*) Kummer, l. c., § 13, Teorema XLVIII.

Se però la retta l passa per C, questa rigata si scinde nel cono singolare di vertice C e in una rigata di 3° grado Ω_3 avente quella retta per direttrice doppia. La rigata Ω_3 è rappresentata dal fascio di raggi del piano rappresentativo il cui centro coincide con la traccia della direttrice doppia di essa.

15. Con ragionamenti analoghi a quelli fatti nei n. 4, 5, 6, 7 si dimostrano i seguenti teoremi:

La rigata Λ_9 *formata dalle rette della congruenza appoggiate a una retta qualunque* 1, *ha sei generatrici passanti per* C *e tre passanti per ognuno de' punti* C_3. *Essa è rappresentata da una curva* 1_3 *di* 3ª *classe. Le curve* $1'_3$ *formano un sistema quadratico quadruplicamente infinito* (tale cioè che vi sono due curve del sistema tangenti a quattro rette fissate ad arbitrio nel piano di proiezione); *le cinque condizioni comuni a cui tutte soddisfano non possono consistere nell'avere tangenti comuni*, perchè due qualunque di esse devono avere nove tangenti mobili comuni essendo due rette dello spazio incontrate da nove rette variabili della congruenza.

Le proprietà esposte nel n. 8 e in principio del n. 9 valgono anche per la rappresentazione della congruenza (2, 7); il sistema d'involuzioni di raggi che si ha in questo caso ha pure una connessione strettissima col predetto sistema di curve di 3ª classe: le proposizioni corrispondenti si ottengono come le analoghe per la congruenza (n. 9 e 10), onde ci dispensiamo dall'esporle.

16. Finalmente, ripetendo con lievissime modificazioni i ragionamenti fatti nei n. 10, 11 si conclude:

L'imagine di una rigata di grado g *di cui* α_C *generatrici passano per* C *è una curva della classe* $g-\alpha_C$.

Una curva di classe k *del piano di proiezione rappresenta una rigata di grado* 3k *di cui* 2k *generatrici passano per* C.

Quest'ultimo teorema ci mostra che *la congruenza* (2, 7) *non contiene alcuna rigata quàdrica*; essa è l'unica fra le congruenze di Kummer che goda tale proprietà.

Le altre rigate che essa contiene sono tutte di gradi multipli di 3 e però si assegnano immediatamente.

17. La congruenza (2, 7) può considerarsi come la più generale fra quelle di 2° ordine, perchè, come osservò Kummer (*),

(1) L. c., § 14.

tutte le altre congruenze di 2° ordine, esclusa solo la $(2, 6)_1$, possono riguardarsi come casi particolari di essa. Ne viene che i risultati ottenuti per essa sussistono per tutte le congruenze di Kummer, tranne la $(2, 6)_1$; in particolare le proposizioni accennate nel n. 7, nonchè quella contenuta nella relativa nota, valgono per tutte queste, e la rappresentazione testè indicata conduce a delle rappresentazioni piane delle congruenze (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) differenti da quelle di cui feci cenno nelle prime linee dell'introduzione al presente scritto e delle quali è facile trovare le proprietà essenziali.

Torino, 5 maggio 1886.

Il Direttore della Classe
ALFONSO COSSA.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Giugno

1886

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE
ECONOMATO
TORINO

[illegible]

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 20 Giugno 1886

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANGELO GENOCCHI

Sono presenti i Soci: Genocchi, Cossa, Lessona, Dorna, Salvadori, D'Ovidio, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia e Basso, il quale, per incarico del Presidente, tiene le veci del Segretario Sobrero, assente per ragioni di salute.

Letto ed approvato l'atto verbale della seduta precedente, il Direttore della Classe, Socio Cossa, rivolge, a nome di tutti i Colleghi, parole di felicitazione al Presidente per la nomina recentemente conferitagli a Senatore del Regno.

Il Socio Basso, ricordando che il 31 agosto prossimo avrà luogo il centesimo anniversario della nascita del Socio Straniero Michele Chevreul, propone che venga inviato, in quella occasione, al venerando collega un indirizzo di felicitazione e di augurii. La Classe approva la proposta, ed il Presidente incarica il Socio Cossa della redazione dell'indirizzo.

Dal Socio Lessona viene, a nome dell'autore, presentato in dono all'Accademia un pregevole volume del signor Arnaldo Locard, intitolato: *Catalogue général des mollusques vivants de France.*

Il signor Dott. CORRADI invia pure in omaggio all'Accademia, per mezzo del Socio BIZZOZERO, una sua monografia: *Su i documenti storici spettanti alla Medicina, Chirurgia e Farmaceutica conservati nell'Archivio di Stato in Modena; ed in particolare su la malattia di Lucrezia Borgia, e la Farmacia nel secolo* XV.

Lo stesso Socio BIZZOZERO legge e propone poi s'inserisca negli *Atti* una Nota del signor Dott. Eugenio DI MATTEI, intitolata: *Contributo allo studio della patologia del rene.*

Sono in seguitto accolti per la pubblicazione negli *Atti* i seguenti lavori:

Presentati dal Presidente,

1° *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine*, del Dott. Giuseppe PEANO;

2° *Sull'esagramma di Pascal* (Nota storica), dell'Ing. Ottavio ZANOTTI BIANCO.

Presentati dal Socio DORNA,

1° *Nozioni intorno all'equatoriale con refrattore Merz di trenta centimetri di apertura e metri quattro e mezzo di distanza focale*, dello stesso Socio DORNA;

2° *Effemeridi del Sole, della Luna e de' principali pianeti calcolate per Torino in tempo medio civile di Roma per l'anno* 1887, del Prof. Angelo CHARRIER;

3° *Osservazioni delle comete Fabry, Barnard e Brooks* (1ª 1886) *fatte all'equatoriale di Merz dell'Osservatorio di Torino*, del Dott. Francesco PORRO.

Presentati dal Socio NACCARI,

1° *Sulle forze elettromotrici di contatto fra liquidi*, del Prof. S. PAGLIANI;

2° *Intorno all'influenza della magnetizzazione sopra la conducibilità termica del ferro*, del Dott. Angelo BATTELLI;

3° *Sul fenomeno Peltier nei liquidi* (Nota 3ª), del Socio A. NACCARI e del Dott. A. BATTELLI.

Presentati dal Socio COSSA,

1° *Azione degli acidi bibasici organici e delle loro anidridi sui senföle e sulla tiosinnamina*, del Dott. F. MOINE;

2° *Sulla Natrolite di Montecatini (Val di Cecina)*, dell'Ing. Ettore MATTIROLO;

3° *Sull'invertimento spontaneo del saccaroso e sull'analisi dei prodotti industriali preparati con zucchero di canna e di fecola*, del Prof. Ermenegildo ROTONDI;

4° *Sulle monocloropropilbenzine e sul metilbenzilcarbinol*, del Dott. Giorgio ERRERA.

Presentati dal Socio D'OVIDIO,

1° *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine*, del Dott. Corrado SEGRE;

2° *Sulla rappresentazione delle funzioni di una variabile complessa per mezzo di espressioni analitiche infinite*, del Dott. G. MORERA;

3° *Di una analogia fra la teorica delle velocità e la teorica delle forze*, del Dott. Enrico NOVARESE.

Presentati dal Socio SPEZIA,

1° *Sull'influenza della pressione sulla formazione dell'anidride*, dello stesso Socio SPEZIA;

2° *Sopra una pseudomorfosi*, del Dottore Giuseppe PIOLTI.

Presentato dal Socio Basso a nome del Socio Bellardi,

Intorno ad alcune impronte organiche di terreni terziari del Piemonte, del Dott. Federico Sacco.

Infine il Socio Naccari legge un lavoro del Socio Corrispondente Prof. Antonio Roiti, intitolato: *Misure assolute di alcuni condensatori*. La Classe delibera con voto unanime la pubblicazione di questo lavoro nei volumi delle *Memorie accademiche*.

LETTURE

SULL' INTEGRABILITÀ

DELLE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI PRIMO ORDINE

del Dott. Giuseppe Peano

Le dimostrazioni finora date dell' esistenza degli integrali delle equazioni differenziali lasciano a desiderare sotto l'aspetto della semplicità. Lo scopo di questa Nota è di dimostrare elementarmente l'esistenza degli integrali dell' equazione $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$, supposta solamente la continuità della funzione $f(x, y)$.

TEOREMA.

Se $f(x, y)$ è funzione continua di x ed y per tutti i valori delle variabili che considereremo, e se a e b sono due valori arbitrarii di x ed y, allora si può determinare il valore $A>a$ in guisa che:

1° Si possano formare infinite funzioni y_1 di x, determinate in tutto l'intervallo (a, A), che per $x=a$ assumono il valore b, e che soddisfano alla disuguaglianza

$$\frac{dy_1}{dx}>f(x, y_1) .$$

2° Si possano formare infinite funzioni y_2 di x, che per $x=a$ assumono il valore b e che soddisfano alla diseguaglianza

$$\frac{dy_2}{dx}<f(x, y_2) .$$

3° Le funzioni y_1 hanno un limite inferiore Y_1, che è una funzione di x, definita nell'intervallo (a, A), che per $x = a$ assume il valore b e che soddisfa all'equazione

$$\frac{dY_1}{dx} = f(x, Y_1) .$$

4° Il limite superiore delle funzioni y_2 è una funzione Y_2 di x, definita nell'intervallo (a, A), che per $x = a$ assume il valore b e che soddisfa all'equazione

$$\frac{dY_2}{dx} = f(x, Y_2) .$$

5° Ogni funzione y di x, che per $x = a$ assume il valore b, e che soddisfa all'equazione

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) ,$$

è, nell'intervallo (a, A), compresa fra Y_1 ed Y_2

$$Y_1 \geqq y \geqq Y_2 .$$

6° Se $f(x, y)$ ha la derivata parziale rispetto y minore d'una quantità assegnabile per tutti i valori considerati delle variabili, tutte le funzioni y di x, che per $x = a$ assumono il valore b e che soddisfano all'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ sono identiche fra loro.

Dimostrazione.

Sia p' una quantità $> f(a, b)$ e si consideri la funzione lineare

$$y' = b + p'(x - a) ;$$

questa, per $x = a$, assume il valore b, e la differenza

$$\frac{dy'}{dx} - f(x, y')$$

è una funzione continua di x, che per $x=a$ assume il valore $p'-f(a,b)>0$; quindi si potrà determinare un valore $a'>a$, in modo che per ogni valore di x nell'intervallo (a,a') si abbia ancora $\frac{dy'}{dx}-f(x,y')>0$, ossia

$$\frac{dy'}{dx}>f(x,y').$$

Sia b' il valore di y' per $x=a'$ (cioè $b'=b+p'(x-a)$); sia p'' una quantità $>f(a',b')$, e si consideri la funzione

$$y''=b'+p''(x-a'),$$

la quale per $x=a'$ assume il valore b'; la differenza $\frac{dy''}{dx}-f(x,y'')$ è funzione continua di x, che per $x=a'$ assume il valore $p''-f(a',b')>0$; quindi essa sarà ancora positiva per tutti i valori di x compresi fra a' e un certo valore $a''>a'$; ossia nell'intervallo (a',a'') si ha

$$\frac{dy''}{dx}>f(x,y'').$$

Sia b'' il valore di y'' per $x=a''$; detta p''' una quantità $>f(a'',b'')$, la funzione

$$y'''=b''+p'''(x-a'')$$

assume per $x=a''$ il valore b'', e in un intervallo (a'',a''') soddisferà all'equazione

$$\frac{dy'''}{dx}>f(x,y''').$$

Così si continui, e si ripeta quest'operazione n volte. Si avrà una serie di intervalli successivi

$$a,a'\,;\quad a',a''\,;\quad a'',a'''\,;\ \ldots\ a^{(n-1)},a^{(n)}\,;$$

ed altrettante funzioni

$$y',\quad y'',\quad y'''\ \ldots\ y^{(n)}$$

tali che il valore della prima per $x=a$ è b, ed il valore di ciascuna al termine del proprio intervallo è eguale al valore

della successiva all'origine dell'intervallo successivo; ciascheduna di queste funzioni soddisfa, nel proprio intervallo, alla diseguaglianza

$$\frac{dy}{dx} > f(x, y) .$$

Sia y_1, la funzione di x (formata da una successione di funzioni lineari), che nei successivi intervalli considerati coincide rispettivamente colle funzioni $y' \, y'' \ldots y^{(n)}$. Posto $a^{(n)} = A_1$, si conchiude che y_1 è una funzione continua di x, definita nell'intervallo (a, A_1), che per $x = a$ assume il valore b, e che soddisfa alla diseguaglianza

$$\frac{dy_1}{dx} > f(x, y_1) .$$

Con ragionamento analogo, scambiando i segni $>$ in $<$, si dimostra che si può formare una funzione y_2, definita in un intervallo (a, A_2) che per $x = a$ assume il valore b e che soddisfa alla diseguaglianza

$$\frac{dy_2}{dx} < f(x, y_2) .$$

Quindi, detto A il più piccolo dei valori A_1 e A_2, nell'intervallo (a, A) si sono formate le funzioni y_1 e y_2 che soddisfano a tutte le condizioni della 1ª e 2ª parte del teorema, e siccome si possono scegliere in infiniti modi le quantità $p', p'', \ldots a', a'', \ldots$ e le loro analoghe per y_2, si conchiude che le funzioni y_1 e y_2 sono in numero infinito.

Prima di passare alle altre parti del teorema, converrà premettere queste proposizioni:

I. Se due funzioni y_1 e y_2 soddisfano rispettivamente alle diseguaglianze

$$\frac{dy_1}{dx} > f(x, y_1) , \qquad \frac{dy_2}{dx} \leqq f(x, y_2) ,$$

ovvero alle

$$\frac{dy_1}{dx} \geqq f(x, y_1) , \qquad \frac{dy_2}{dx} < f(x, y_2) ,$$

e se per un valore speciale x_0 di x esse sono eguali, la differenza $y_1 - y_2$, col passare di x da valori minori a valori maggiori di x_0, passa dal campo negativo al positivo.

Infatti, per questo valore di x si ha evidentemente

$$\frac{dy_1}{dx} > \frac{dy_2}{dx}, \quad \text{ossia} \quad \frac{d(y_1 - y_2)}{dx} > 0;$$

perciò la differenza $y_1 - y_2$ è crescente per $x = x_0$, e siccome si annulla per $x = x_0$, essa passerà dal campo negativo al positivo.

II. Se due funzioni y_1 e y_2 soddisfano alle condizioni precedenti, e se per $x = x_0$ si ha $y_1 \geqq y_2$, per ogni valore di $x > x_0$ sarà $y_1 > y_2$.

Infatti, lo si neghi; allora la differenza $y_1 - y_2$ sarà per qualche valore di $x > x_0$ nulla o negativa. Suppongasi che essa sia nulla, e sia x_1 il più piccolo valore di x per cui essa si annulla. Allora la differenza $y_1 - y_2$ che non si annulla più nell'intervallo (x_0, x_1) conserverà il segno costante positivo, perchè essa è positiva per $x = x_0$, se $y_1 > y_2$, ovvero, se è nulla per $x = x_0$, allora essa diventa positiva per $x > x_0$, per la proposizione precedente. Ora questo è assurdo, perchè se per $x = x_1$ le funzioni y_1 e y_2 sono eguali, per $x < x_1$, la differenza $y_1 - y_2$ deve essere negativa, in virtù della proposizione precedente. Dunque la differenza $y_1 - y_2$ non potrà annullarsi per alcun valore di $x > x_0$, e quindi nemmeno cambiare segno e diventare negativa.

Ciò premesso, le funzioni y_1 e y_2, che soddisfano alle condizioni 1ª e 2ª del teorema, cioè che per $x = a$ assumono lo stesso valore b, e che soddisfano alle diseguaglianze

$$\frac{dy_1}{dx} > f(x, y_1), \qquad \frac{dy_2}{dx} < f(x, y_2),$$

saranno tali che per ogni valore di x nell'intervallo (a, A)

$$y_1 > y_2 .$$

Quindi, attribuito ad x un valore qualunque nell'intervallo considerato, gli infiniti valori che può assumere y_1 sono tutti maggiori degli infiniti valori che assume y_2; perciò esiste un limite inferiore Y_1 dei valori di y_1, e un limite superiore Y_2 dei valori di y_2; e sarà

$$Y_1 \geqq Y_2 .$$

Saranno Y_1 e Y_2 due funzioni di x definite nell'intervallo (a, A), che per $x = a$ assumono il valore b, comune a tutte le y_1 e y_2; dico che ciascheduna di esse soddisfa all'equazione differenziale proposta.

Invero, pongasi $Y_1 = F(x)$. Diasi ad x un valore particolare x_0, e facciasi per brevità $f[x_0, F(x_0)] = m$. Sia ε una quantità positiva piccola ad arbitrio; si consideri la funzione

$$\varphi(x) = F(x_0) + (x - x_0)(m - \varepsilon) .$$

Questa per $x = x_0$ assume il valore $F(x_0)$, e, per lo stesso valore della variabile, soddisfa alla diseguaglianza $\frac{dy}{dx} < f(x, y)$; quindi essa soddisferà pure a questa diseguaglianza per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed un certo valore $x_1 > x_0$. Ora ogni funzione y_1, che soddisfa alle condizioni della prima parte del teorema, ha per $x = x_0$ un valore maggiore di $F(x_0) = \varphi(x_0)$, perchè $F(x_0)$ è il limite inferiore dei valori delle funzioni y_1: inoltre essa soddisfa alla diseguaglianza $\frac{dy_1}{dx} > f(x, y_1)$; quindi, per una proposizione dimostrata, sarà, per ogni valore di x nell'intervallo (x_0, x_1) $y_1 > \varphi(x)$; perciò $F(x)$, cioè il limite inferiore dei valori di y_1 non sarà minore di $\varphi(x)$, $F(x) \geqq \varphi(x)$, ovvero, sostituendo a $\varphi(x)$ la sua espressione,

$$F(x) \geqq F(x_0) + (x - x_0)(m - \varepsilon) ,$$

che si può scrivere

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \geqq m - \varepsilon .$$

D'altra parte, fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, la quantità

$$H = m + \varepsilon - f\left[x, F(x_0) + \alpha + (m + \varepsilon)(x - x_0)\right]$$

è funzione continua di α ed x, che per $\alpha = 0$ e $x = x_0$ si riduce ad ε, quantità positiva. Quindi si possono determinare $\rho > 0$ e $x_1 > x_0$, in modo che per ogni valore di $\alpha < \rho$ e per ogni valore di x nell'intervallo (x_0, x_1), si abbia $H > 0$. Ora, poichè $F(x_0)$ è il limite inferiore dei valori che assumono, per $x = x_0$, le funzioni y_1, si potrà determinare una di queste fun-

zioni che assuma, per $x = x_0$, un valore $F(x_0) + \alpha$, ove $\alpha < \rho$. Si consideri ora la funzione $\psi(x)$ che nell'intervallo (a, x_0) coincide colla funzione y_1 or ora considerata, e che nell'intervallo (x_0, x_1) valga

$$\psi(x) = F(x_0) + \alpha + (m + \varepsilon)(x - x_0).$$

Sarà $\frac{d\psi}{dx} - f(x, \psi) = H > 0$; quindi, nell'intervallo (x_0, x_1) sarà $\frac{d\psi}{dx} > f(x, \psi)$. Adunque la funzione $\psi(x)$ soddisfa a tutte le condizioni del num. 1 del teorema; ma $F(x)$ è il limite inferiore delle funzioni che soddisfano a quelle condizioni, perciò nell'intervallo (x_0, x_1) sarà $F(x) < \psi(x)$, ossia

$$F(x) < F(x_0) + \alpha + (m + \varepsilon)(x - x_0).$$

Questa diseguaglianza è soddisfatta qualunque sia α, che si può supporre piccolo ad arbitrio; quindi

$$F(x) \leqq F(x_0) + (m + \varepsilon)(x - x_0)$$

che si può scrivere

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqq m + \varepsilon.$$

Le diseguaglianze trovate

$$m - \varepsilon \leqq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqq m + \varepsilon$$

furono dimostrate per $x > x_0$; ma, a causa della loro simmetria in x ed x_0, si può far astrazione da questa ipotesi.

Esse dicono appunto che

$$F'(x_0) = m,$$

ossia, sostituendo ad m il suo valore, che l'equazione differenziale

$$F'(x) = f[x, F(x)]$$

è soddisfatta per ogni valore x_0 di x appartenente all'intervallo (a, A).

In modo analogo si dimostra che Y_2 soddisfa alla stessa equazione differenziale. (Del resto, ponendo $y = -z$, le funzioni y_1, Y_1, y_2, Y_2 si scambiano rispettivamente in y_2, Y_2, y_1, Y_1). Così sono dimostrate la terza e la quarta parte del teorema.

Siano ora y_1, y_2 e y tre funzioni di x, che per $x = a$ assumono il valore b, e che soddisfano alle condizioni

$$\frac{dy_1}{dx} > f(x, y_1) \ , \quad \frac{dy_2}{dx} < f(x, y_2) \ , \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \ .$$

Per una proposizione dimostrata sarà nell'intervallo (a, A)

$$y_1 > y > y_2 \ ;$$

quindi Y_1, limite inferiore delle funzioni y_1, e Y_2, limite superiore delle y_2, soddisfano alle condizioni

$$Y_1 \geqq y \geqq Y_2 \ ,$$

che è la quinta parte del teorema.

Ammessa puramente la continuità di $f(x, y)$ non è possibile il dedurre altre conseguenze oltre all'esistenza delle due funzioni Y_1 e Y_2 che per $x = a$ assumono il valore b, che soddisfano all' equazione $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, e le quali comprendono fra loro tutte le funzioni che soddisfano alla stessa equazione, e che per $x = a$ assumono il valore b. Ma se si fa l'ipotesi del num. 6, tutte queste funzioni coincidono.

Invero, dalle equazioni

$$\frac{dY_1}{dx} = f(x, Y_1) \ , \qquad \frac{dY_2}{dx} = f(x, Y_2) \ ,$$

si ricava

$$\frac{d(Y_1 - Y_2)}{dx} = f(x, Y_1) - f(x, Y_2) \ ,$$

ossia

$$\frac{d(Y_1 - Y_2)}{dx} = (Y_1 - Y_2) f'_y(x, y) \ ,$$

ove y è un valore medio fra Y_1 e Y_2. Suppongasi ora che per tutti i valori di x compresi fra a e A, e per tutti i valori di y

compresi fra Y_1 e Y_2 si abbia $f'_y(x, y) < M$, ove M è una costante finita; moltiplicando per $Y_1 - Y_2$ che è quantità $\geqq 0$, si dedurrà

$$\frac{d(Y_1 - Y_2)}{dx} \leqq (Y_1 - Y_2) M .$$

Si integri questa diseguaglianza; perciò si trasporti tutto nel primo membro, e si moltiplichi per e^{-Mx}, quantità positiva; si dedurrà $\frac{d \cdot e^{-Mx}(Y_1 - Y_2)}{dx} \leqq 0$. Dunque la funzione $e^{-Mx}(Y_1 - Y_2)$ non è mai crescente nell'intervallo (a, A); essa è nulla per $x = a$, perchè, per questo valore di x, Y_1 e Y_2 assumono il valore b; ed essa non può diventare negativa perchè $e^{-Mx} > 0$, e $Y_1 \geqq Y_2$. Quindi essa è nulla per ogni valore di x, ossia le funzioni Y_1 e Y_2, e tutte le funzioni fra esse comprese coincidono in tutto l'intervallo (a, b) (*).

(*) Cauchy dimostrò pel primo l'esistenza d'una e d'una sola funzione y di x che soddisfa all'equazione $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ e che per $x = a$ assume un dato valore b, supposto però che $f(x, y)$ sia una funzione *monogena* delle variabili. Questa dimostrazione è stata semplificata da Briot e Bouquet (Journal de l'École Polytechnique, XXXVI cahier, pag. 133). Nuove dimostrazioni della stessa proposizione, senza introdurre la considerazione di funzioni monogene, ma con alcune restrizioni sulla natura della funzione $f(x, y)$, furono date dai sigg. Lipschitz, Hoüel, Gilbert, ecc. Il sig. Vito Volterra (Giornale di Matematiche, vol. XIX) generalizzò questi risultati, lasciando tuttavia in dubbio la verità del teorema, supposta solamente la continuità di $f(x, y)$. Nella presente Nota si ha anche la risposta a tale questione.

L'ESAGRAMMA DI PASCAL

Nota storica dell'Ingegnere Ottavio Zanotti Bianco

Nel 1640 Biagio Pascal, appena sedicenne, scopriva la mirabile proprietà delle coniche, cui è rimasto il nome di *hexagrammum mysticum* (*). Nel 1806 Brianchon (**) trovò il teorema correlativo a quello di Pascal. Di poi l'esagono inscritto e circoscritto ad una conica fu oggetto di molte ricerche e di essi e delle *rette Pascal* e dei *punti Brianchon* furono scoperte curiose ed importantissime proprietà. Crediamo non inutil

(*) *Essai sur les coniques*, opuscolo di 6 pagine pubblicato nel 1640 da Pascal e che doveva far parte e servire di base ad un *Traité complet des coniques*, che non giunse sino a noi. Leibnitz fra le carte di Pascal che ebbe fra mano nel suo soggiorno a Parigi, fra il 1672 ed il 1676, trovò pure il testo del trattato delle coniche, e lo inviò a Perrier invitandolo a farlo prontamente stampare: non si sa per quali motivi ciò non fu fatto, ed il trattato andò così perduto. Il nome di *hexagrammum mysticum* non si trova nell'*Essai sur les coniques;* esso è conosciuto solo per una lettera di Leibnitz datata « Parigi, 30 agosto 1676 » ed indirizzata a Perrier, nipote di Pascal, consigliere a Clermont-Ferrand. A quanto riferisce Leibnitz, l'appellativo di *hexagrammum mysticum* si troverebbe in un manoscritto portante questa intestazione: *Generatio coni sectionum, seu projectio peripheriae, tangentium et secantium circuli in quibuscumque oculi, plani et tabulae positionibus.* Il teorema di Pascal fu pubblicato nelle tre edizioni delle sue opere complete che successivamente si fecero negli anni 1779, 1819 e 1858; e più recentemente da Weissenborn nella prefazione al suo libro *Die proiection in der Ebene*, Berlino 1862. Per la storia del teorema di Pascal vedasi pure: Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie;* Parigi, 1875, pp. 70-71 e 330, e Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures;* Parigi, 1822, N. 202.

(**) *Mémoire sur les surfaces courbes de second ordre*, Journal de l'École polytechnique, XIII cahier, 1806, pp. 297-311.

cosa il riportare più avanti i nomi di alcuni matematici che consacrarono a questo argomento speciali lavori; pur tacendo di altri che di esso trattarono incidentalmente, ma senza giungere a risultati di rilievo, nei loro scritti su questioni affini, nonchè dei numerosi autori di trattati di geometria proiettiva ed analitica, i quali, scrivendo a scopo didattico, si limitarono all'esposizione dei risultati conosciuti.

Percorrendo per ricerche di Geodesia il volume secondo delle *Abhandlungen* di BESSEL, mi fu dato di avvertire un fatto non accennato in alcuno degli scritti menzionati nella presente Nota nè nelle più recenti istorie delle matematiche. Questo fatto è l'aver BESSEL scoperto nel 1820 la proprietà dell'esagono inscritto in una conica, completamente ignorando che PASCAL l'avesse trovata prima di lui. BESSEL comunicò ad OLBERS la sua scoperta con una lettera in data 14 febbraio 1820 (*). OLBERS risponde a BESSEL da Brema il 20 aprile 1820 (**), e trovando bellissimo il teorema comunicatogli, dichiara, che per quanto ha letto e si ricorda, esso teorema gli riesce nuovo. Riferiamo qui sotto i passi delle lettere di BESSEL e OLBERS (***) che riguardano questa oggimai conosciutissima proprietà delle coniche.

Ecco il brano della lettera di BESSEL (****):

« . . . . . Ciò di che la prego, è uno schiarimento sopra un assai rimarchevole teorema della teoria delle coniche, che io non trovo in Apollonio, e che per mancanza dei necessarii libri non posso in alcun altro luogo ricercare. Ma lei, che si è educato alla bella scuola degli antichi geometri, mi potrà facilmente dire, se esso si trovi in qualche altro luogo, ed in qual maniera esso sia presentato. Mi fa meraviglia, che esso non si trovi in Apollonio, poichè esso è un teorema capitale,

---

(*) *Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel* herausgegeben von A. Erman. Zweiter Band, p. 133; Leipzig, Avenarius und Mendelssohn, 1852.

(**) *Briefwechsel* ecc., vol. II, p. 140.

(***) Dobbiamo alla squisita cortesia dell'esimio prof. CELORIA, II Astronomo all'Osservatorio di Brera in Milano, il passo della lettera di OLBERS e glie ne rendiamo sentite grazie. A Torino non potemmo trovare i volumi della corrispondenza di OLBERS con BESSEL.

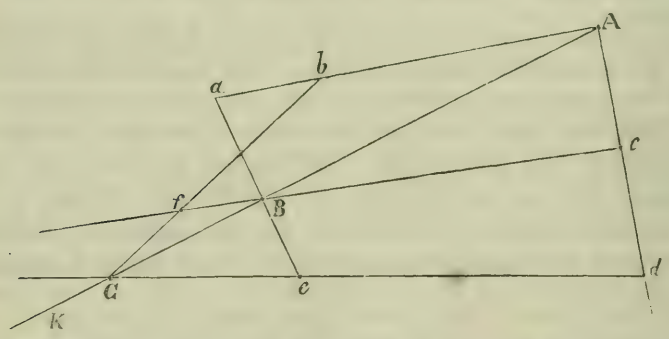
(****) *Abhandlungen von Friedrich Wilhelm Bessel* herausgegeben von Rudolf Engelmann, Zweiter Band, pp. 358-60; Leipzig, Engelmann, 1876.

da cui si potrebbero facilmente dedurre cento corollari. Ma veniamo al fatto: « Quando si prendano sopra una conica sei punti a, b, c, d, e, f in ordine qualunque, e si prolunghino le rette ab, cd finchè s'incontrino in un punto A, e le ae, cf, e finalmente le bf, de, fino ad incontrarsi rispettivamente in B ed in C: ABC, sono in linea retta ».

Uno dei miei scuolari credeva di aver trovato, che quando si prolungano i lati di un esagono inscritto in un cerchio, fino ad incontrarsi, e precisamente nell'ordine 1,4; 2,5; 3,6: questi punti d'incontro sono in linea retta. Io trovai subito una dimostrazione di questo teorema, ma riconobbi al tempo medesimo, che esso: 1) è solamente caso particolare di un teorema infinitamente più generale, e vale sempre, quando si fanno gli accoppiamenti secondo lo schema seguente

$$a \left\{ \begin{matrix} b \\ e \end{matrix} \right. \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \left. \begin{matrix} d \\ f \end{matrix} \right\} c$$

cioè ab, dc, ae, fc; quindi in croce bf, de, così per ogni esagono risultano 60 rette che soddisfano al teorema; 2) che invece del circolo si può prendere una qualsivoglia sezione conica.



In virtù di quest'ultima estensione il teorema serve anche a determinare quanti si vogliano punti di una conica, di cui ne siano dati cinque; la costruzione trovata altre volte per questo caso si fonda sopra altre basi ed è diversa da questa. Ma se il teorema è vero, quella costruzione è la seguente:

I punti dati siano a, b, c, d, e. Si prolunghino ab, cd fino a tagliarsi in A; si conduca per A la retta arbitraria AK,

che taglia ae in B, e de in C; si conducano quindi cB e bC, il loro punto d'incontro f sarà il punto domandato.

Per altre AK si ottengono altri punti.

Vengo ora alla dimostrazione stessa, la quale quando la non si voglia eseguire con 60 modificazioni diverse, deve venir data analiticamente. La svolgo prima per il cerchio:

Tiro pel suo centro una retta arbitraria, sulla quale misuro le ascisse; dal punto, ove essa taglia la periferia computo fino ai sei punti gli angoli a, b, c, d, e, f, qualsiasi l'ordine in cui questi possono seguirsi. Faccio poi gli accoppiamenti secondo lo schema precedente, così ho per la determinazione delle coordinate xy, $x'y'$, $x''y''$ dei tre punti ABC le equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{b-a}{2} &= x\cos\frac{b+a}{2} + y\,\mathrm{sen}\,\frac{b+a}{2}\\
\cos\frac{d-c}{2} &= x\cos\frac{d+c}{2} + y\,\mathrm{sen}\,\frac{d+c}{2}\\
\cos\frac{e-a}{2} &= x'\cos\frac{e+a}{2} + y'\,\mathrm{sen}\,\frac{e+a}{2}\\
\cos\frac{f-c}{2} &= x'\cos\frac{f+c}{2} + y'\,\mathrm{sen}\,\frac{f+c}{2}\\
\cos\frac{f-b}{2} &= x''\cos\frac{f+b}{2} + y''\,\mathrm{sen}\,\frac{f+b}{2}\\
\cos\frac{e-d}{2} &= x''\cos\frac{e+d}{2} + y''\,\mathrm{sen}\,\frac{e+d}{2}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (1).$$

Queste devono corrispondere all'equazione della linea retta:

$$0 = y''(x'-x) - y'(x''-x) + y(x''-x') \qquad \ldots (2)$$

ossia si debbono poter soddisfare le sei equazioni (1) e questa equazione (2) a mezzo degli stessi valori delle coordinate. Ma questo si ottiene manifestamente per l'equazione (2) ponendo

$$\begin{aligned}
x &= k\cos u - \rho\,\mathrm{sen}\,u; & y &= k\,\mathrm{sen}\,u + \rho\cos u\\
x' &= k\cos u - \rho'\,\mathrm{sen}\,u; & y' &= k\,\mathrm{sen}\,u + \rho'\cos u\\
x'' &= k\cos u - \rho''\,\mathrm{sen}\,u; & y'' &= k\,\mathrm{sen}\,u + \rho''\cos u.
\end{aligned}$$

Io dimostro come segue che ciò avviene anche per le equazioni (1): io elimino ρ, ρ', ρ'', così invece di sei io ho tre nuove equazioni

$$\left.\begin{aligned}
k \operatorname{sen}\left(\frac{d+c}{2}-\frac{b+a}{2}\right) &= \cos\left(\frac{b-a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{d+c}{2}-u\right) \\
&\quad -\cos\left(\frac{d-c}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{b+a}{2}-u\right) \\
k \operatorname{sen}\left(\frac{f+c}{2}-\frac{e+a}{2}\right) &= \cos\left(\frac{e-a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{f+c}{2}-u\right) \\
&\quad -\cos\left(\frac{f-c}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{e+a}{2}-u\right) \\
k \operatorname{sen}\left(\frac{e+d}{2}-\frac{f+b}{2}\right) &= \cos\left(\frac{f-b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c+d}{2}-u\right) \\
&\quad -\cos\left(\frac{e-d}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{f+b}{2}-u\right)
\end{aligned}\right\}\ldots(3).$$

Ma si ha in generale:

$$\begin{aligned}
&\cos(B-b)\operatorname{sen}(A+a+N)-\cos(A-a)\operatorname{sen}(B+b+N) \\
&=\operatorname{sen}(a-b)\cos(A+B+N)+\operatorname{sen}(A-B)\cos(a+b-N)
\end{aligned}$$

(della quale utile ed elegante relazione trigonometrica, io trovo dieci varietà, che io dimostro complessivamente con ciò che io trasformo i prodotti dalle due parti del segno d'uguaglianza in seni delle somme e differenze, ove immediatamente tutto diviene uguale). Si applichi ora qui questo teorema, allora le equazioni (3) diventano

$$\begin{aligned}
k \operatorname{sen}\left(\frac{d-b}{2}+\frac{c-a}{2}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{c-a}{2}\right)\cos\left(\frac{d+b}{2}-u\right) \\
&\quad +\operatorname{sen}\left(\frac{d+b}{2}\right)\cos\left(\frac{c+a}{2}-u\right) \\
k \operatorname{sen}\left(\frac{f-e}{2}+\frac{c-a}{2}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{c-a}{2}\right)\cos\left(\frac{f+e}{2}-u\right) \\
&\quad +\operatorname{sen}\left(\frac{f-e}{2}\right)\cos\left(\frac{c+a}{2}-u\right) \\
k \operatorname{sen}\left(\frac{e-f}{2}+\frac{d-b}{2}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{d-b}{2}\right)\cos\left(\frac{f+e}{2}-u\right) \\
&\quad +\operatorname{sen}\left(\frac{e-f}{2}\right)\cos\left(\frac{d+b}{2}-u\right),
\end{aligned}$$

e moltiplicando queste per

$$\operatorname{sen}\frac{f-e}{2}\,; \qquad -\operatorname{sen}\frac{d-b}{2}\,; \qquad +\operatorname{sen}\frac{c-a}{2}$$

e sommando, indipendentemente da k e da u viene *zero* dalle due parti del segno d'uguaglianza.

Vedesi chiaro, che il teorema vale anche in generale per le sezioni coniche, quando si riguardino queste come proiezioni del cerchio sopra un piano tagliante il cono e l'occhio sia al vertice del cono. La linea retta ABC rimane allora retta, ecc.....

Ma si può facilmente dare una dimostrazione diretta, quando si applichi ancora il metodo sopra usato. Le equazioni generali delle coniche sono:

$$yy=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\ \ldots \text{ ellisse},$$

$$yy=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)\ \ldots \text{ iperbole},$$

a queste si soddisfa così:

$$x=a\cos\alpha\,;\ \ x=a\sec\alpha$$
$$y=b\operatorname{sen}\alpha\,;\ \ y=b\operatorname{tag}\alpha$$

con che, invece dell'equazione (1) sviluppata per il cerchio, si ha analogamente:

Ellisse $\quad xb(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)+ya(\cos\beta-\cos\alpha)=ab\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

Iperbole $\quad xb(\operatorname{tag}\alpha-\operatorname{tag}\beta)+ya(\sec\beta-\sec\alpha)=ab(\operatorname{tag}\alpha\sec\beta-\operatorname{tag}\beta\sec\alpha)$

ed ancora:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ellisse} & xb\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2}+ya\operatorname{sen}\dfrac{\beta+\alpha}{2}=ab\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}\\[2ex] \text{Iperbole} & xb\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}+ya\operatorname{sen}\dfrac{\beta+\alpha}{2}=ab\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2}\end{array}\right\}\ldots(1)^*.$$

Ma l'equazione (2) per la linea retta è ancora soddisfatta da

$$x = ak\cos u - \rho a \operatorname{sen} u$$
$$y = bk \operatorname{sen} u + \rho b \cos u$$
$$\text{ecc.} \ldots\ldots$$

Se per mezzo di ciò si elimina ρ, le sei equazioni (1)* danno esattamente per l'ellisse le equazioni (3) trovate pel cerchio, cosicchè questo caso è dimostrato; per l'iperbole esse diventano

$$k\left\{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\delta+\gamma}{2}-\cos\frac{\delta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta+\alpha}{2}\right\}$$
$$=\operatorname{sen}\left(\frac{\delta+\gamma}{2}-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\cos u+\left\{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\delta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\delta+\gamma}{2}\right\}\operatorname{sen} u,$$

ove il primo membro, per l'indicato teorema trigonometrico, si può trasformare in

$$\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\delta+\beta}{2}+\operatorname{sen}\frac{\delta-\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2},$$

e l'ultimo pel teorema

$$\cos(B-b)\cos(A+a+N)-\cos(A-a)\cos(B+b+N)$$
$$=-\operatorname{sen}(A+B+N)\operatorname{sen}(a-b)-\operatorname{sen}(a+b+N)\operatorname{sen}(A-B)$$

in

$$+\left\{\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\delta+\beta}{2}+\operatorname{sen}\frac{\delta-\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\right\}.$$

Dopo questa trasformazione, la moltiplicazione e l'addizione adoperate pel cerchio danno zero dalle due parti.

Io ho anche investigato come si possano dimostrare geometricamente i casi speciali di questo teorema, solo non voglio trattenervela più a lungo, poichè questa via non sembra qui essere la dritta ».

Ecco ora il brano della lettera di Olbers:

« Brema, 20 aprile 1820 . . . . . Le sue interessanti lettere e comunicazioni mi sono state di un vero grande conforto. Io non posso ancora oggi rispondervi ordinatamente e tanto meno

poi che una nuova ed opprimente cura di famiglia occupa, e dolorosamente occupa il mio cuore in questo momento.

« Io le dico solamente, che il suo bel teorema sulle così rimarchevoli proprietà delle coniche mi tornò affatto nuovo, e che anch'io per quanto s'estende la mia lettura e la mia memoria lo tengo per completamente nuovo ».

APPUNTI BIBLIOGRAFICI.

Anonyme, *Beweis des Lehrsatzes, Bd.* 3, *S.* 312 *dieses Journals;* Giornale di Crelle, vol. VI, 1830, p. 310. Il teorema cui si allude è una generalizzazione del teorema di Pascal proposta come da dimostrarsi dal signor HELLERUNG.

BAUER, *Ueber das Pascalschen Theorem*, Abhandlungen dell'Accademia delle Scienze di Monaco, 1874, III Abth.; pp. 109, 139.

BOBILIER, *Démonstration de quelques propriétés des lignes de second ordre;* Annales de Mathématiques par Gergonne, vol. XVIII, 1827-28.

BRASSINNE, *Généralisation du théorème de Brianchon et de l'hexagone de Pascal:* Nouvelles Annales de Mathématiques, serie 3ª, tomo I, 1882, pp. 318-19.

BRIOSCHI, *Sur l'hexagone inscriptible dans une conique:* Nouvelles Annales de Mathématiques, XVI, 1857, pp. 269-72. — *Géométrie algorithmique. Sur les polygones inscrits et circonscrits à des coniques;* ibidem, pp. 421-28. — *Sui poligoni inscritti alle coniche;* Annali di Tortolini, VIII, 1857, pp. 119-224. — *Intorno ad alcune questioni della geometria di posizione;* Annali di Tortolini, tomo VI, 1855, pp. 209-17.

CATALAN, *Sur les hexagones de Pascal et de Brianchon:* Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, serie 2ª, XLVI, 1877, pp. 946-49 (Vedi anche TERQUEM e FOLIE).

CAYLEY, *Demonstration of Pascals theorem;* Cambridge and Dublin Mathem. Journal, IV, 1845, pp. 18-20. — *Sur*

quelques théorèmes de la géométrie de position; Giornale di Crelle, vol. 31, 1846, pp. 213-26: vol. 34, 1847, pp. 270-75: vol. 38, 1849, pp. 97-104 e vol. 41, 1851, p. 66 e p. 84. In quest'ultima Nota CAYLEY dice che alcuni teoremi da lui scoperti lo furono pure e indipendentemente da SALMON.

CREMONA, *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagramma di Pascal;* Atti della R. Accademia dei Lincei, anno CCLXXIV, 1876-77, serie 3ª, vol. I, pp. 854-74.

DARRAUDE, *Démonstration élémentaire des principales propriétés des hexagones inscrits et circonscrits au cercle: suivie de la solution de divers problèmes de géométrie;* Annales de Mathématiques par Gergonne, vol. XIV, 1823-24, pp. 29-62.

DEWULF, *Hexagramme de Pascal,* Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, 2ª serie, tomo I, 1877, pp. 348-51. (Contiene un cenno storico sulla teoria dell'esagramma mistico, ma senza indicazioni bibliografiche).

DUFAU, *Théorème de l'hexagramme inscrit dans une conique;* Nouvelles Annales de Mathématiques, 1882 (3), I, pp. 99-102.

DZIOBECK, *Neue Beiträge zur Theorie des Paschal'schen Sechsecks.* Berlino 1882 — *F. Dummler.*

FOLIE, *Sur l'évolution ou nouvelle propriété fondamentale dans la théorie des coniques et des surfaces de second ordre et son extension aux courbes et aux surfaces supérieures;* Bulletins de l'Académie des Sciences de Bruxelles, tomo LXIII, gennaio-luglio 1877, pp. 500-5. — *Suite à la note précédente sur l'évolution,* ibidem, tomo XLIV, luglio-dicembre 1877, pp. 182-93. — *Rapport sur un mémoire de M. Sautreaux* (vedi questo nome), ibidem, tomo XLV, gennaio-giugno 1878, pp. 370-71. — *Addiction à notre Rapport sur la note de M. Sautreaux,* ibidem, tomo XLVI, luglio-dicembre 1878, pp. 14-17. — *Restitution de priorité en faveur de M. Catalan,* ibidem, pp. 379-80. Due dei teoremi dati dal signor FOLIE nel 1877 sono dovuti al signor CATALAN (vedi TERQUEM). Le conseguenze che il signor FOLIE ne ha dedotto per le coniche e le sue osservazioni sulla possibilità di estenderle alle curve superiori gli appartengono in proprio. I teoremi del signor CATALAN si trovano anche nei §§ 569-72 del suo corso autografato di *Application de*

l'Algèbre à la Géométrie, 1848. Lo stesso argomento di riconoscimento di priorità è pure trattato in uno scritto del FOLIE col titolo medesimo nelle Nouvelles Annales de Mathématiques, tomo XVIII, 1879, pp. 238-39.

GRAFE, *Notiz über das Pascal'sche resp. Brianchon'sche Sechseck;* Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. XCIII, 1882, pp. 184-88.

GERGONNE, *Application de la doctrine des proiections à la démonstration des propriétés des hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques:* Annales de Mathématiques par Gergonne, vol. IV, 1813-14, pp. 78-84.

GROSSMANN, *Ueber eine neue Eigenschaft der Steinerschen Gegenpunkte des Pascal'schen Sechsecks;* Giornale di Crelle, vol. 58, pp. 174-78, 1861.

HEGER, *Bemerkungen zum Pascal'schen Satze über Kegelschnitte sechsecke;* Zeitschrift für Mathem. und Physik, 30, 1885, pp. 279-290.

HESSE, *Ueber das geradlinige Sechseck auf den Hyperboloid:* Giornale di Crelle, vol. 24, 1840, p. 40 e seguenti. — *Eine Bemerkung zum Paschalschen Theorem;* ibidem, vol. XLI, 1851, pp. 269-71. — *Vier Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie;* Zeitschrift für Mathem. und Physik., 1866. — *Ueber die Reciprocitat der Paschal-Steinerschen und der Kirkmann-Cayley-Salmonschen Satze von dem Hexagrammum mysticum;* Giornale di Crelle, vol. 68, 1868, pp. 193-207. — *Ein Cyclus von Determinanten Gleichungen* (Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theorem); ibidem, vol. 75, 1873, pp. 1-12. Questa memoria è anche stampata nelle Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Classe der K. K. Akademie der Wissenschaften di Monaco, vol. II, 1874, I Abth., pp. 175-92 e porta la data di « Monaco, febbraio, 1872 ».

JACOBI A., *Beweis eines geometrischem Satzes;* Giornale di Crelle, vol. XXXI, 1846, pp. 178-80, datata Breslavia 6 luglio 1845. In questo scritto si corregge un errore di stampa incorso nella pubblicazione dei teoremi proposti da PLUCKER nel 1832.

KIRKMANN, *On the complete hexagon inscribed in a conic section:* Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. V, 1850, pp. 185-200.

LADD (Miss Christine), *The Pascal hexagram;* American Journal of Mathematics pure and applied, tomo II, 1879, Baltimore.

MÖBIUS, *Verallgemeinerung des Pascalschen Theorems das in Einen Hegelschnitt beschriebene Sechseck betreffend* (Aus den Berichten über die Verhandlungen der K. Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig); Giornale di Crelle, vol. XXXVI, 1848, pp. 316-319.

PLÜCKER, *Ueber ein neues Princip der Geometrie und die Gebrauch allgemeiner symbole und umbestimmten coefficienten;* Giornale di Crelle, vol. V, 1829, pp. 268-86. — *Note sur le théorème de Pascal*, ibidem, vol. XXXIV, 1847, pp. 337-340. — *Neue Sätze über das umschriebene und das eingeschriebene Sechseck;* ibidem, vol. IX, pag. 411 (vedi JACOBI).

SALMON, *Analytische Geometrie der Hegelschnitte frei bearbeitet von Fiedler;* 1878, pp. 338, 687, 688.

SAUTREAUX, *Démonstration de deux théorèmes analogues en géométrie de l'èspace à celui de Pascal en géométrie plane;* Bulletins de l'Académie de Belgique, tomo XLV, gennaio-giugno 1878, pp. 426-30. — *Théorème de Pascal;* Nouvelles Annales de Mathématiques, 2ª serie, tomo XVII, 1878, p. 281.

SCHRÖTER, *Steinersche Vorlesungen*, edizione 1876, pp. 217-18.

STAUDT, *Ueber die Steinerschen Gegenpunkte welche durch zwei in eine Curve zweiter Ordnung beschriebene Dreiecke bestimmt sind;* Giornale di Crelle, vol. 62, 1863, pp. 142-150.

STEINER, *Théorèmes sur l'hexagrammum mysticum;* Annales de Mathématiques par Gergonne, vol. XVIII, 1827-28, pp. 339-40. — *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestatten von Einander;* Berlino, 1832, p. 311. — *Théorème de Pascal et ses conséquences;* Nouvelles Annales Mathématiques, vol. XI, 1852, pp. 163-76.

STURM, *Mémoires sur les lignes de second ordre;* Annales de Gergonne, vol. XVI, 1825-26, p. 265 e seguenti; vol. XVII, 1826-27, pp. 173-198.

TERQUEM, *Théorème de Pascal et ses conséquences;* Nouvelles Annales de Mathématiques, vol. II, 1852, pp. 163-176. Contiene un'esposizione storica della teoria dell'esagramma

con indicazioni bibliografiche. In esso si trovano i teoremi di CATALAN.

TOMES, *L'esagono inscritto e circoscritto ad una conica* (in lingua boema); Casopis, giornale di matematica e fisica, vol. IX, 1880, p. 277.

TREUTLEIN, *Das Deweis des Satzes von Brianchon and das Princip der Dualitat;* Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Lipsia, 1879, vol. X, pp. 89-98.

VERONESE, *Nuovi teoremi sull'hexagrammum mysticum*, Atti della R. Accademia dei Lincei, anno CCLXXIV 1876-77, serie 3ª, vol. I, pp. 649-703. — *Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de* n *lettres particulièrement pour* $n = 3, 4, 5, 6$ *avec les groupes de l'hexagramme mystique;* Annali di Matematica, serie II, vol. XI, dal luglio 1882 all'aprile 1883, pp. 93-229 con indice. — *Sui gruppi* $(P)_{360}$, $(\pi)_{360}$ *della figura di sei complessi lineari di rette due a due in involuzione;* ibidem, pp. 284-290. Questa Nota completa i risultati della Memoria precedente.

WEINMEISTER, *Herr Professor Tructlein über den Lehrsatz des Brianchon. Nachtrag zu der Bemerkung uber den Lehrsatz des Brianchon;* Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Lipsia 1879, vol. X, pp. 191-93 e pp. 407-8.

Torino, Maggio 1886.

NOZIONI

INTORNO

ALL' EQUATORIALE

CON REFRATTORE MERZ

di trenta centimetri d'apertura e metri 4 $^1/_2$ di distanza focale

NOTA QUARTA

del Socio Prof. ALESSANDRO DORNA.

Dal confronto delle letture dei cerchi graduati e delle corrispondenti coordinate di varii astri, osservati in posizioni differenti, risulta nelle Note seconda e terza che lo strumento è abbastanza ben collocato per potervi già applicare nella ricerca delle sue otto costanti le seguenti equazioni approssimate dell'Equatoriale. In queste i primi membri sono adattati alle letture dei circoli graduati come dissi nella Nota seconda. Il segno della costante c di collimazione è stabilito dalla convenzione che si osservi a $90^\circ + c$ dall'estremità dell'asse di rotazione del cannocchiale situata dalla parte del circolo di declinazione. Questa convenzione per il segno di c (opposto a quello delle formole del Chauvenet e lo stesso delle formole contenute nell'edizione francese del Brünnow) è la generalmente adottata per l'altazimuth e per il circolo meridiano. Nelle equazioni [1] [1_1] relative al cerchio di declinazione ho messo i termini di secondo ordine rispetto a c ed i (inclinazione dell'asse di rotazione sul piano del circolo orario) ricavati, correggendoli, dall'edizione summentovata. In essi il fattore sen $1'$ è nella supposizione che si esprimano le costanti strumentali *in primi d'arco*, come farò nella ricerca di queste avuto riguardo che l'indicazione minima dei nonii dello strumento di cui parlo è di $1'$ pel circolo di declinazione e di $1',25$ pel circolo orario. Con P designo la po-

sizione dello strumento per la quale il circolo di declinazione preceda il cannocchiale in angolo orario, e con P_1 la posizione inversa, per la quale il circolo di declinazione segua il cannocchiale.

FORMOLE DELL' EQUATORIALE

POSIZIONE P (CIRCOLO PRECEDE).

$$[1] \ldots \quad 180^\circ - \delta = \delta' + \Delta\delta + \xi \cos\tau + \eta \operatorname{sen}\tau + e(\operatorname{sen}\varphi \cos\delta - \cos\varphi \operatorname{sen}\delta \cos\tau) - \frac{1}{2}(i^2 + c^2) \operatorname{sen} 1' \tan\delta - i\,c \operatorname{sen} 1' \sec\delta \,.$$

$$[2] \ldots \quad \tau = \tau' + \Delta\tau - \xi \operatorname{sen}\tau \tan\delta + \eta \cos\tau \tan\delta + e \cos\varphi \sec\delta \operatorname{sen}\tau + \varepsilon(\operatorname{sen}\varphi \tan\delta + \cos\varphi \cos\tau) - i \tan\delta - c \sec\delta \,.$$

POSIZIONE P_1 (CIRCOLO SEGUE).

$$[1_1] \ldots \quad 180^\circ + \delta_1 = \delta_1' + \Delta\delta - \xi \cos\tau_1 - \eta \operatorname{sen}\tau_1 - e(\operatorname{sen}\varphi \cos\delta_1 - \cos\varphi \operatorname{sen}\delta_1 \cos\tau_1) + \frac{1}{2}(i^2 + c^2) \operatorname{sen} 1' \tan\delta_1 + i\,c \operatorname{sen} 1' \sec\delta_1 \,.$$

$$[2_1] \ldots \quad \tau_1 = \tau_1' + \Delta\tau - \xi \operatorname{sen}\tau_1 \tan\delta_1 + \eta \cos\tau_1 \tan\delta_1 + e \cos\varphi \sec\delta_1 \operatorname{sen}\tau_1 - \varepsilon(\operatorname{sen}\varphi \tan\delta_1 + \cos\varphi \cos\tau_1) + i \tan\delta_1 + c \sec\delta_1 \,.$$

φ Latitudine geografica.

δ, δ_1 Declinazioni apparenti dell'astro osservato.

τ, τ_1 Angoli orarii apparenti » »

δ', δ_1' Letture del circolo di declinazione.

τ', τ_1' » » orario.

$\Delta\delta$ Costante del circolo di declinazione, ossia correzione da aggiungersi col proprio segno alla lettura di tal circolo.

$\Delta\tau$ Costante del circolo orario, ...

ξ Coordinata sferica ortogonale meridiana del polo strumentale a sud, rispetto al polo celeste.

η Coordinata sferica ortogonale, nel sesto circolo orario, ad ovest, rispetto al polo celeste.

e Costante di flessione del cannocchiale.

ε » » dell'asse di declinazione.

i Inclinazione dell'asse di declinazione sul piano del circolo orario.

c Costante di collimazione del cannocchiale.

Addizionando le equazioni [1] [1_1] si ha:

$$[3]\ldots\begin{cases} 180^\circ - \frac{1}{2}(\delta'_1 + \delta') + \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta) \\ = \Delta\delta - \frac{1}{2}\xi(\cos\tau_1 - \cos\tau) - \frac{1}{2}\eta(\operatorname{sen}\tau_1 - \operatorname{sen}\tau) \\ - \frac{1}{2}e\left\{\operatorname{sen}\varphi(\cos\delta_1 - \cos\delta) - \cos\varphi(\operatorname{sen}\delta_1\cos\tau_1 - \operatorname{sen}\delta\cos\tau)\right\} \\ + \frac{1}{4}(i^2 + c^2)\operatorname{sen}1'(\tan\delta_1 - \tan\delta) + \frac{1}{2}ic\operatorname{sen}1'(\sec\delta_1 - \sec\delta). \end{cases}$$

Se $\delta_1 = \delta$ ottiensi:

$$[3']\ldots 180^\circ - \frac{1}{2}(\delta_1' + \delta') = \Delta\delta - \frac{1}{2}\xi(\cos\tau_1 - \cos\tau) - \frac{1}{2}\eta(\operatorname{sen}\tau_1 - \operatorname{sen}\tau) + \frac{1}{2}e\cos\varphi\operatorname{sen}\delta(\cos\tau_1 - \cos\tau),$$

equazione generalmente applicabile per un medesimo astro; e se l'intervallo di tempo fra le due osservazioni sarà piccolo, τ_1 differirà poco da τ, i coefficienti di ξ, η, e risulteranno piccoli e $\Delta\delta$ differirà poco da $180^\circ - \frac{1}{2}(\delta_1' + \delta')$. Osservando un punto fisso, $\tau_1 = \tau$ e:

$$[3'']\ldots\ldots \quad 180^\circ - \frac{1}{2}(\delta_1' + \delta') = \Delta\delta\ .$$

Sottraendo la [1] dalla [1_1] ne risulta:

$$\begin{aligned}\delta_1+\delta-(\delta_1'-\delta') = &-\xi(\cos\tau_1+\cos\tau)-\eta(\operatorname{sen}\tau_1+\operatorname{sen}\tau)\\ &-e\left\{\operatorname{sen}\varphi(\cos\delta_1+\cos\delta)-\cos\varphi(\operatorname{sen}\delta_1\cos\tau_1+\operatorname{sen}\delta\cos\tau)\right\}\\ &+\frac{1}{2}(i^2+c^2)\operatorname{sen}1'(\tan\delta_1+\tan\delta)+ic\operatorname{sen}1'(\sec\delta_1+\sec\delta);\end{aligned}$$

e se $\delta_1=\delta$ sarà:

$$[4']\ldots\left\{\begin{aligned}\delta-\frac{1}{2}(\delta_1'-\delta') = &-\frac{1}{2}\xi(\cos\tau_1+\cos\tau)-\frac{1}{2}\eta(\operatorname{sen}\tau_1+\operatorname{sen}\tau)\\ &-e\left\{\operatorname{sen}\varphi\cos\delta-\frac{1}{2}\cos\varphi\operatorname{sen}\delta(\cos\tau_1+\cos\tau\right\}\\ &+\frac{1}{2}(i^2+c^2)\operatorname{sen}1'\tan\delta+ic\operatorname{sen}1'\sec\delta\ .\end{aligned}\right.$$

Per stelle di declinazione non molto grande in vicinanza del meridiano, i coefficienti di η e dei due ultimi termini delle [4] [4'] saranno piccoli e si potranno con queste calcolare ξ ed e; ed anche con stelle circumpolari dopo aver trovato in altro modo c ed i.

Addizionando le [2] [2_1] si ottiene:

$$[5]\ldots\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\tau_1-\tau_1'+\tau-\tau')=\Delta\tau\\ &-\frac{1}{2}\xi(\operatorname{sen}\tau_1\tan\delta_1+\operatorname{sen}\tau\tan\delta)\\ &+\frac{1}{2}\eta(\cos\tau_1\tan\delta_1+\cos\tau\tan\delta)\\ &+\frac{1}{2}e\cos\varphi(\sec\delta_1\operatorname{sen}\tau_1+\sec\delta\operatorname{sen}\tau)\\ &-\frac{1}{2}\varepsilon\left\{\operatorname{sen}\varphi(\tan\delta_1-\tan\delta)+\cos\varphi(\cos\tau_1-\cos\tau)\right\}\\ &+\frac{1}{2}i(\tan\delta_1-\tan\delta)+\frac{1}{2}c(\sec\delta_1-\sec\delta)\ ;\end{aligned}\right.$$

e se $\delta_1 = \delta$:

$$[5'] \ldots \begin{cases} \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_1' + \tau - \tau') = \Delta\tau \\ -\frac{1}{2}\xi \tan\delta\,(\operatorname{sen}\tau_1 + \operatorname{sen}\tau) + \frac{1}{2}\eta \tan\delta\,(\cos\tau_1 + \cos\tau) \\ +\frac{1}{2} e \cos\varphi \sec\delta\,(\operatorname{sen}\tau_1 + \operatorname{sen}\tau) - \frac{1}{2}\varepsilon \cos\varphi\,(\cos\tau_1 - \cos\tau). \end{cases}$$

Quest'equazione per un astro di non grande declinazione comunque osservato in vicinanza del meridiano, oppure ad Est e ad Ovest a distanze prossimamente uguali dal medesimo, ha i termini in ξ e ed ε piccoli e può servire a calcolare $\Delta\tau$ ed η. Con un punto fisso in meridiano si ha:

$$[5''] \ldots \qquad \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_1' + \tau - \tau') = \Delta\tau + \eta \tan\delta\,.$$

Sottraendo la $[2_1]$ dalla $[2]$ si ottiene l'equazione:

$$[6] \ldots \begin{cases} \tau_1 - \tau_1' - (\tau - \tau') = \\ -\xi(\operatorname{sen}\tau_1 \tan\delta_1 - \operatorname{sen}\tau \tan\delta) + \eta(\cos\tau_1 \tan\delta_1 - \cos\tau \tan\delta) \\ +e\cos\varphi(\sec\delta_1 \operatorname{sen}\tau_1 - \sec\delta \operatorname{sen}\tau) \\ -\varepsilon\left\{\operatorname{sen}\varphi(\tan\delta_1 + \tan\delta) + \cos\varphi(\cos\tau_1 + \cos\tau)\right\} \\ +i(\tan\delta_1 + \tan\delta) + c(\sec\delta_1 + \sec\delta)\,; \end{cases}$$

la quale, se $\delta_1 = \delta$, si riduce alla seguente:

$$[6'] \ldots \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{\tau_1 - \tau_1' - (\tau - \tau')\right\} = \\ -\frac{1}{2}\xi \tan\delta\,(\operatorname{sen}\tau_1 - \operatorname{sen}\tau) + \frac{1}{2}\eta \tan\delta\,(\cos\tau_1 - \cos\tau) \\ +\frac{1}{2} e \cos\varphi \sec\delta\,(\operatorname{sen}\tau_1 - \operatorname{sen}\tau) \\ -\varepsilon\left\{\operatorname{sen}\varphi \tan\delta + \frac{1}{2}\cos\varphi\,(\cos\tau_1 + \cos\tau)\right\} \\ +i\tan\delta + c\sec\delta\,. \end{cases}$$

Questa, se l'intervallo di tempo fra le due osservazioni è piccolo e la declinazione non è molto grande, ha i termini in ξ, η ed c piccoli e si può applicare alla ricerca di i, c ed ε.

Basta dedurre le declinazioni apparenti δ, δ_1 e gli angoli orarii apparenti τ, τ_1, contenuti nelle formole, dalle coordinate vere corrispondenti, aggiungendo a queste, algebricamente, le variazioni $d\delta$, $d\delta_1$, $d\tau$, $d\tau_1$ provenienti dalla rifrazione, che sono date dalle formole:

$$[7] \ldots \left\{ \begin{array}{l} \tan N = \cot \varphi \cos \tau \; ; \qquad d\delta = K' \cot (\delta + N) \; ; \\ \qquad d\tau = - K' \dfrac{\operatorname{sen} N \tan \tau}{\cos \delta \operatorname{sen} (\delta + N)} \; , \end{array} \right.$$

in cui siano δ e τ la declinazione vera e l'angolo orario vero, φ la latitudine geografica e K' il coefficiente della rifrazione.

Applicai le [7] alle osservazioni delle due Note seconda e terza, facendo $\varphi = 45^\circ\, 4'\, 8''$ e $K' = 57''$, coefficiente delle rifrazioni medie.

Nella seguente tabella ho riuniti tutti gli elementi per il calcolo delle otto costanti strumentali colle osservazioni summentovate (correggendo un errore materiale sfuggitomi nella Nota seconda pel tempo siderale e per l'angolo orario vero di Regolo osservato il giorno 4, ed un errore di stampa della Nota terza nella declinazione vera della Polare).

Elementi per il calcolo delle Costanti strumentali.

Maggio 1885	ASTRO osservato	TEMPO SIDERALE	COORDINATE CELESTI			COORDINATE STRUMENTALI		
			Angolo orario vero	Rifrazione	Declinazione vera	Rifrazione	Circolo orario	Circolo di declinazione
4	*P* Regolo	$13^h\ 31^m 50^s$	$3^h\ 29^m 34^s$	$-3^s,8$	$+12^\circ\ 31'$	$+1',0$	$3^h\ 29^m\ 7^s,5$	168 1′
9	*P* Sole	4 55 49	1 49 26	−1 ,6	+17 30	+0 ,6	1 49 10	163 4
»	Giove (*a*)	11 15 9	1 19 17	−1 ,1	+13 50	+0 ,6	1 19 16	166 44 ,5
»	» (a_1)	11 42 37	1 46 45	−1 ,6	+13 50	+0 ,7	1 45 55	193 48
»	Regolo (*b*)	11 21 57	1 19 41	−1 ,6	+12 31 ,5	+0 ,6	1 19 20	168 2 ,5
»	» (b_1)	11 51 17	1 49 1	−2 ,2	+12 31 ,5	+0 ,7	1 48 7 ,5	192 28
»	Spica (c_1)	12 26 58	23 7 48	+1 ,1	−10 33 ,8	+1 ,6	23 6 30	169 32 ,5
»	» (c_1')	12 37 15	23 18 5	+0 ,9	−10 33 ,8	+1 ,4	23 16 52 ,6	169 30
»	» (*c*)	12 55 54	23 36 44	+0 ,5	−10 33 ,8	+1 ,4	23 36 5	191 1
»	» (*c'*)	13 1 3	23 41 53	+0 ,4	−10 33 ,8	+1 ,4	23 41 10	191 1

»	» (c^{iv})	13 15 22	23 56 12	+0 ,1	−10 33 ,8	+1 ,4	23 55 30	191 2
»	» (c^{v})	13 18 38	23 59 28	+0 ,0	−10 33 ,8	+1 ,4	23 58 40	191 2 ,5
»	» (c^{vi})	13 21 40	0 2 30	−0 ,1	−10 33 ,8	+1 ,4	0 1 50	191 2
16	Arturo (d)	13 20 15	23 9 48	+0 ,7	+19 46 ,9	+0 ,5	23 9 42 ,5	160 42 ,5
»	» (d')	13 30 20,5	23 19 53,5	+0 ,6	+19 46 ,9	+0 ,5	23 19 42 ,5	160 42 ,5
»	» (d_1)	13 49 20	23 38 53	+0 ,3	+19 46 ,9	+0 ,9	23 38 29	199 50
»	» (d_1')	13 59 48	23 49 21	+0 ,1	+19 46 ,9	+0 ,9	23 48 50	199 50
19	β G. Orsa (e)	13 20 49	2 25 54	−3 ,2	+57 0	−0 ,1	2 25 40	123 36
»	α » (f)	13 29 56	2 33 18	−4 ,1	+62 22	−0 ,2	2 32 55	118 15
»	Polare (g) (sottopolo)	13 46 53,5	12 30 27,5	+2 ,9	+88 41 ,6	+0 ,1	11 41 40	89 15 ,5
»	» (g_1)	14 0 23	12 43 57	+6 ,2	+88 41 ,6	+0 ,2	11 47 45	271 18 ,5

Cogli elementi di questa tabella ho ricavato dalle [3'], [4'], [5'], [6'], [1] e [2] le seguenti 92 equazioni per calcolare le otto costanti strumentali:

Dalla [3′].

A.

Giove	a , a_1	$\Delta\delta + 0{,}024\,\xi - 0{,}055\,\eta - 0.004\,e + 16',3 = 0$
Regolo	b , b_1	$\Delta\delta + 0{,}025\,\xi - 0{,}057\,\eta - 0{,}004\,e + 15\ \ 3 = 0$
Spica	c , c_1	$\Delta\delta + 0{,}010\,\xi + 0{,}062\,\eta + 0{,}001\,e + 16\ \ 8 = 0$
»	c , c_1'	$\Delta\delta + 0{,}006\,\xi + 0{,}040\,\eta + 0{,}001\,e + 15\ \ 5 = 0$
»	c' , c_1	$\Delta\delta + 0{,}011\,\xi + 0{,}074\,\eta + 0{,}001\,e + 16\ \ 8 = 0$
»	c' , c_1'	$\Delta\delta + 0{,}007\,\xi + 0{,}051\,\eta + 0{,}001\,e + 15\ \ 5 = 0$
»	c'' , c_1	$\Delta\delta + 0{,}012\,\xi + 0{,}084\,\eta + 0{,}002\,e + 16\ \ 8 = 0$
»	c'', c_1'	$\Lambda\delta + 0{,}007\,\xi + 0{,}062\,\eta + 0{,}001\,e + 15\ \ 5 = 0$
»	c''', c_1	$\Delta\delta + 0{,}012\,\xi + 0{,}091\,\eta + 0{,}002\,e + 17\ \ 3 = 0$
»	c''', c_1'	$\Delta\delta + 0{,}008\,\xi + 0{,}069\,\eta + 0{,}001\,e + 16\ \ 0 = 0$
»	c^{IV}, c_1	$\Delta\delta + 0{,}013\,\xi + 0{,}105\,\eta + 0{,}001\,e + 17\ \ 3 = 0$
»	c^{IV}, c_1'	$\Delta\delta + 0{,}008\,\xi + 0{,}083\,\eta + 0{,}001\,e + 16\ \ 0 = 0$
»	c^{V} , c_1	$\Delta\delta + 0{,}013\,\xi + 0{,}112\,\eta + 0{,}002\,e + 17\ \ 5 = 0$
»	c^{V} , c_1'	$\Delta\delta + 0{,}008\,\xi + 0{,}090\,\eta + 0{,}001\,e + 16\ \ 3 = 0$
»	c^{VI}, c_1	$\Delta\delta + 0{,}013\,\xi + 0{,}118\,\eta + 0{,}002\,e + 17\ \ 3 = 0$
»	c^{VI}, c_1'	$\Delta\delta + 0{,}008\,\xi + 0{,}096\,\eta + 0{,}001\,e + 16\ \ 0 = 0$
Arturo	d , d_1	$\Delta\delta - 0{,}010\,\xi - 0{,}063\,\eta - 0{,}002\,e + 16\ \ 3 = 0$
»	d , d_1'	$\Delta\delta - 0{,}011\,\xi - 0{,}085\,\eta - 0{,}003\,e + 16\ \ 3 = 0$
»	d' , d_1	$\Delta\delta - 0{,}006\,\xi - 0{,}041\,\eta - 0{,}001\,e + 16\ \ 3 = 0$
»	d' , d_1'	$\Delta\delta - 0{,}007\,\xi - 0{,}064\,\eta - 0{,}002\,e + 16\ \ 3 = 0$
Polare	e , e_1	$\Delta\delta - 0{,}005\,\xi + 0{,}029\,\eta + 0{,}003\,e + 17\ \ 5 = 0$

Dalla [4'].

B.

Giove	a ,	a_1	$-0{,}917\,\xi$	$-0{,}394\,\eta$	$-0{,}531\,e$	$+\frac{35{,}784}{1000000}$	(i^2+c^2)	$+\frac{299{,}574}{1000000}$	ic	$-18',3$	$=0$
Regolo	b ,	b_1	$-0{,}914\,\xi$	$-0{,}401\,\eta$	$-0{,}550\,e$	$+\frac{32{,}310}{1000000}$	(i^2+c^2)	$+\frac{297{,}978}{1000000}$	ic	$-18{,}8$	$=0$
Spica	c ,	c_1	$-0{,}985\,\xi$	$+0{,}164\,\eta$	$-0{,}822\,e$	$-\frac{27{,}156}{1000000}$	(i^2-c^2)	$+\frac{290{,}886}{1000000}$	ic	$-10{,}5$	$=0$
»	c ,	c_1'	$-0{,}989\,\xi$	$+0{,}142\,\eta$	$-0{,}823\,e$	»	»	+	»	$-11{,}7$	$=0$
»	c' ,	c_1	$-0{,}986\,\xi$	$+0{,}152\,\eta$	$-0{,}822\,e$	»	»	+	»	$-10{,}5$	$=0$
»	c' ,	c_1'	$-0{,}990\,\xi$	$+0{,}130\,\eta$	$-0{,}823\,e$	»	»	+	»	$-11{,}7$	$=0$
»	c'' ,	c_1	$-0{,}986\,\xi$	$+0{,}142\,\eta$	$-0{,}822\,e$	»	»	+	»	$-10{,}5$	$=0$
»	c'' ,	c_1'	$-0{,}991\,\xi$	$+0{,}130\,\eta$	$-0{,}823\,e$	»	»	+	»	$-11{,}7$	$=0$
»	c''' ,	c_1	$-0{,}987\,\xi$	$+0{,}135\,\eta$	$-0{,}823\,e$	»	»	+	»	$-11{,}0$	$=0$
»	c''' ,	c_1'	$-0{,}991\,\xi$	$+0{,}113\,\eta$	$-0{,}823\,e$	»	»	+	»	$-12{,}2$	$=0$
»	c^{IV} ,	c_1	$-0{,}987\,\xi$	$+0{,}121\,\eta$	$-0{,}822\,e$	»	»	+	«	$-11{,}0$	$=0$
»	c^{IV} ,	c_1'	$-0{,}992\,\xi$	$+0{,}099\,\eta$	$-0{,}823\,e$	»	»	+	»	$-10{,}2$	$=0$
»	c^{V} ,	c_1	$-0{,}987\,\xi$	$+0{,}114\,\eta$	$-0{,}822\,e$	»	»	+	»	$-11{,}2$	$=0$
»	c^{V} ,	c_1'	$-0{,}992\,\xi$	$+0{,}092\,\eta$	$-0{,}823\,e$	»	»	+	»	$-12{,}5$	$=0$
»	c^{VI} ,	c_1	$-0{,}987\,\xi$	$+0{,}107\,\eta$	$-0{,}822\,e$	»	»	+	»	$-11{,}0$	$=0$
»	c^{VI} ,	c_1'	$-0{,}992\,\xi$	$+0{,}085\,\eta$	$-0{,}823\,e$	»	»	+	»	$-10{,}2$	$=0$
Arturo	d ,	d_1	$-0{,}986\,\xi$	$+0{,}155\,\eta$	$-0{,}293\,e$	$+\frac{52{,}308}{1000000}$	(i^2+c^2)	$+\frac{389{,}172}{1000000}$	ic	$-13{,}2$	$=0$
»	d ,	d_1'	$-0{,}988\,\xi$	$+0{,}132\,\eta$	$-0{,}292\,e$	»	»	+	»	$-13{,}2$	$=0$
»	d' ,	d_1	$-0{,}990\,\xi$	$+0{,}133\,\eta$	$-0{,}291\,e$	»	»	+	»	$-13{,}2$	$=0$
»	d' ,	d_1'	$-0{,}992\,\xi$	$+0{,}110\,\eta$	$-0{,}301\,e$	»	»	+	»	$-13{,}2$	$=0$
Polare	e ,	e_1	$+0{,}986\,\xi$	$+0{,}162\,\eta$	$-0{,}691\,e$	$+\frac{6076{,}446}{1000000}$	(i^2+c^2)	$+\frac{12756{,}474}{1000000}$	ic	$-16{,}9$	$=0$

Dalle [5′].

C.

Giove	a	,	a_1	$\Delta\tau$	$-0{,}097\,\xi$	$+$	$0{,}226\,\eta$	$+0{,}287\,e$	$+0{,}017\,\varepsilon$	$-$	$8',4$	$=$	0
Regolo	b	,	b_1	$\Delta\tau$	$-0{,}089\,\xi$	$+$	$0{,}207\,\eta$	$+0{,}290\,e$	$+0{,}017\,\varepsilon$	$-$	$9{,}3$	$=$	0
Spica	c	,	c_1	$\Delta\tau$	$-0{,}030\,\xi$	$-$	$0{,}184\,\eta$	$-0{,}116\,e$	$+0{,}007\,\varepsilon$	$-$	$14{,}6$	$=$	0
»	c	,	c_1'	$\Delta\tau$	$-0{,}026\,\xi$	$-$	$0{,}181\,\eta$	$-0{,}101\,e$	$+0{,}004\,\varepsilon$	$-$	$13{,}9$	$=$	0
»	c'	,	c_1	$\Delta\tau$	$-0{,}028\,\xi$	$-$	$0{,}184\,\eta$	$-0{,}109\,e$	$+0{,}008\,\varepsilon$	$-$	$15{,}1$	$=$	0
»	c'	,	c_1'	$\Delta\tau$	$-0{,}024\,\xi$	$-$	$0{,}185\,\eta$	$-0{,}094\,e$	$+0{,}010\,\varepsilon$	$-$	$14{,}4$	$=$	0
»	c''	,	c_1	$\Delta\tau$	$-0{,}026\,\xi$	$-$	$0{,}184\,\eta$	$-0{,}102\,e$	$+0{,}008\,\varepsilon$	$-$	$15{,}0$	$=$	0
»	c''	,	c_1'	$\Delta\tau$	$-0{,}024\,\xi$	$-$	$0{,}183\,\eta$	$-0{,}093\,e$	$+0{,}011\,\varepsilon$	$-$	$14{,}3$	$=$	0
»	c'''	,	c_1	$\Delta\tau$	$-0{,}025\,\xi$	$-$	$0{,}184\,\eta$	$-0{,}095\,e$	$+0{,}009\,\varepsilon$	$-$	$15{,}0$	$=$	0
»	c'''	,	c_1'	$\Delta\tau$	$-0{,}021\,\xi$	$-$	$0{,}183\,\eta$	$-0{,}081\,e$	$+0{,}006\,\varepsilon$	$-$	$14{,}3$	$=$	0
»	c^{IV}	,	c_1	$\Delta\tau$	$-0{,}023\,\xi$	$-$	$0{,}184\,\eta$	$-0{,}087\,e$	$+0{,}009\,\varepsilon$	$-$	$15{,}0$	$=$	0
»	c^{IV}	,	c_1'	$\Delta\tau$	$-0{,}018\,\xi$	$-$	$0{,}185\,\eta$	$-0{,}072\,e$	$+0{,}006\,\varepsilon$	$-$	$14{,}3$	$=$	0
»	c^{V}	,	c_1	$\Delta\tau$	$-0{,}043\,\xi$	$-$	$0{,}184\,\eta$	$-0{,}164\,e$	$+0{,}009\,\varepsilon$	$-$	$15{,}7$	$=$	0
»	c^{V}	,	c_1'	$\Delta\tau$	$-0{,}034\,\xi$	$-$	$0{,}185\,\eta$	$-0{,}132\,e$	$+0{,}006\,\varepsilon$	$-$	$15{,}1$	$=$	0
»	c^{VI}	,	c_1	$\Delta\tau$	$-0{,}040\,\xi$	$-$	$0{,}184\,\eta$	$-0{,}154\,e$	$+0{,}009\,\varepsilon$	$-$	$14{,}7$	$=$	0
»	c^{VI}	,	c_1'	$\Delta\tau$	$-0{,}032\,\xi$	$-$	$0{,}185\,\eta$	$-0{,}123\,e$	$+0{,}006\,\varepsilon$	$-$	$14{,}1$	$=$	0
Arturo	d	,	d_1	$\Delta\tau$	$+0{,}054\,\xi$	$+$	$0{,}355\,\eta$	$-0{,}141\,e$	$-0{,}007\,\varepsilon$	$-$	$3{,}7$	$=$	0
»	d	,	d_1'	$\Delta\tau$	$+0{,}047\,\xi$	$+$	$0{,}355\,\eta$	$-0{,}125\,e$	$-0{,}008\,\varepsilon$	$-$	$4{,}6$	$=$	0
»	d'	,	d_1	$\Delta\tau$	$+0{,}048\,\xi$	$+$	$0{,}356\,\eta$	$-0{,}126\,e$	$-0{,}004\,\varepsilon$	$-$	$4{,}4$	$=$	0
»	d'	,	d_1'	$\Delta\tau$	$+0{,}040\,\xi$	$+$	$0{,}357\,\eta$	$-0{,}104\,e$	$-0{,}005\,\varepsilon$	$-$	$5{,}3$	$=$	0
Polare	e	,	e_1	$\Delta\tau$	$+7{,}083\,\xi$	$-$	$43{,}244\,\eta$	$-5{,}003\,e$	$-0{,}003\,\varepsilon$	$-$	$787{,}4$	$=$	0

Dalle [6′].

D.

Giove	a	,	a_1	$-0{,}014\,\xi$	$-0{,}006\,\eta$	$+0{,}040\,e$	$-0{,}821\,\varepsilon$	$+$	$0{,}246\,i$	$+$	$1{,}030\,c$	$-$	$3',7$	$=$	0
Regolo	b	,	b_1	$-0{,}013\,\xi$	$-0{,}006\,\eta$	$+0{,}042\,e$	$-0{,}798\,\varepsilon$	$+$	$0{,}217\,i$	$+$	$1{,}024\,c$	$-$	$4{,}1$	$=$	0
Spica	c	,	c_1	$-0{,}012\,\xi$	$+0{,}002\,\eta$	$-0{,}045\,e$	$-0{,}562\,\varepsilon$	$-$	$0{,}186\,i$	$+$	$1{,}017\,c$	$-$	$4{,}9$	$=$	0
»	c	,	c_1'	$-0{,}007\,\xi$	$+0{,}001\,\eta$	$-0{,}029\,e$	$-0{,}566\,\varepsilon$	$-$	»	$+$	»	$-$	$4{,}2$	$=$	0
»	c'	,	c_1	$-0{,}013\,\xi$	$+0{,}001\,\eta$	$-0{,}052\,e$	$-0{,}563\,\varepsilon$	$-$	»	$+$	»	$-$	$4{,}4$	$=$	0
»	c'	,	c_1'	$-0{,}010\,\xi$	$+0{,}001\,\eta$	$-0{,}037\,e$	$-0{,}566\,\varepsilon$	$-$	»	$+$	»	$-$	$3{,}7$	$=$	0
»	c''	,	c_1	$-0{,}016\,\xi$	$+0{,}002\,\eta$	$-0{,}060\,e$	$-0{,}563\,\varepsilon$	$-$	»	$+$	»	$-$	$4{,}5$	$=$	0
»	c''	,	c_1'	$-0{,}012\,\xi$	$+0{,}001\,\eta$	$-0{,}044\,e$	$-0{,}567\,\varepsilon$	$-$	»	$+$	»	$-$	$3{,}8$	$=$	0
»	c'''	,	c_1	$-0{,}017\,\xi$	$+0{,}002\,\eta$	$-0{,}065\,e$	$-0{,}564\,\varepsilon$	$-$	»	$+$	»	$-$	$4{,}5$	$=$	0
»	c'''	,	c_1'	$-0{,}012\,\xi$	$+0{,}001\,\eta$	$-0{,}047\,e$	$-0{,}567\,\varepsilon$	$-$	»	$+$	»	$-$	$3{,}8$	$=$	0
»	c^{IV}	,	c_1	$-0{,}020\,\xi$	$+0{,}002\,\eta$	$-0{,}075\,e$	$-0{,}564\,\varepsilon$	$-$	»	$+$	»	$-$	$4{,}5$	$=$	0
»	c^{IV}	,	c_1'	$-0{,}015\,\xi$	$+0{,}002\,\eta$	$-0{,}059\,e$	$-0{,}567\,\varepsilon$	$-$	»	$+$	»	$-$	$3{,}8$	$=$	0
»	c^{V}	,	c_1	$-0{,}021\,\xi$	$+0{,}002\,\eta$	$-0{,}081\,e$	$-0{,}564\,\varepsilon$	$-$	»	$+$	»	$-$	$3{,}7$	$=$	0
»	c^{V}	,	c_1'	$-0{,}017\,\xi$	$+0{,}002\,\eta$	$-0{,}064\,e$	$-0{,}567\,\varepsilon$	$-$	»	$+$	»	$-$	$3{,}1$	$=$	0
»	c^{VI}	,	c_1	$-0{,}022\,\xi$	$+0{,}002\,\eta$	$-0{,}085\,e$	$-0{,}564\,\varepsilon$	$-$	»	$+$	»	$-$	$4{,}7$	$=$	0
»	c^{VI}	,	c_1'	$-0{,}018\,\xi$	$+0{,}001\,\eta$	$-0{,}069\,e$	$-0{,}567\,\varepsilon$	$-$	»	$+$	»	$-$	$4{,}1$	$=$	0
Arturo	d	,	d_1	$-0{,}024\,\xi$	$+0{,}004\,\eta$	$+0{,}051\,e$	$-0{,}950\,\varepsilon$	$+$	$0{,}360\,i$	$+$	$1{,}063\,c$	$-$	$2{,}3$	$=$	0
»	d	,	d_1'	$-0{,}030\,\xi$	$+0{,}004\,\eta$	$+0{,}063\,e$	$-0{,}951\,\varepsilon$	$+$	»	$+$	»	$-$	$3{,}2$	$=$	0
»	d'	,	d_1	$-0{,}015\,\xi$	$+0{,}002\,\eta$	$+0{,}031\,e$	$-0{,}953\,\varepsilon$	$+$	»	$+$	»	$-$	$1{,}6$	$=$	0
»	d'	,	d_1'	$-0{,}023\,\xi$	$+0{,}003\,\eta$	$+0{,}048\,e$	$-0{,}954\,\varepsilon$	$+$	»	$+$	»	$-$	$2{,}5$	$=$	0
Polare	e	,	e_1	$+1{,}271\,\xi$	$+0{,}206\,\eta$	$-0{,}898\,e$	$-2{,}421\,\varepsilon$	$+$	$43{,}841\,i$	$+$	$43{,}853\,c$	$-$	$55{,}6$	$=$	0

Dalle [1] e [2].

E.

Regolo 4 Maggio.....
$$\begin{cases} \Delta\delta + 0{,}610\,\xi + 0{,}792\,\eta + 0{,}596\,e - \frac{51{,}534}{1000000}\,(i^2+c^2) - \frac{297{,}954}{1000000}\,ic + 33' = 0 \\ \Delta\tau - 0{,}176\,\xi + 0{,}136\,\eta + 0{,}573\,e + 0{,}588\,\varepsilon - 0{,}222\,i - 1{,}024\,c - 6{,}6 = 0 \end{cases}$$

Sole .....
$$\begin{cases} \Delta\delta + 0{,}858\,\xi + 0{,}460\,\eta + 0{,}485\,e - \frac{45{,}858}{1000000}\,(i^2+c^2) - \frac{304{,}998}{1000000}\,ic + 34' = 0 \\ \Delta\tau - 0{,}145\,\xi + 0{,}280\,\eta + 0{,}340\,e + 0{,}850\,\varepsilon - 0{,}315\,i - 1{,}049\,c - 4{,}0 = 0 \end{cases}$$

β G. Orsa .....
$$\begin{cases} \Delta\delta + 0{,}804\,\xi + 0{,}555\,\eta - 0{,}092\,e - \frac{223{,}962}{1000000}\,(i^2+c^2) - \frac{534{,}102}{1000000}\,ic + 36' = 0 \\ \Delta\tau - 0{,}915\,\xi + 1{,}238\,\eta + 0{,}771\,e + 1{,}625\,\varepsilon - 1{,}540\,i - 1{,}836\,c - 3{,}5 = 0 \end{cases}$$

α G. Orsa .....
$$\begin{cases} \Delta\delta + 0{,}785\,\xi + 0{,}620\,\eta - 0{,}163\,e - \frac{277{,}812}{1000000}\,(i^2+c^2) - \frac{627{,}038}{1000000}\,ic + 37' = 0 \\ \Delta\tau - 0{,}185\,\xi + 1{,}351\,\eta + 0{,}943\,e + 1{,}850\,\varepsilon - 1{,}910\,i - 2{,}153\,c - 5{,}7 = 0 \end{cases}$$

La piccolezza dei coefficienti di ξ, η, e rispetto a quello di $\Delta\delta$, nelle A, fa sì che il medio dei termini noti in queste equazioni, deve differire di poco dal valore numerico di $\Delta\delta$, la quale per conseguenza è prossimamente eguale a $-16',4$.

Introducendo questo valore nelle E si ottengono quattro equazioni da aggiungersi alle B per il calcolo di ξ, η ed e; trascurando i termini di secondo ordine in i e c. Si ottiene così il seguente gruppo B' di 25 equazioni di condizione che, trattate col metodo dei minimi quadrati, mi hanno dato i risultamenti che pongo in appresso.

B'.

Equazioni di condizione.

$$
\begin{aligned}
-\ 0{,}917\ \xi - 0{,}394\ \eta - 0{,}531\ e - 18',3 &= 0\\
-\ 0{,}914\ \xi - 0{,}401\ \eta - 0{,}550\ e - 18\ ,8 &= 0\\
-\ 0{,}985\ \xi + 0{,}164\ \eta - 0{,}822\ e - 10\ ,5 &= 0\\
-\ 0{,}989\ \xi + 0{,}142\ \eta - 0{,}823\ e - 11\ ,7 &= 0\\
-\ 0{,}986\ \xi + 0{,}152\ \eta - 0{,}822\ e - 10\ ,5 &= 0\\
-\ 0{,}990\ \xi + 0{,}130\ \eta - 0{,}823\ e - 11\ ,7 &= 0\\
-\ 0{,}986\ \xi + 0{,}142\ \eta - 0{,}822\ e - 10\ ,5 &= 0\\
-\ 0{,}991\ \xi + 0{,}130\ \eta - 0{,}823\ e - 11\ ,7 &= 0\\
-\ 0{,}987\ \xi + 0{,}135\ \eta - 0{,}823\ e - 11\ ,0 &= 0\\
-\ 0{,}991\ \xi + 0{,}113\ \eta - 0{,}823\ e - 12\ ,2 &= 0\\
-\ 0{,}987\ \xi + 0{,}121\ \eta - 0{,}822\ e - 11\ ,0 &= 0\\
-\ 0{,}992\ \xi + 0{,}099\ \eta - 0{,}823\ e - 10\ ,2 &= 0\\
-\ 0{,}987\ \xi + 0{,}114\ \eta - 0{,}822\ e - 11\ ,2 &= 0\\
-\ 0{,}992\ \xi + 0{,}092\ \eta - 0{,}823\ e - 12\ ,5 &= 0\\
-\ 0{,}987\ \xi + 0{,}107\ \eta - 0{,}822\ e - 11\ ,0 &= 0\\
-\ 0{,}992\ \xi + 0{,}085\ \eta - 0{,}823\ e - 10\ ,2 &= 0\\
-\ 0{,}986\ \xi + 0{,}155\ \eta - 0{,}293\ e - 13\ ,2 &= 0\\
-\ 0{,}988\ \xi + 0{,}132\ \eta - 0{,}292\ e - 13\ ,2 &= 0\\
-\ 0{,}990\ \xi + 0{,}133\ \eta - 0{,}291\ e - 13\ ,2 &= 0\\
-\ 0{,}992\ \xi + 0{,}110\ \eta - 0{,}301\ e - 13\ ,2 &= 0\\
+\ 0{,}986\ \xi + 0{,}162\ \eta - 0{,}691\ e - 16\ ,9 &= 0\\
+\ 0{,}610\ \xi + 0{,}792\ \eta + 0{,}596\ e + 16\ ,6 &= 0\\
+\ 0{,}858\ \xi + 0{,}460\ \eta + 0{,}485\ e + 17\ ,6 &= 0\\
+\ 0{,}804\ \xi + 0{,}555\ \eta - 0{,}092\ e + 19\ ,6 &= 0\\
+\ 0{,}785\ \xi + 0{,}620\ \eta - 0{,}163\ e + 20\ ,6 &= 0
\end{aligned}
$$

Equazioni normali.

$$
\begin{aligned}
22{,}618\ \xi + 0{,}468\ \eta + 13{,}426\ e + 280{,}83 &= 0\\
0{,}468\ \xi + 2{,}165\ \eta - 0{,}715\ e + 30{,}72 &= 0\\
13{,}426\ \xi - 0{,}715\ \eta + 11{,}507\ e + 188{,}78 &= 0
\end{aligned}
$$

Segue **B'**.

LOGARITMI DELLE ESPRESSIONI SIMBOLICHE.

$[a\,a]$	1,35445				
$[a\,b]$	9,67025				
$[a\,c]$	1,12795				
$[a\,n]$	2,44844				
$[b\,b]$	0,33546	$[bb, 1]$	0,33351		
$[b\,c]$	n 9,85431	$[bc, 1]$	n 9,98587		
$[b\,n]$	1,48742	$[bn, 1]$	1,39636		
$[c\,c]$	1,06096	$[cc, 1]$	0,54865	$[cc, 2]$	0,48882
$[c\,n]$	2,27596	$[cn, 1]$	1,34400	$[cn, 2]$	1,52540

B'' 9,66236 ; $A'\,n$ 8,31580 , $A''\,n$ 9,78040.

INCOGNITE.

$$e = -10',9$$
$$\eta = -16\,,6$$
$$\xi = -\ \ 5\,,6\ .$$

Ponendo questi valori nelle C ed omettendo nelle medesime il termine in ε, il cui coefficiente è molto piccolo in tutte, ricavasi dal medio dei termini noti che risultano il valore approssimato:

$$\Delta\tau = 12',6\,.$$

Sostituendo questo valore nelle E si ottengono quattro equazioni del tipo delle D, aggiunte alle quali ed introdotti i precedenti valori di ξ, η ed e, nasce il gruppo D' che segue di 25 equazioni in ε, i e c dal quale dedussi col metodo dei minimi quadrati i risultamenti messi dopo.

D'.

Equazioni di condizione.

$$
\begin{array}{rrrr}
-0{,}821\,\varepsilon & +\ 0{,}246\,i & +\ 1{,}030\,c & -\ 4{,}0 = 0 \\
-0{,}798\,\varepsilon & +\ 0{,}217\,i & +\ 1{,}024\,c & -\ 4{,}4 = 0 \\
-0{,}562\,\varepsilon & -\ 0{,}186\,i & +\ 1{,}017\,c & -\ 4{,}4 = 0 \\
-0{,}566\,\varepsilon & -\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 3{,}9 = 0 \\
-0{,}563\,\varepsilon & -\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 3{,}8 = 0 \\
-0{,}566\,\varepsilon & -\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 3{,}3 = 0 \\
-0{,}563\,\varepsilon & -\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 3{,}8 = 0 \\
-0{,}567\,\varepsilon & -\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 3{,}3 = 5 \\
-0{,}564\,\varepsilon & -\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 3{,}7 = 0 \\
-0{,}567\,\varepsilon & -\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 3{,}2 = 0 \\
-0{,}564\,\varepsilon & -\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 3{,}7 = 0 \\
-0{,}567\,\varepsilon & -\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 3{,}1 = 0 \\
-0{,}564\,\varepsilon & -\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 2{,}7 = 0 \\
-0{,}567\,\varepsilon & -\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 2{,}3 = 0 \\
-0{,}564\,\varepsilon & -\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 3{,}7 = 0 \\
-0{,}567\,\varepsilon & -\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 3{,}3 = 0 \\
-0{,}950\,\varepsilon & +\ 0{,}360\,i & +\ 1{,}063\,c & -\ 2{,}8 = 0 \\
-0{,}951\,\varepsilon & +\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 3{,}8 = 0 \\
-0{,}953\,\varepsilon & +\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 1{,}9 = 0 \\
-0{,}954\,\varepsilon & +\ \text{»} & +\ \text{»} & -\ 2{,}9 = 0 \\
-2{,}421\,\varepsilon & +\ 43{,}841\,i & +\ 43{,}853\,c & -\ 56{,}3 = 0 \\
+0{,}588\,\varepsilon & -\ 0{,}222\,i & -\ 1{,}024\,c & -\ 1{,}5 = 0 \\
+0{,}850\,\varepsilon & -\ 0{,}315\,i & -\ 1{,}049\,c & +\ 1{,}1 = 0 \\
+1{,}625\,\varepsilon & -\ 1{,}540\,i & -\ 1{,}836\,c & -\ 14{,}8 = 0 \\
+1{,}850\,\varepsilon & -\ 1{,}910\,i & -\ 2{,}153\,c & -\ 19{,}2 = 0
\end{array}
$$

Equazioni normali.

$$
\begin{array}{rrrr}
22{,}399\,\varepsilon & -\ 112{,}848\,i & -\ 128{,}385\,c & +\ 121{,}66 = 0 \\
-112{,}848\,\varepsilon & +\ 1928{,}799\,i & +\ 1929{,}415\,c & -\ 2405{,}88 = 0 \\
-128{,}385\,\varepsilon & +\ 1929{,}415\,i & +\ 1954{,}962\,c & -\ 2469{,}80 = 0
\end{array}
$$

Segue **D'**.

LOGARITMI DELLE ESPRESSIONI SIMBOLICHE.

$[aa]$ 1,35023		
$[ab]$ n 2,05249		
$[ac]$ n 2,10851		
$[an]$ 2,08515		
$[bb]$ 3,28528	$[bb, 1]$ 3,13362	
$[b\ ]$ 3,28542	$[bc, 1]$ 3,13381	
$[bn]$ n 3,38127	$[bn, 1]$ n 3,25358	
$[cc]$ 3,29114	$[cc, 1]$ 3,08592	$[cc, 2]$ n 2,15436
$[cn]$ n 3,39266	$[cn, 1]$ n 3,24854	$[cn, 2]$ 1,33187

B'' n 0,00019 ; A' 0,70226 ; A'' 9,84140.

INCOGNITE.

$$\varepsilon = +1',3$$
$$i = +1,2$$
$$c = +0,2 \ .$$

Il valore definitivo di $\Delta\delta$ si ricava dalle A ed E, tenendo conto dei termini in ξ, η, e ed è $\Delta\delta = -16',6$. Quello di $\Delta\tau$ si ricava dalle C ed E, tenendo conto di tutti i termini ed è $\Delta\tau = +13',9$.

Dalla piccolezza di c ed i risulta che non ho commesso un errore sensibile trascurando i termini di secondo ordine nelle B ed E, ed il piccolo errore di $0',2$ nei termini costanti delle quattro ultime B', proveniente dal valore approssimato di $\Delta\delta$ introdotto nelle E, ha una influenza insignificante sui valori trovati di ξ, η ed e.

I valori definitivi di ε, i, c devono ricavarsi dalle D' aggiungendo $1',3$ ai termini costanti delle ultime quattro e questa variazione non altera sensibilmente i risultamenti ottenuti.

Le costanti che mi risultarono per l'equatoriale da tutte le osservazioni che ho fatto sono adunque:

$$\Delta\delta = -16',6\,; \quad \Delta\tau = +55\,,6\,; \quad \xi = -5',6\,; \quad \eta = -16',6$$

$$e = -10',9\,; \quad \varepsilon = +\ 1',3\,; \quad i = +1',2\,; \quad c = +\ 0',2$$

essendo $1'$ l'indicazione minima dei due nonii del circolo di declinazione e 5^s l'indicazione minima dei due nonii del circolo orario.

Torino, 8 Giugno 1886.

SULLO

INVERTIMENTO SPONTANEO DEL SACCAROSO

E SULLA

ANALISI DEI PRODOTTI INDUSTRIALI

PREPARATI CON ZUCCHERO DI CANNA E DI FECOLA

del Prof. Ermenegildo Rotondi

Richiesto in diverse occasioni d'analisi di prodotti che si esportano all'estero, ed ammessi alla restituzione della tassa sullo zucchero, ebbi a riconoscere le difficoltà che si incontrano in simili ricerche, specialmente quando si tratta di determinare la quantità di saccaroso in una sostanza preparata con zucchero di canna e di fecola, dovendosi in questi casi valutare non soltanto il saccaroso esistente all'epoca dell'analisi, ma anche quello corrispondente allo zucchero che subì l'invertimento spontaneo. Sembrandomi di qualche interesse la conoscenza di alcuni dati pratici relativi all'invertimento dello zucchero, mi decisi a completare alcune esperienze già intraprese da qualche anno.

È noto, che la quantità di destroso e levuloso contenuto nello zucchero invertito, può variare a seconda del metodo seguito per la sua preparazione, e che l'analisi delle sostanze zuccherine ammesse alla concessione del Drawback, si eseguisce ordinariamente mediante i processi di saccarimetria ottica e chimica, ammettendosi nei calcoli che lo zucchero invertito risulti di quantità eguali di destroso e levuloso, e che il destroso che si trova in più del levuloso, provenga dall'aggiunta di zucchero di fecola.

Uno degli scopi delle esperienze fatte, fu quello di stabilire il rapporto fra la quantità di destroso e levuloso contenuto nello

zucchero invertito, preparato con acidi minerali nelle condizioni qui in seguito indicate.

Con zucchero di canna al titolo del 99,65 p. % si fecero soluzioni acquose di concentrazione variabile dall'8 al 18 p. % circa, e si trattarono con $^1/_{10}$ del loro volume di acido cloridrico della densità di 1,12, oppure con l'1 p. % di acido solforico monoidrato. Nel primo caso si riscaldarono le dette soluzioni per dieci minuti alla temperatura di 60-65 gradi centigradi, e nel secondo si elevò a 70-75. Subito dopo l'invertimento si analizzarono le soluzioni ottenute a mezzo di un polarimetro a penombra di Laurent (1), e del liquido cupro-potassico di Fehling. I risultati avuti furono i seguenti:

LIQUIDO ANALIZZATO	Zuccheri riduttori in 100 cc.	Gradi Laurent Temp. = 15	Destroso in 100 cc.	Levuloso in 100 cc.	Rapporto fra la quantità di destroso e levuloso
Zucchero invertito con SO_4H_2	17.24	— 7.4	8.85	8.35	1.05
» » » »	8.61	— 3.6	4.45	4.16	1.07
» » » »	10.19	— 4.1	5.32	4.87	1.09
» » » HCl	17.24	— 7.1	8.96	8.28	1.08
» » » »	8.61	— 3.8	4.39	4.22	1.04
» » » »	10.19	— 4.6	5.16	5.03	1.02

Dai risultati esposti in questa tabella si rileva, che il rapporto fra la quantità di destroso e levuloso contenuto nello zucchero invertito cogli acidi solforico o cloridrico alle indicate temperature varia da 1,02 a 1,09. Siccome il levuloso può fornire destroso in presenza degli acidi, è evidente che i detti rapporti sono soltanto ammissibili per il saccaroso invertito nel modo con cui si eseguirono le esperienze, e che le stesse, non appoggiano nè impugnano quelle di coloro che ritengono lo zucchero invertito formato di parti eguali di destroso e levuloso.

(1) Tutti i dati relativi al polarimetro Laurent di cui è cenno nella presente nota sono riferiti ad uno strato liquido di 200 millimetri e nei calcoli si adottò per il potere rotatorio specifico del saccaroso $[\alpha]d = 66,50$, per quello del destroso $[\alpha]d = 52,85$ e per il levuloso $[\alpha]d = -100$ alla temperatura di 15° gradi centigradi.

Di quest'avviso sono il Bourquelot (1) e Ed. Lippmann (2), il quale recentemente studiò lo zucchero invertito preparato con acido carbonico.

Altre esperienze ebbero per scopo di determinare il rapporto fra i zuccheri riduttori esistenti nello zucchero invertito, ottenuto dall'azione degli acidi fatti agire nel modo superiormente indicato, sopra zucchero di canna che aveva subìto un parziale invertimento spontaneo. È questo il caso che ordinariamente si presenta nella pratica, quando si deve determinare la quantità di saccaroso impiegato unitamente a zucchero di fecola nella preparazione industriale delle sostanze zuccherine. Per tali ricerche feci uso di pesche sciroppate inviatemi per analisi dal Ministero d'Agricoltura, state confezionate con zucchero di canna dalla Ditta F. Cirio, e conservate in scatole di latta chiuse con opportuna saldatura. Un tale prodotto lo ritenni opportuno per le mie ricerche attesa la piccolissima acidità del medesimo, e l'assenza di fermenti per il modo speciale di loro preparazione. L'analisi eseguita l'otto dicembre del 1883 diede i seguenti risultati:

SOSTANZA ANALIZZATA	Saccaroso p. °/₀	Destroso p. °/₀	Levuloso p. °/₀	Rapporto fra destroso e levuloso
Sciroppo	35.77	7.99	6.78	1.17
Pesche sgocciolate	27.92	7.15	6.73	1.06

Una scatola di dette pesche si analizzò ai primi di febbraio del 1886, dopo d'averla lasciata per ventisei mesi in un cortile esposta agli agenti atmosferici. I risultati ottenuti furono i seguenti:

SOSTANZA ANALIZZATA	Saccaroso p. °/₀	Destroso p. °/₀	Levuloso p. °/₀	Rapporto fra destroso e levuloso
Sciroppo	19.51	17.03	14.33	1.18
Pesche sgocciolate	14.79	14.45	12.98	1.11

Da questi risultati si rileva che il saccaroso ha subìto un parziale invertimento spontaneo, e che fornisce, mediante l'in-

(1) *Comptes rendus*, T. 101, p. 69.
(2) *Berichte der deutsch. chemis. gesellsch.*, T. 13, p. 1822.

vertimento acido applicato nel modo precedentemente indicato una quantità di destroso di poco superiore a quella che si trova nello zucchero di canna direttamente invertito cogli acidi. Questo fatto trova spiegazione in alcune esperienze di Maumené (1), il quale è d'avviso che il levuloso può in alcune condizioni essere trasformato in destroso anche per la semplice azione del tempo.

Relativamente alle cose dette, può avere qualche interesse la conoscenza delle seguenti analisi eseguite sopra alcuni campioni di cedri e scorze di limone candite:

CAMPIONE ANALIZZATO	Saccaroso p. °/₀	Destroso p. °/₀	Levuloso p. °/₀	Rapporto fra destroso e levuloso
Cedri canditi (*a*)	41.07	9.71	10.57	0.92
» » (*b*)	30.76	20.21	12.96	1.56
» »	41.64	12.90	12.19	1.05
» »	39.17	8.54	7.81	1.09
» »	51.59	7.56	7.34	1.03
» »	36.12	11.06	9.70	1.14
» »	33.15	12.98	11.66	1.11
Scorze di limone candite . .	38.61	12.08	10.74	1.12
» » » . .	44.93	9.70	9.03	1.07
» » » . .	48.51	10.28	8.84	1.16

Nel complesso queste analisi provano che il destroso si trova nello zucchero invertito, proveniente da saccaroso che ha subìto un parziale invertimento spontaneo, in quantità più grande del levuloso.

Il campione (*b*), si deve ritenere preparato con zucchero di canna e di fecola, e la maggiore quantità di levuloso in confronto del destroso contenuto nel campione (*a*), si deve attribuire ad una quantità predominante di levuloso naturalmente esistente nel frutto prima di condirlo, e non eliminato nelle operazioni preparatorie. Questa deduzione trova appoggio nei fenomeni relativi all'appassimento dell'uva, di cui diremo in seguito, e negli

(1) *Comptes rendus*, T. 101, p. 695.

studi di Berthelot e Buignet (1) relativi alla formazione dello zucchero nei frutti.

Altre ricerche ebbero per scopo di determinare il tempo richiesto per l'invertimento spontaneo del saccaroso, e il rapporto fra la quantità di destroso e levuloso contenuto nello zucchero invertito, preparato con zucchero di canna che ha subìto un parziale invertimento spontaneo in una soluzione alcoolica avente la composizione:

Zucchero di canna	15 p. %
Alcool in volume	15 »
Acido tartarico	0,5 »

Detto liquido si conservò in vaso di vetro bianco, e le analisi eseguite sopra il medesimo in epoche diverse, dopo trattato convenientemente con acetato basico di piombo, diedero i seguenti risultati:

EPOCA DELL'ANALISI	Gradi Laurent del liquido		Zuccheri riduttori in 100 cc. del liquido		Destroso in 100 cc.	Levuloso in 100 cc.	Rapporto fra il destroso e levuloso	Saccaroso in 100 cc. dedotto dalle osservazioni polarimetriche
	Naturale temp. = 15	Invertito con *HCl* temp. = 15	Naturale	Invertito con *HCl*				
19 Marzo 1885	+19.5	.....	traccie	15.21	—	—	—	14.62
15 Aprile .... »	17.2							
12 Maggio ... »	15.9							
15 Giugno ... »	14.7							
21 Settembre. »	8.3							
29 Ottobre ... »	3.2							
16 Novembre. »	1.1							
10 Dicembre . »	0.2							
5 Gennaio .. 1886	0.0	— 7.2	11.41	15.23	5.74	5.67	1.01	3.96
1 Marzo .... »	— 0.2	— 6.4	11.76	15.—	6.13	5.63	1.09	3.45
26 » .... »	— 1.0	— 5.9	11.90	14.95	6.26	5.64	1.11	2.74
15 Aprile .... »	— 1.0	— 6.0	11.95	14.87	6.27	5.68	1.10	2.80
10 Maggio ... »	— 1.7	— 5.7	12.60	15.04	6.70	5.90	1.13	2.25
1 Giugno ... »	— 2.—	— 5.2	12.54	14.96	6.76	5.78	1.16	1.80

Questi risultati ci insegnano quali sono le trasformazioni che subisce il saccaroso aggiunto ai liquidi alcoolici, come ad esempio

(1) *Comptes rendus*, T. 51, p. 1094.

nei vermouth, conciati con zucchero di canna, e provano come lo zucchero invertito che si ottiene in questi casi contiene destroso e levuloso in un rapporto di circa 1,10, numero non molto diverso da quello trovato per lo zucchero invertito direttamente e per le pesche sciroppate.

Analoghe esperienze si fecero fino dal 1877 sopra mosto d'uve opportunamente concentrato e conservato per 18 mesi. In questo caso il rapporto fra destroso e levuloso, determinato in epoche diverse, dopo il trattamento con HCI variò fra 1,07 e 1,14.

Dalle cose dette risulta che lo zucchero invertito, preparato mediante l'azione degli acidi minerali fatti agire sopra saccarosio che ha subìto un parziale invertimento spontaneo, contiene destroso e levuloso in un rapporto che varia da 1,10 a 1,15 circa. Un tale fatto si deve avere presente nell'analisi dei prodotti zuccherini ammessi agli effetti della concessione del Drawback, onde dare un giudizio attendibile relativo alla quantità di saccaroso e zucchero di fecola usati nella preparazione di un prodotto industriale.

È però necessario l'osservare come i soli processi saccarimetrici possono in certi casi condurre il chimico a giudizi inesatti e pregiudizievoli all'amministrazione finanziaria.

È infatti noto che i liquidi alcoolici preparati con uve secche, contengono un principio levogiro speciale (1), e che per conseguenza detti liquidi possono contenere dello zucchero di fecola senza che sia svelato dall'analisi saccarimetrica, poichè i principii destrogiri e levogiri potrebbero trovarsi in un rapporto corrispondente a quello dello zucchero invertito. Lo stesso dicasi del mosto d'uva appassita, poichè nei fenomeni dell'appassimento dell'uva, che come è noto sono accompagnati da diminuzione di zuccheri riduttori e dalla formazione d'acidi speciali (2), è il destroso che si decompone a preferenza del levuloso. Infatti da analisi eseguite nel corrente anno sopra uve conservate fino alla metà di aprile e di maggio, si trovò che la sostanza levogira rappresentava circa il doppio della destrogira.

Alle cause di errore nel valutare la quantità di saccarosio

---

(1) Girard, *Documents sur les falsifications.*

(2) Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. V. 4, Pavesi e Rotondi.

stato aggiunto ad un liquido contenente zucchero di fecola, appartengono quelle provenienti dai fenomeni della fermentazione elettiva, osservata dapprima da Dubrunfaut (1) e Neubauer (2), e più recentemente con risultati diversi da Leplay (3), Maumené (4) e Bourquelot (5).

Per istudiare quanto ha rapporto coi fenomeni della fermentazione elettiva dello zucchero invertito, feci la seguente esperienza. Invertii completamente con acido solforico dello zucchero di canna al titolo del 99,65 p. %, ed il liquido ottenuto, dopo saturato con carbonato di bario e filtrato, lo feci fermentare mediante aggiunta di lievito di birra, solfato di ammonio e fosfato di potassio. Detto liquido analizzato in periodi diversi diede la seguente composizione:

	EPOCA DELL' ANALISI	Gradi Laurent Temp. = 15	Zuccheri riduttori in 100 cc.	Destroso in 100 cc.	Levuloso in 100 cc.	Rapporto fra destroso e levuloso
Al principio dell'esperienza	24 Maggio 1886	— 7.4	17.24	8.85	8.39	1.05
	25 » »	— 7.2	14.23	6.95	7.28	0.95
	26 » »	— 8.-	13.88	6.46	7.42	0.87
	28 » »	— 7.1	11.36	5.10	6.26	0.81
	1 Giugno »	— 5.5	5.76	1.95	3.81	0.51
	15 » »	— 0.1	traccie	—	—	—

La fermentazione elettiva dello zucchero invertito risulta evidente da questa tabella, e trova anche conferma nelle analisi eseguite dai professori Comboni e Carpené (6) sopra vermouth conciati con zucchero di canna.

Per valutare quindi la quantità di saccaroso impiegato con zucchero di fecola nella preparazione dei vermouth ed altri consimili prodotti industriali, le sole ricerche saccarimetriche non bastano, ed in alcuni casi è necessario ricorrere ad altre indagini chimiche.

---

(1) *Comptes rendus*, T. 25.
(2) *Zeitsch. für analyt. Chem.*, T. 16.
(3) *Comptes rendus*, T. 101, p. 479.
(4) » » » 100, p. 1505, T. 101, p. 695.
(5) » » » 100, p. 1404, T. 101, p. 68 e 958.
(6) *Rivista di Vilicoltura ed Enologia italiana*, anno 1885, p. 427.

Ricordo come il Neubauer (1), alcuni anni or sono, e recentemente C. Schmitt e Cobenzl (2) provarono che nei prodotti della fermentazione dello zucchero di fecola esiste sempre una sostanza, detta *gallisina*, che ha la proprietà di ridurre il liquido di Fehling, di deviare a destra il piano di polarizzazione della luce polarizzata, e che non precipita coll'acetato basico di piombo.

La ricerca della gallisina non si deve quindi trascurare nell'analisi delle sostanze zuccherine aventi scopo fiscale ed igienico. Tale ricerca si eseguisce direttamente sulla sostanza, o dopo fatta fermentare con acqua e lievito di birra, col metodo indicato nella citata memoria di Schmitt e Cobenzl. Non devesi però dimenticare che la gallisina, quantunque non fermenti in presenza del lievito, pur tuttavia in soluzioni diluite, ed in conseguenza dello svolgimento di mucedine, può essere trasformata in glucoso fermentescibile. È forse questa la ragione per cui in alcuni casi non potei riconoscere, anche facendone la ricerca col metodo di Neubauer (3), la gallisina in liquidi provenienti dalla fermentazione alcoolica, ai quali era stato aggiunto zucchero di fecola, mentre in altri casi potei riconoscerla assai facilmente. La ricerca della gallisina nei liquidi merita quindi d'essere oggetto di nuovi studi.

Dai risultati delle esperienze eseguite si possono trarre le seguenti conclusioni:

1. Mediante i metodi saccarimetrici si può determinare la quantità dei zuccheri di canna e di fecola, impiegati nella preparazione dei prodotti industriali, ammettendo che nell'invertimento acido del saccaroso che ha subìto un parziale invertimento spontaneo, si ottiene un prodotto più ricco in destroso che levuloso, e che il rapporto fra i due zuccheri riduttori sia di 1,10, o tutto al più di 1,15.

2. Nel caso di liquidi zuccherini parzialmente fermentati, o mescolati con mosto d'uve appassite o ad estratti d'uve secche, i metodi saccarimetrici non sempre bastano a far conoscere la presenza dello zucchero di fecola, a causa della grande quantità di levulosio che i medesimi possono contenere.

---

(1) *Zeitsch. für analyt Chem.*, T. 16, p. 201 e T. 17, p. 321.
(2) *Berichte der deutsch. chem. gesellsch.* T. 17, p. 1000.
(3) *Bulletin de la Soc. Chim.*, T. 32, p. 381.

3. Nell'analisi dei liquidi zuccherini ammessi agli effetti della concessione del Drawback, non si dovrà mai trascurare la ricerca della gallisina, poichè la presenza di una tale sostanza ci prova che nella preparazione dei medesimi si fece uso di zucchero di fecola.

Torino. Laboratorio di Chimica Industriale del R. Museo Industriale Italiano.

Giugno 1886.

EFFEMERIDI
DEL SOLE, DELLA LUNA
E
DEI PRINCIPALI PIANETI

CALCOLATE PER TORINO IN TEMPO MEDIO CIVILE DI ROMA

PER L'ANNO 1887

del Prof. Angelo Charrier.

— SOLE —

Gennaio

Giorno del Mese	Tempo medio di Roma: Nascere		Passaggio al meridiano	Tramontare		Declinazione a mezzodì vero	Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h m s	h	m		h	m	s
1	8	0	0 22 46·08	4	46	23° 0′ 44″1 A	18	24	8·90
2	8	0	23 14·29	4	47	22 55 33·1	18	28	5·45
3	8	0	23 42·12	4	48	22 49 54·7	18	32	2·01
4	8	0	24 9·56	4	48	22 43 49·0	18	35	58·56
5	8	1	24 36·55	4	49	22 37 16·3	18	39	55·12
6	8	0	25 3·00	4	50	22 30 16·7	18	43	51·68
7	8	0	25 29·14	4	51	22 22 50·5	18	47	48·24
8	8	0	25 54·67	4	53	22 14 57·9	18	51	44·80
9	7	59	26 19·68	4	54	22 6 39·1	18	55	41·37
10	7	59	26 44·15	4	55	21 57 54·4	18	59	37·93
11	7	58	27 8·03	4	56	21 48 43·9	19	3	34·49
12	7	58	27 31·34	4	58	21 39 8·1	19	7	31·04
13	7	57	27 54·04	4	59	21 29 7·0	19	11	27·60
14	7	57	28 16·11	5	0	21 18 41·0	19	15	24·15
15	7	57	28 37·55	5	1	21 7 50.4	19	19	20·70
16	7	56	28 58·34	5	2	20 56 35·5	19	23	17 25
17	7	55	29 18·45	5	4	20 44 56·7	19	27	13·83
18	7	55	29 37·87	5	5	20 32 54·1	19	31	10·36
19	7	54	29 56·59	5	7	20 20 28·2	19	37	6·92
20	7	53	30 14·59	5	8	20 7 39·2	19	39	3·48
21	7	52	30 31·85	5	10	19 54 27·7	19	43	0 04
22	7	51	30 48·33	5	11	19 40 54·1	19	46	56·60
23	7	51	31 3·95	5	12	19 26 58·3	19	50	52·16
24	7	50	31 19·00	5	13	19 12 41·0	19	54	49 72
25	7	49	31 33·16	5	15	18 58 2·7	19	58	46·28
26	7	49	31 46·50	5	16	18 43 3·5	20	2	42·83
27	7	47	31 59·02	5	17	18 27 44·0	20	6	39·38
28	7	46	32 10·72	5	19	18 12 4·6	20	10	35·93
29	7	46	32 21·59	5	20	18 56 5·5	20	14	32·48
30	7	45	32 31·63	5	21	18 39 46·3	20	18	29·03
31	7	43	32 40·83	5	23	18 23 10·2	20	22	25·58

— SOLE —

Febbraio

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		Passaggio al meridiano			Tramontare		DECLINAZIONE a mezzodì vero			TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h	m	s	h	m				h	m	s
1	7	42	0	32	49·18	5	24	17°	6′	14″7 A	20	26	22·13
2	7	41		32	56·70	5	25	16	49	1·4	20	30	18·69
3	7	40		33	3·37	5	27	16	31	30·5	20	34	15·25
4	7	39		33	9·21	5	28	16	13	42·4	20	38	11·81
5	7	37		33	14·22	5	30	15	55	37·6	20	42	8·37
6	7	36		33	18·40	5	32	15	37	16·5	20	46	4·93
7	7	35		33	21·78	5	33	15	18	39·4	20	50	1·49
8	7	34		33	24·34	5	34	14	59	46·9	20	53	58·04
9	7	32		33	26·10	5	36	14	40	39·2	20	57	54·59
10	7	30		33	27·09	5	37	14	21	16·8	21	1	51·14
11	7	29		33	27·31	5	39	14	1	40·1	21	5	47·69
12	7	27		33	26·78	5	40	13	41	49·5	21	9	44·24
13	7	26		33	25·50	5	41	13	21	45·3	21	13	40·79
14	7	25		33	23·49	5	43	13	1	28·1	21	17	37·34
15	7	23		33	20·78	5	45	12	40	58·2	21	21	33·90
16	7	21		33	17·36	5	46	12	20	15·8	21	25	30·46
17	7	20		33	1323	5	47	11	59	21·4	21	29	27·01
18	7	19		33	8·42	5	49	11	38	15·9	21	33	23·57
19	7	17		33	2·94	5	50	11	16	59·4	21	37	20·13
20	7	15		32	56·79	5	52	10	55	32·1	21	41	16·69
21	7	13		32	50·00	5	53	10	33	54·7	21	45	13·24
22	7	11		32	42·52	5	54	10	12	7·5	21	49	9·79
23	7	10		32	34·48	5	56	9	50	11·1	21	53	6·34
24	7	9		32	25·80	5	57	9	28	5·6	21	57	2·89
25	7	7		32	16·52	5	59	9	5	51·7	22	0	59·43
26	7	5		32	6·65	6	0	8	43	29·7	22	4	55·98
27	7	3		31	56·21	6	1	8	20	59·9	22	8	52·53
28	7	2		31	45·20	6	3	7	58	22.9	22	12	49·08

— SOLE —

Marzo

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		Passaggio al meridiano			Tramontare		DECLINAZIONE a mezzodì vero	TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h	m	s	h	m		h	m	s
1	7	0	0	31	33·66	6	4	7° 35′ 39″1A	22	16	45·63
2	6	58		31	21·57	6	6	7 12 48·9	22	20	42·19
3	6	56		31	8·99	6	7	6 49 52·6	22	24	38·65
4	6	54		30	55·92	6	8	6 26 50·5	22	28	35·31
5	6	53		30	42·36	6	10	6 3 43·3	22	32	31·86
6	6	51		30	28·37	6	11	5 40 31·1	22	36	28·42
7	6	49		30	13·94	6	13	5 17 14·5	22	40	24·97
8	6	47		29	59·10	6	14	4 53 53·8	22	44	21·52
9	6	45		29	43·89	6	15	4 30 29·3	22	48	18·07
10	6	44		29	28·30	6	16	4 7 1·5	22	52	14·62
11	6	42		29	12·40	6	18	3 43 30·5	22	56	11·17
12	6	40		28	56·18	6	19	3 19 56·9	23	0	7·72
13	6	37		28	39·54	6	21	2 56 21·0	23	4	3·27
14	6	35		28	22·93	6	23	2 32 43·0	23	9	0·82
15	6	33		28	5·93	6	23	2 9 3·4	23	11	57·37
16	6	32		27	48·72	6	25	1 45 22·5	23	15	53·93
17	6	30		27	31·31	6	26	1 21 40·7	23	19	50·49
18	6	28		27	13·73	6	28	0 57 58·5	23	23	47·04
19	6	26		26	55·98	6	29	0 34 16·0	23	27	43·60
20	6	25		26	38·11	6	30	0 10 33·7A	23	31	40·15
21	6	23		26	20·10	6	31	6 13 8·1B	23	35	36·70
22	6	21		26	2·00	6	33	0 36 48·7	23	39	33·25
23	6	18		25	43·81	6	34	1 0 28·1	23	43	29·80
24	6	16		25	25·55	6	36	1 24 5·8	23	47	26·34
25	6	15		25	7·24	6	37	1 48 41·5	23	51	22·89
26	6	13		24	48·89	6	38	2 11 34·6	23	55	19·44
27	6	11		24	30·53	6	39	2 34 44·9	23	59	15·99
28	6	9		24	12·17	6	41	2 58 12·2	0	3	12·54
29	6	7		24	53·82	6	42	3 21 36·0	0	7	9·09
30	6	6		23	35·51	6	43	3 44 55·7	0	11	5·65
31	6	4		23	17·25	6	44	4 8 11·3	0	15	2·21

— SOLE —

Aprile

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		TEMPO MEDIO DI ROMA Passaggio al meridiano			TEMPO MEDIO DI ROMA Tramontare		DECLINAZIONE a mezzodì vero			TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h	m	s	h	m				h	m	s
1	6	2	0	22	59·07	6	46	4°	31′	22″2B	0	18	58·77
2	5	59		22	40 97	6	47	4	54	28·2	0	22	55·32
3	5	58		22	22·98	6	47	5	17	28·8	0	26	51·88
4	5	56		22	5·09	6	49	5	40	23·7	0	30	48·43
5	5	54		21	47·38	6	50	6	3	12·6	0	34	44·98
6	5	52		21	29·83	6	51	6	25	55·1	0	38	41·52
7	5	51		21	12·47	6	52	6	48	31·0	0	42	38·07
8	5	49		20	55·32	6	54	7	10	59·8	0	46	34·62
9	5	47		20	38·41	6	55	7	33	21·4	0	50	31·17
10	5	46		20	21·77	6	56	7	55	35·4	0	54	27·72
11	5	44		20	5·41	6	57	8	17	41·4	0	58	24·28
12	5	42		19	49·35	6	59	8	39	39·3	1	2	20·83
13	5	40		19	33·60	7	0	9	1	28·5	1	6	17·39
14	5	38		19	18·20	7	1	9	23	8·9	1	10	13·95
15	5	37		19	3·14	7	2	9	44	40·1	1	14	10·51
16	5	35		18	48·46	7	4	10	6	1·6	1	18	7·06
17	5	33		18	34·16	7	5	10	27	13·4	1	22	3·62
18	5	31		18	20·26	7	7	10	48	14·8	1	26	0·17
19	5	29		18	6·77	7	8	11	9	5·8	1	29	56·71
20	5	28		17	53·70	7	9	11	29	45·6	1	33	53·26
21	5	26		17	41·08	7	10	11	50	14·2	1	37	49·81
22	5	24		17	28·87	7	12	12	10	31·3	1	41	46·36
23	5	23		17	17·12	7	13	12	30	36·4	1	45	42·91
24	5	21		17	5·93	7	14	12	50	29·2	1	49	39·46
25	5	20		16	55·01	7	15	13	10	9·3	1	53	36·01
26	5	18		16	44·66	7	17	13	29	36·6	1	57	32·57
27	5	16		16	34·80	7	18	13	48	50·6	2	1	29·13
28	5	15		16	25·43	7	19	14	7	50·9	2	5	25·69
29	5	13		16	16·57	7	20	14	26	37·4	2	9	22·25
30	5	12		16	8·20	7	21	14	45	9·4	2	13	18·81

— SOLE —

Maggio

Giorno del Mese	Tempo medio di Roma: Nascere	Tempo medio di Roma: Passaggio al meridiano	Tempo medio di Roma: Tramontare	Declinazione a mezzodì vero	Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma
	h m	h m s	h m		h m s
1	5 10	0 16 0·33	7 23	15° 3′ 26″7B	2 17 15·36
2	5 9	15 53·00	7 24	15 21 29·1	2 21 11·71
3	5 7	15 46·18	7 26	15 39 16·1	2 25 8·46
4	5 5	15 39·88	7 27	15 56 47·7	2 29 5·01
5	5 5	15 34·13	7 28	16 14 3·3	2 33 1·56
6	5 3	15 28·93	7 29	16 31 2·7	2 36 58·11
7	5 1	15 24·29	7 30	16 47 45·5	2 40 54·67
8	5 0	15 20·23	7 32	17 4 11·7	2 44 51·22
9	4 59	15 16·74	7 33	17 20 20·8	2 48 47·78
10	4 58	15 13·83	7 34	17 36 12·7	2 52 44·34
11	4 56	15 11·50	7 35	17 51 46·9	2 56 40·90
12	4 55	15 9·77	7 36	18 7 3·3	3 0 37·46
13	4 54	15 8·61	7 38	18 22 1·5	3 4 34·02
14	4 52	15 8·08	7 39	18 36 41·4	3 8 30·58
15	4 52	15 8·13	7 39	18 51 2·4	3 12 27·13
16	4 51	15 8·75	7 41	19 5 4·4	3 16 23·68
17	4 49	15 8·97	7 42	19 18 47·2	3 20 20·23
18	4 48	15 11·75	7 43	19 32 10·4	3 24 16·78
19	4 47	15 14·11	7 45	19 45 13·8	3 28 13·33
20	4 47	15 17·03	7 45	19 57 57·1	3 32 9·88
21	4 45	15 20·51	7 46	20 10 20·0	3 36 6·43
22	4 44	15 24·54	7 47	20 22 22·3	3 40 2·99
23	4 43	15 29·09	7 48	20 34 3·7	3 43 59·55
24	4 42	15 34·15	7 50	20 45 24·0	3 47 56·11
25	4 42	15 39·72	7 50	20 56 23·1	3 51 52·67
26	4 41	15 45·79	7 51	21 7 0·5	3 55 49·23
27	4 40	15 52·33	7 52	21 17 16·0	3 59 45·79
28	4 40	15 59·32	7 53	21 27 9·5	4 3 42·35
29	4 39	16 6·76	7 54	21 36 40·7	4 7 38·91
30	4 38	16 14·63	7 55	21 45 49·3	4 11 35·46
31	4 38	16 22·90	7 55	21 54 35·3	4 15 32·01

— SOLE —

Giugno												
GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA						DECLINAZIONE a mezzodì vero			TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma		
	Nascere		Passaggio al meridiano			Tramontare						
	h	m	h	m	s	h	m			h	m	s
1	4	37	0	16	31·58	7	56	22°	2′	58″3 B	4	19	28·56
2	4	37		16	40·63	7	57	22	10	58·2	4	23	25·12
3	4	36		16	50·07	7	58	22	18	35·0	4	27	21·67
4	4	35		16	59·85	7	59	22	25	48·2	4	31	18·23
5	4	35		17	9·98	8	0	22	32	38·0	4	35	14·79
6	4	34		17	20·43	8	1	22	39	4·1	4	39	11·35
7	4	34		17	31·11	8	2	22	45	6·5	4	43	7·91
8	4	34		17	42·29	8	2	22	50	45·0	4	47	4·47
9	4	34		17	53·65	8	2	22	55	59·3	4	51	1·03
10	4	34		18	5·29	8	3	23	0	49·6	4	54	57·59
11	4	34		18	17·16	8	3	23	5	15·3	4	58	54·15
12	4	33		18	29·27	8	4	23	9	17·2	5	2	50·70
13	4	33		18	41·59	8	5	23	12	54·5	5	6	47·25
14	4	33		18	54·08	8	5	23	16	7·1	5	10	43·80
15	4	33		19	6 74	8	6	23	18	55·2	5	14	40·35
16	4	33		19	19·54	8	6	23	21	18·7	5	18	36·91
17	4	33		19	32·46	8	7	23	23	17·3	5	22	23·56
18	4	33		19	45·46	8	7	23	24	51·3	5	26	30·02
19	4	34		19	58·52	8	7	23	26	0·6	5	30	26·58
20	4	34		20	11·62	8	7	23	26	45·0	5	34	23·14
21	4	34		20	25·13	8	7	23	27	4·7	5	38	19·70
22	4	34		20	37·81	8	8	23	26	59·6	5	42	16·26
23	4	34		20	50·88	8	8	23	26	29·6	5	46	12·82
24	4	34		21	3·84	8	8	23	25	35·0	5	50	9·38
25	4	34		21	16·70	8	8	23	24	15·6	5	54	5·94
26	4	35		21	29·43	8	8	23	22	31·4	5	58	2·49
27	4	35		21	41·99	8	8	23	20	22·6	6	1	59·05
28	4	35		21	54·38	8	8	23	17	49·2	6	5	55·60
29	4	36		22	6·56	8	8	23	14	51·1	6	9	52·15
30	4	37		22	18·51	8	8	23	11	28·6	6	13	48·71

— SOLE —

Luglio

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		Passaggio al meridiano			Tramontare		DECLINAZIONE a mezzodì vero			TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h	m	s	h	m				h	m	s
1	4	37	0	22	30·21	8	8	23°	7′	41″7 B	6	17	45·26
2	4	37		22	41·65	8	8	23	3	30·5	6	21	41·82
3	4	37		22	52·80	8	8	22	58	55·2	6	25	38·38
4	4	38		23	3·65	8	8	22	53	55·8	6	29	34·95
5	4	38		23	14·18	8	7	22	48	32·6	6	33	31·51
6	4	40		23	24·37	8	7	22	42	45·5	6	37	28·07
7	4	40		23	34·23	8	6	22	36	34·8	6	41	24·63
8	4	41		23	43·72	8	6	22	30	0·6	6	45	21·19
9	4	42		23	52·84	8	5	22	23	3·1	6	49	17·74
10	4	43		24	1·55	8	5	22	15	42·3	6	53	14·29
11	4	44		24	9·87	8	4	22	7	58·6	6	57	10·84
12	4	45		24	17·77	8	4	21	59	52·0	7	1	7·39
13	4	45		24	25·21	8	4	21	51	22·6	7	5	3·94
14	4	46		24	32·22	8	3	21	42	30·9	7	9	0·50
15	4	47		24	38·76	8	2	21	33	16·8	7	12	57·05
16	4	48		24	44·81	8	1	21	23	40·7	7	16	53·61
17	4	49		24	50·37	8	0	21	13	42·8	7	20	50·17
18	4	50		24	55·43	7	59	21	3	23·2	7	24	46·73
19	4	51		24	59·97	7	58	20	52	42·2	7	28	43·29
20	4	52		25	3·98	7	57	20	41	40·1	7	32	39·85
21	4	53		25	7·40	7	56	20	30	17·1	7	36	36·41
22	4	53		25	10·28	7	56	20	18	33·4	7	40	32·97
23	4	55		25	12·59	7	55	20	6	29·4	7	44	29·52
24	4	56		25	14·30	7	54	19	54	5·2	7	48	26·07
25	4	57		25	15·41	7	53	19	41	21·1	7	52	22·62
26	4	58		25	15·91	7	51	19	28	17·3	7	56	19·17
27	4	59		25	15·80	7	51	19	14	54·3	8	0	15·73
28	5	0		25	15·07	7	50	19	1	12·2	8	4	12·38
29	5	1		25	13·70	7	48	18	47	11·2	8	8	8·84
30	5	2		25	11·73	7	47	18	32	51·7	8	12	5·40
31	5	4		25	9·13	7	46	18	18	14·0	8	16	1·96

— SOLE —

Agosto

Giorno del Mese	Tempo medio di Roma: Nascere		Passaggio al meridiano	Tramontare		Declinazione a mezzodì vero	Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h m s	h	m		h	m	s
1	5	4	0 25 5·82	7	45	18° 3′ 18″4 B	8	19	58·52
2	5	5	25 2·09	7	44	17 48 5·1	8	23	55·08
3	5	7	24 57·65	7	42	17 32 34·6	8	27	51·64
4	5	8	24 52·61	7	41	17 16 46·8	8	31	48·19
5	5	9	24 46·97	7	39	17 0 42·3	8	35	44·75
6	5	10	24 40·76	7	38	16 44 21·2	8	39	41·30
7	5	11	24 33·94	7	37	16 27 44·0	8	43	47·85
8	5	13	24 26 54	7	35	16 10 50·7	8	47	35·39
9	5	14	24 18·58	7	34	15 53 41·7	8	51	30·94
10	5	15	24 10·06	7	32	15 36 17·4	8	55	27 49
11	5	16	24 0·99	7	31	15 18 38·1	8	59	24·04
12	5	17	23 51·37	7	30	15 0 43·9	9	3	20·60
13	5	18	23 41·21	7	28	14 42 35·3	9	7	17·16
14	5	20	23 30·47	7	26	14 24 12·5	9	11	13·72
15	5	21	23 19·29	7	24	14 5 35·9	9	15	10·27
16	5	22	23 7·56	7	23	13 46 45·8	9	19	6·83
17	5	23	22 55·33	7	22	13 27 42·6	9	23	3·39
18	5	25	22 42·58	7	20	13 8 26·5	9	26	59·95
19	5	26	22 29·35	7	18	12 48 57·9	9	30	56·50
20	5	27	22 15·63	7	16	12 29 17·1	9	34	53·05
21	5	28	22 1 42	7	15	12 9 24·3	9	38	49·60
22	5	29	21 46·73	7	14	11 49 20·1	9	42	46·15
23	5	31	21 31·58	7	12	11 29 4·7	9	46	42·69
24	5	32	21 15·98	7	10	11 8 38·3	9	50	39·25
25	5	33	20 59·93	7	8	10 48 1·5	9	54	35·80
26	5	34	20 43·46	7	7	10 27 14·3	9	58	32·36
27	5	35	20 26·57	7	5	10 6 17·4	10	2	28·91
28	5	37	20 9·28	7	3	9 45 10·8	10	6	25·47
29	5	38	19 51 62	7	1	9 23 35·0	10	10	22·03
30	5	39	19 33·59	6	59	9 2 30·4	10	14	18 59
31	5	40	19 15·23	6	58	8 40 57·1	10	18	15·14

— SOLE —

Settembre

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere	Passaggio al meridiano	Tramontare	DECLINAZIONE a mezzodì vero	TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma
	h m	h m s	h m		h m s
1	5 41	0 18 56·56	6 56	8° 19′ 15″5 B	10 22 11·69
2	5 43	18 37·55	6 54	7 57 25·9	10 26 8·24
3	5 44	18 18·29	6 52	7 35 28·7	10 30 4·79
4	5 46	17 58·77	6 50	7 13 24·2	10 34 1·34
5	5 47	17 39·00	6 48	6 51 12·4	10 37 57·88
6	5 47	17 19·01	6 46	6 28 53 9	10 41 54·42
7	5 49	16 58 82	6 44	6 6 29·0	10 45 50·98
8	5 50	16 38·46	6 42	5 43 57·7	10 49 47·53
9	5 51	16 17·95	6 40	5 21 20·7	10 53 44·09
10	5 52	15 57·29	6 39	4 58 38·3	10 57 40·64
11	5 53	15 36·52	6 37	4 35 50·6	11 1 36·20
12	5 55	15 15·65	6 35	4 12 58·0	11 5 33·76
13	5 56	14 54·70	6 33	3 50 0·9	11 9 30·32
14	5 57	14 33·69	6 32	3 26 59·7	11 13 27·87
15	5 58	14 12·63	6 29	3 3 54·5	11 17 23·32
16	6 0	13 51·54	6 27	2 40 45·9	11 21 19·97
17	6 0	13 30·45	6 26	2 17 34·0	11 25 16·52
18	6 1	13 9·36	6 24	1 54 19·5	11 29 13·06
19	6 3	12 48·28	6 22	1 31 2·4	11 33 9·61
20	6 4	12 27·23	6 20	1 7 43·1	11 37 6·16
21	6 5	12 6·23	6 19	0 44 22·2	11 41 2·71
22	6 6	11 45·30	6 17	0 21 0·0 B	11 44 59·27
23	6 8	11 24·45	6 14	0 2 23·3 A	11 48 55·83
24	6 9	11 3·71	6 12	0 25 47·3	11 52 42·38
25	6 10	10 43·10	6 10	0 49 11·6	11 56 48·94
26	6 11	10 22·62	6 8	1 12 35·9	12 0 45·50
27	6 12	10 2·31	6 7	1 35 59·8	12 4 42·05
28	6 14	9 42·20	6 5	1 59 22·9	12 8 38·60
29	6 15	9 22·33	6 3	2 22 45·1	12 12 35·15
30	6 17	9 2·67	6 1	2 46 5·8	12 16 31·70

— SOLE —

Ottobre

Giorno del Mese	Tempo medio di Roma: Nascere	Tempo medio di Roma: Passaggio al meridiano	Tempo medio di Roma: Tramontare	Declinazione a mezzodì vero	Tempo siderale di Torino a mezzodì medio di Roma
	h m	h m s	h m		h m s
1	6 18	0 8 43·28	5 59	3° 9′ 24″8A	12 20 28·24
2	6 19	8 24·18	5 57	3 32 41·7	12 24 24·79
3	6 20	8 5·39	5 55	3 55 56·3	12 28 21·34
4	6 22	7 46·92	5 53	4 19 8·1	12 32 17·89
5	6 23	7 28·82	5 51	4 42 16·9	12 36 14·44
6	6 24	7 11·06	5 50	5 5 22·2	12 40 10·99
7	6 25	6 53·76	5 48	5 28 43·9	12 44 7·55
8	6 27	6 36·86	5 46	5 51 21·4	12 48 4·11
9	6 28	6 20·40	5 44	6 14 14·5	12 52 0·66
10	6 29	6 4·40	5 43	6 37 2·7	12 55 57·22
11	6 30	5 48·90	5 41	6 59 45·8	12 59 53·78
12	6 32	5 33·89	5 39	7 22 23·3	13 3 50·33
13	6 33	5 19·40	5 37	7 44 54·7	13 7 46·88
14	6 34	5 5·45	5 36	8 7 19·9	13 11 43·43
15	6 35	4 52·07	5 34	8 29 38·4	13 15 39·98
16	6 37	4 39·24	5 32	8 51 49·8	13 19 36·52
17	6 38	4 26·97	5 31	9 13 53·6	13 23 33·08
18	6 39	4 15·32	5 29	9 35 49·5	13 27 29·63
19	6 40	4 4·27	5 27	9 57 37·0	13 31 26·18
20	6 42	3 53·83	5 25	10 19 15·9	13 35 22·74
21	6 43	3 44·01	5 23	10 40 45·4	13 39 19·30
22	6 44	3 34·83	5 22	11 2 5·4	13 43 15·86
23	6 46	3 26·32	5 21	11 23 14·5	13 47 12·41
24	6 47	3 18·47	5 19	11 44 15·1	13 51 8·97
25	6 49	3 11·31	5 17	12 5 4·0	13 55 5·52
26	6 50	3 4·84	5 15	12 25 41·6	13 59 2·08
27	6 51	2 59·10	5 14	12 46 7·6	14 2 58·63
28	6 53	2 54·09	5 13	13 6 21·5	14 6 55·17
29	6 54	2 49·82	5 11	13 26 23·2	14 10 51·72
30	6 56	2 46·32	5 9	13 46 12·0	14 14 48·27
31	6 57	2 43·58	5 8	14 5 47·8	14 18 44·82

— SOLE —

Novembre

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		Passaggio al meridiano			Tramontare		DECLINAZIONE a mezzodì vero	TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h	m	s	h	m		h	m	s
1	6	58	0	2	41·63	5	7	14° 25′ 9″9A	14	22	41·37
2	7	0		2	40·49	5	5	14 44 18·2	14	26	37·93
3	7	1		2	40·16	5	4	15 3 12·1	14	30	34·48
4	7	3		2	40·65	5	2	15 21 51·4	14	34	31·04
5	7	4		2	42·03	5	0	15 40 15·5	14	38	27·60
6	7	5		2	44·14	5	0	15 58 24·1	14	42	24·14
7	7	7		2	47·17	4	58	15 16 16·8	14	46	20·72
8	7	8		2	51·05	4	57	15 33 53·2	14	50	17·28
9	7	10		2	55·79	4	55	16 51 13·0	14	54	13·83
10	7	11		3	1·40	4	54	17 8 15·5	14	58	10·38
11	7	12		3	7·88	4	54	17 25 0·6	15	2	6·93
12	7	14		3	15·22	4	52	17 41 27·8	15	6	3·48
13	7	15		3	23·43	4	51	17 57 36·6	15	10	0·03
14	7	17		3	32·51	4	50	18 13 26·7	15	13	56·59
15	7	18		3	42·43	4	49	18 28 57·7	15	17	53·14
16	7	19		3	53·19	4	48	18 44 9·2	15	21	49·70
17	7	21		4	4·80	4	47	18 59 0·7	15	25	46·26
18	7	22		4	17·22	4	46	19 13 31·8	15	29	42·83
19	7	24		4	30·46	4	45	19 27 42·1	15	33	39·39
20	7	25		4	44·51	4	44	19 41 31·3	15	37	35·95
21	7	26		4	59·33	4	44	19 54 59·1	15	41	32·51
22	7	27		5	14·96	4	43	20 8 4·8	15	45	29·06
23	7	29		5	31·36	4	42	20 20 48·3	15	49	25·61
24	7	30		5	48·51	4	41	20 33 9·3	15	53	22·16
25	7	32		6	6·42	4	40	20 44 57·2	15	57	18·71
26	7	32		6	25·07	4	40	20 56 41·7	16	1	15·26
27	7	33		6	44·44	4	40	21 7 52·8	16	5	11·82
28	7	35		7	4·53	4	39	21 18 39·9	16	9	8·37
29	7	36		7	25·30	4	38	21 29 2·6	16	13	4·93
30	7	37		7	46·75	4	38	21 39 1·0	16	17	1·49

— SOLE —

Dicembre

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		Passaggio al meridiano			Tramontare		DECLINAZIONE a mezzodì vero			TEMPO SIDERALE DI TORINO a mezzodì medio di Roma		
	h	m	h	m	s	h	m				h	m	s
1	7	39	0	8	8·89	4	37	21°	48′	34″6A	16	20	58·05
2	7	40		8	31·66	4	37	21	57	43·0	16	24	54·61
3	7	41		8	55·06	4	36	22	6	26·2	16	28	51·17
4	7	43		9	19·07	4	36	22	14	43·7	16	32	47·73
5	7	43		9	43·68	4	36	22	22	35·4	16	36	44·29
6	7	44		10	8·85	4	36	22	30	1·0	16	40	40·85
7	7	45		10	34·56	4	36	22	37	0·2	16	44	37·40
8	7	46		11	0·80	4	36	22	43	32·9	16	48	33·95
9	7	47		11	27·53	4	36	22	49	38·7	16	52	30·51
10	7	48		11	54·72	4	35	22	55	17·6	16	56	27·06
11	7	49		12	22·35	4	35	23	0	29·3	17	0	23·61
12	7	50		12	50·37	4	35	23	5	13·7	17	4	19·17
13	7	51		13	18·77	4	35	23	9	30·6	17	8	16·73
14	7	52		13	47·48	4	35	23	13	19·9	17	12	13·29
15	7	52		14	16·50	4	36	23	16	41·4	17	16	9·86
16	7	53		14	45·74	4	37	23	19	35·0	17	20	6·42
17	7	53		15	15·22	4	37	23	22	0·7	17	24	2·98
18	7	54		15	44·87	4	37	23	23	58·1	17	27	59·54
19	7	55		16	14·65	4	38	23	25	27·4	17	31	56·10
20	7	55		16	44·54	4	38	23	26	28·4	17	35	52·66
21	7	56		17	14·49	4	39	23	27	1·0	17	39	49·21
22	7	56		17	44·48	4	39	23	27	5·5	17	43	45·76
23	7	57		18	14·47	4	40	23	26	41·5	17	47	42·31
24	7	57		18	44·43	4	40	23	25	47·1	17	51	38·86
25	7	58		19	14·31	4	41	23	24	25·7	17	55	35·42
26	7	58		19	44·09	4	41	23	22	40·6	17	59	31·97
27	7	58		20	13·74	4	42	23	20	22·5	18	3	28·53
28	7	59		20	43·24	4	43	23	17	37·3	18	7	25·10
29	8	0		21	12·52	4	43	23	14	24·0	18	11	21·66
30	8	0		21	41·58	4	44	23	10	42·7	18	15	18·22
31	8	0		22	10·39	4	45	23	6	33·6	18	19	14·78

— LUNA —

Gennaio

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	11	M. 51	5	Sera 47	11	S. 54	8
2	0	Sera 16	6	30	—	—	9
3	0	43	7	13	0	Mattino 53	10
4	1	12	7	58	1	54	11
5	1	43	8	46	2	56	12
6	2	20	9	37	3	59	13
7	3	2	10	31	5	3	14
8	3	54	11	28	6	6	15
9	4	54	—	—	7	6	16
10	5	58	0	Mattino 27	8	1	17
11	7	9	1	26	8	50	18
12	8	23	2	24	9	32	19
13	9	37	3	21	10	10	20
14	10	50	4	15	10	44	21
15	—	—	5	7	11	16	22
16	0	Mattino 2	6	59	11	47	23
17	1	12	6	49	0	Sera 21	24
18	2	21	7	40	0	55	25
19	3	27	8	32	1	33	26
20	4	31	9	24	2	15	27
21	5	29	10	16	3	3	28
22	6	22	11	7	3	55	29
23	7	10	11	57	4	50	30
24	7	51	0	Sera 46	5	47	1
25	8	27	1	33	6	47	2
26	8	59	2	18	7	46	3
27	9	27	3	1	8	45	4
28	9	54	3	44	9	43	5
29	10	19	4	25	10	41	6
30	10	46	5	8	11	41	7
31	11	12	5	51	—	—	8

Primo quarto il 2 a 1h 10m di sera.
Luna piena il 9 a 11 22 di sera.
Ultimo quarto il 16 a 4 11 di sera.
Luna nuova il 24 a 3 50 di matt.

Febbraio

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	11	M. 42	6	Sera 36	0	Mattino 41	9
2	0	Sera 16	7	25	1	42	10
3	0	54	8	16	2	44	11
4	1	39	9	10	3	46	12
5	2	33	10	8	4	47	13
6	3	34	11	7	5	45	14
7	4	44	—	—	6	36	15
8	5	57	0	Mattino 6	7	23	16
9	7	14	1	5	8	4	17
10	8	30	2	2	8	41	18
11	9	46	2	58	9	15	19
12	10	59	3	51	9	48	20
13	—	—	4	44	10	23	21
14	0	Mattino 11	5	37	10	57	22
15	1	20	6	29	11	34	23
16	2	24	7	21	0	Sera 16	24
17	3	25	8	12	1	1	25
18	4	19	9	4	1	52	26
19	5	7	9	54	2	44	27
20	5	50	10	42	3	40	28
21	6	27	11	29	4	38	29
22	7	0	0	Sera 15	5	37	30
23	7	29	0	59	6	36	1
24	7	57	1	41	7	35	2
25	8	23	2	23	8	34	3
26	8	50	3	5	9	32	4
27	9	15	3	48	10	32	5
28	9	43	4	32	11	31	6

Primo quarto l' 1 a 9h 16m di matt
Luna piena l' 8 a 11 4 di matt.
Ultimo quarto il 15 a 2 21 di matt
Luna nuova il 22 a 10 30 di sera.

— LUNA —

Marzo

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	10	15 Mattino	5	18 Sera	———		7
2	10	50	6	6	0 Mattino	33	8
3	11	30	6	58	1	32	9
4	0 Sera	20	7	52	2	31	10
5	1	14	8	48	3	29	11
6	2	18	9	46	4	22	12
7	3	29	10	45	5	10	13
8	4	44	11	43	5	54	14
9	6	1	———		6	33	15
10	7	19	0 Mattino	40	7	2	16
11	8	37	1	36	7	44	17
12	9	52	2	31	8	18	18
13	11	4	3	26	8	54	19
14	———		4	20	9	31	20
15	0 Mattino	14	5	14	10	12	21
16	1	17	6	7	10	56	22
17	2	15	7	0	11	43	23
18	3	6	7	51	0 Sera	40	24
19	3	50	8	40	1	35	25
20	4	29	9	27	2	32	26
21	5	2	10	13	3	31	27
22	5	32	10	57	4	30	28
23	6	1	11	40	5	28	29
24	6	27	0 Sera	22	6	27	30
25	6	52	1	4	7	26	1
26	7	18	1	47	8	15	2
27	7	46	2	30	9	25	3
28	8	16	3	15	10	26	4
29	8	49	4	2	11	25	5
30	9	28	4	52	———		6
31	10	12	5	44	0 M.	24	7

Primo quarto il 3 a 1^h 57^m di matt.
Luna piena il 9 a 2 23 di sera.
Ultimo quarto il 16 a 2 31 di sera.
Luna nuova il 24 a 4 59 di sera.

Aprile

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	11 M.	2	6 Sera	38	1 Mattino	21	8
2	0 Sera	1	7	33	2	14	9
3	1	7	8	29	3	3	10
4	2	17	9	26	3	46	11
5	3	32	10	22	4	25	12
6	4	49	11	17	5	3	13
7	6	6	———		5	37	14
8	7	23	0 Mattino	13	5	58	15
9	8	40	1	9	6	46	16
10	9	54	2	4	7	23	17
11	11	3	3	0	8	3	18
12	—	—	3	56	8	48	19
13	0 Mattino	5	4	51	9	37	20
14	1	0	5	44	10	31	21
15	1	48	6	35	11	27	22
16	2	30	7	24	0 Sera	25	23
17	3	6	8	11	1	23	24
18	3	36	8	55	2	23	25
19	4	5	9	38	3	21	26
20	4	31	10	20	4	20	27
21	4	56	11	2	5	18	28
22	5	23	11	45	6	18	29
23	5	49	0 Sera	28	7	19	1
24	6	18	1	13	8	19	2
25	6	51	2	0	9	20	3
26	7	27	2	49	10	20	4
27	8	9	3	40	11	17	5
28	8	58	4	33	———		6
29	9	53	5	27	0 Matt.	11	7
30	10	55	6	22	1	0	8

Primo quarto l' 1 a 2^h 42^m di sera.
Luna piena l' 8 a 6 28 di matt.
Ultimo quarto il 15 a 4 53 di matt.
Luna nuova il 23 a 9 43 di matt.
Primo quarto il 30 a 11 50 di sera.

— LUNA —

Maggio

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere h m	Passaggio al meridiano h m	Tramontare h m	GIORNO della Luna
1	0 Sera 1	7 Sera 16	1 Mattino 44	9
2	1 13	8 10	2 24	10
3	2 26	9 4	3 0	11
4	3 41	9 58	3 34	12
5	4 57	10 52	4 7	13
6	6 13	11 47	4 40	14
7	7 28	———	5 15	15
8	8 41	0 Mattino 43	5 51	16
9	9 48	1 40	6 36	17
10	10 49	2 37	7 25	18
11	11 42	3 32	8 17	19
12	———	4 26	9 14	20
13	0 Mattino 27	5 17	10 12	21
14	1 6	6 6	11 13	22
15	1 39	6 51	0 Sera 12	23
16	2 8	7 35	1 11	24
17	2 35	8 18	2 10	25
18	3 0	9 0	3 9	26
19	3 27	9 42	4 9	27
20	3 52	10 25	5 10	28
21	4 20	11 9	6 10	29
22	4 51	11 56	7 12	30
23	5 26	0 Sera 45	8 13	1
24	6 7	1 36	9 13	2
25	6 54	2 29	10 8	3
26	7 48	3 24	10 59	4
27	8 48	4 19	11 45	5
28	9 53	5 13	———	6
29	11 2	6 6	0 Mattino 26	7
30	0 Sera 13	6 59	1 2	8
31	1 25	7 51	1 36	9

Luna piena il 7 a 2^h 51^m di sera.
Ultimo quarto il 14 a 9 7 di sera
Luna nuova il 22 a 11 55 di sera.
Primo quarto il 30 a 6 9 di matt.

Giugno

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA Nascere h m	Passaggio al meridiano h m	Tramontare h m	GIORNO della Luna
1	2 Sera 38	8 Sera 43	2 Mattino 7	10
2	3 53	9 36	2 39	11
3	5 6	10 30	3 12	12
4	6 19	11 25	3 48	13
5	7 28	———	4 27	14
6	8 33	0 Mattino 21	5 12	15
7	9 31	1 18	6 2	16
8	10 20	2 13	6 58	17
9	11 3	3 6	7 57	18
10	11 39	3 57	8 58	19
11	———	4 45	9 59	20
12	0 Mattino 10	5 30	10 59	21
13	0 38	6 14	11 59	22
14	1 4	6 56	0 Sera 58	23
15	1 30	7 38	1 57	24
16	1 55	8 20	2 57	25
17	2 21	9 4	3 57	26
18	2 51	9 49	4 57	27
19	3 24	10 37	6 1	28
20	7 2	11 28	7 2	29
21	4 47	0 Sera 22	8 1	1
22	5 39	1 17	8 55	2
23	6 38	2 13	9 44	3
24	7 43	3 8	10 27	4
25	8 53	4 3	11 6	5
26	10 3	4 56	11 40	6
27	11 15	5 48	———	7
28	0 Sera 28	6 39	0 Mattino 11	8
29	1 40	7 31	0 44	9
30	2 52	8 23	1 16	10

Luna piena il 5 a 11^h 28^m di sera.
Ultimo quarto il 13 a 2 24 di sera.
Luna nuova il 21 a 11 42 di matt.
Primo quarto il 28 a 10 50 di matt.

— LUNA —

Luglio

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	4	Sera 4	9	Sera 16	1	Mattino 48	11
2	5	13	10	11	2	24	12
3	6	19	11	6	3	6	13
4	7	19	—	—	3	53	14
5	8	12	0	Mattino 1	4	45	15
6	8	58	0	55	5	43	16
7	9	37	1	47	6	42	17
8	10	11	2	37	7	44	18
9	10	40	3	24	8	45	19
10	11	7	4	8	9	45	20
11	11	33	4	51	10	44	21
12	11	57	5	33	11	45	22
13	—	—	6	15	0	Sera 44	23
14	0	Mattino 23	6	58	1	43	24
15	0	52	7	42	2	45	25
16	1	23	8	29	3	46	26
17	1	57	9	18	4	48	27
18	2	39	10	10	5	47	28
19	3	28	11	5	6	45	29
20	4	25	0	Sera 1	7	37	30
21	5	28	0	58	8	23	1
22	6	38	1	55	9	5	2
23	7	50	2	50	9	41	3
24	9	4	3	44	10	15	4
25	10	18	4	36	10	46	5
26	11	30	5	28	11	18	6
27	0	Sera 43	6	20	11	51	7
28	1	54	7	12	—	—	8
29	3	3	8	5	0	Mattino 26	9
30	4	9	8	59	1	5	10
31	5	11	9	54	1	48	11

Luna piena il 5 a 9^h 24^m di matt.
Ultimo quarto il 13 a 7 46 di matt
Luna nuova il 20 a 9 39 di sera.
Primo quarto il 27 a 3 20 di sera.

Agosto

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	6	Sera 5	10	Sera 47	2	Mattino 38	12
2	6	53	11	40	3	32	13
3	7	34	—	—	4	30	14
4	8	10	0	Mattino 30	5	31	15
5	8	41	1	18	6	32	16
6	9	9	2	3	7	34	17
7	9	35	2	47	8	35	18
8	10	0	3	29	9	33	19
9	10	25	4	11	10	33	20
10	10	52	4	53	11	31	21
11	11	21	5	36	0	Sera 31	22
12	11	54	6	21	1	32	23
13	—	—	7	8	2	32	24
14	0	Mattino 32	7	58	3	32	25
15	1	16	8	50	4	30	26
16	2	8	9	46	5	24	27
17	3	8	10	43	6	14	28
18	4	16	11	40	6	58	29
19	5	28	0	Sera 37	7	37	1
20	6	44	1	33	8	13	2
21	7	59	2	28	8	46	3
22	9	15	3	22	9	19	4
23	10	30	4	15	9	52	5
24	11	44	5	8	10	27	6
25	0	Sera 45	6	2	11	5	7
26	2	3	6	56	11	47	8
27	3	5	7	50	—	—	9
28	4	2	8	43	0	Mattino 35	10
29	5	0	9	35	1	27	11
30	5	33	10	25	2	24	12
31	6	10	11	13	3	23	13

Luna piena il 3 a 9^h 29^m di sera.
Ultimo quarto il 12 a 0 26 di matt.
Luna nuova il 19 a 6 28 di matt.
Primo quarto il 25 a 9 11 di sera.

— LUNA —

Settembre

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	6	42	11	59	4	24	14
2	7	11	—		5	25	15
3	7	38	0	44	6	25	16
4	8	3	1	26	7	24	17
5	8	29	2	8	8	24	18
6	8	54	2	50	9	22	19
7	9	22	3	32	10	22	20
8	9	52	4	16	11	21	21
9	10	27	5	1	0	20	22
10	11	8	5	49	1	20	23
11	11	55	6	39	2	17	24
12	—		7	32	3	12	25
13	0	51	8	27	4	3	26
14	1	53	9	23	4	48	27
15	3	3	10	20	5	30	28
16	4	16	11	16	6	7	29
17	5	33	0	12	6	42	30
18	6	51	1	8	7	16	1
19	8	9	2	3	7	49	2
20	9	25	2	58	8	24	3
21	10	41	3	54	9	2	4
22	11	52	4	59	9	44	5
23	0	58	5	45	10	31	6
24	1	58	6	39	11	22	7
25	2	50	7	32	—		8
26	3	34	8	23	0	15	9
27	4	13	9	11	1	17	10
28	4	46	9	57	2	17	11
29	5	15	10	42	3	18	12
30	5	42	11	25	4	17	13

Luna piena il 2 a 0^h 2^m di sera.
Ultimo quarto il 10 a 3 53 di sera.
Luna nuova il 17 a 2 49 di sera.
Primo quarto il 24 a 5 53 di matt.

Ottobre

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	6	7	—	—	5	17	14
2	6	32	0	7	6	16	15
3	6	57	0	48	7	16	16
4	7	25	1	31	8	15	17
5	7	54	2	14	9	14	18
6	8	27	2	58	10	14	19
7	9	4	3	45	11	12	20
8	9	48	4	33	0	10	21
9	10	39	5	24	1	4	22
10	11	36	6	16	1	54	23
11	—		7	10	2	41	24
12	0	41	8	5	3	23	25
13	1	51	9	0	4	1	26
14	3	5	9	55	4	36	27
15	4	20	10	50	5	9	28
16	5	38	11	45	5	42	29
17	6	57	0	41	6	17	1
18	8	16	1	38	6	54	2
19	9	32	2	36	7	36	3
20	10	44	3	33	8	26	4
21	11	49	4	30	9	13	5
22	0	45	5	26	10	9	6
23	1	33	6	18	11	8	7
24	2	14	7	8	—		8
25	2	49	7	56	0	9	9
26	3	19	8	40	1	10	10
27	3	46	9	24	2	10	11
28	4	12	10	6	3	10	12
29	4	37	10	47	4	9	13
30	5	1	11	29	5	9	14
31	5	28	—		6	8	15

Luna piena il 2 a 4^h 37^m di matt.
Ultimo quarto il 10 a 5 47 di matt.
Luna nuova il 16 a 11 24 di sera.
Primo quarto il 23 a 6 35 di sera.
Luna piena il 31 a 10 20 di sera.

— LUNA —

Novembre

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	5	Sera 56	0	Mattino 12	7	Mattino 8	16
2	6	27	0	56	8	7	17
3	7	3	1	42	9	7	18
4	7	45	2	30	10	6	19
5	8	33	3	20	11	1	20
6	9	28	4	12	11	53	21
7	10	28	5	4	0	Sera 39	22
8	11	44	5	57	1	Sera 21	23
9	—		6	50	1	59	24
10	0	Mattino 44	7	43	2	34	25
11	1	56	8	36	3	6	26
12	3	11	9	29	3	38	27
13	4	28	10	23	4	10	28
14	5	46	11	19	4	45	29
15	7	4	0	Sera 16	5	24	1
16	8	19	1	15	6	9	2
17	9	30	2	14	6	58	3
18	10	32	3	12	7	54	4
19	11	27	4	8	8	54	5
20	0	Sera 12	5	1	9	56	6
21	0	50	5	51	10	58	7
22	1	23	6	37	—		8
23	1	51	7	21	0	Mattino 0	9
24	2	17	8	4	1	1	10
25	2	42	8	45	2	0	11
26	3	6	9	27	3	10	12
27	3	31	10	9	3	59	13
28	3	58	10	53	4	59	14
29	4	29	11	39	5	59	15
30	5	4	—		7	0	16

Ultimo quarto l' 8 a 5^h 51^m di sera.
Luna nuova il 15 a 8 58 di matt
Primo quarto il 22 a 11 32 di matt
Luna piena il 30 a 4 9 di sera.

Dicembre

GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		GIORNO della Luna
	h	m	h	m	h	m	
1	5	Sera 43	0	Mattino 27	7	Mattino 59	17
2	6	29	1	17	8	57	18
3	7	21	2	8	9	51	19
4	8	21	3	1	10	30	20
5	9	25	3	54	11	23	21
6	10	32	4	47	0	Sera 1	22
7	11	42	5	38	0	Sera 36	23
8	—		6	30	1	8	24
9	0	Mattino 53	7	21	1	38	25
10	2	7	8	12	2	10	26
11	3	21	9	5	2	42	27
12	4	37	10	0	3	17	28
13	5	52	10	57	3	57	29
14	7	5	11	55	4	43	30
15	8	13	0	Sera 54	5	36	1
16	9	13	1	52	6	35	2
17	10	4	2	48	7	37	3
18	10	47	3	41	8	42	4
19	11	22	4	30	9	45	5
20	11	53	5	16	10	48	6
21	0	Sera 21	6	0	11	50	7
22	0	46	6	42	—		8
23	1	9	7	23	0	Mattino 50	9
24	1	35	8	5	1	48	10
25	2	0	8	58	2	48	11
26	2	30	9	33	3	47	12
27	3	2	10	20	4	49	13
28	3	39	11	10	5	49	14
29	4	23	—		6	47	15
30	5	14	0	Matt. 1	7	44	16
31	6	12	0	55	8	36	17

Ultimo quarto l' 8 a 4^h 0^m di matt.
Luna nuova il 14 a 8 11 di sera.
Primo quarto il 22 a 7 51 di matt.
Luna piena il 30 a 9 4 di matt.

ECCLISSI

(1887)

---

8 *Febbraio.* Ecclisse parziale di Luna invisibile a Torino.

22 » Ecclisse annulare di Sole invisibile a Torino.

3 *Agosto.* Ecclisse parziale di Luna visibile a Torino.

Entrata nell'ombra . . . $8^h\ 25^m,4$ pom.

Metà dell'Ecclisse . . . . 9 38 ,7 »

Uscita dall'ombra . . . . 10 51 ,7 »

Primo contatto coll'ombra a 130° dal punto più boreale del disco lunare verso est.

Ultimo contatto coll'ombra a 151° dal punto più boreale del disco lunare verso ovest (immagine diritta).

Grandezza dell'Ecclisse 0,42 preso per unità il diametro lunare.

19 » Ecclisse totale di Sole parzialmente visibile a Torino.

Il Sole si leva parzialmente ecclissato a . . . . . $5^h\ 26^m,0$

Fine dell'Ecclisse . . . . . 5 40 ,7

Ultimo contatto a 124° dal punto più boreale del disco solare verso est (immagine diritta).

EFFEMERIDI

DI

Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno

1887.

TEMPO MEDIO DI ROMA	MERCURIO						VENERE					
	Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare	
	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m
1 Gennaio	6	32	10	56	3	22	8	4	0	54	5	16
11 »	7	2	11	19	3	38	8	39	1	8	5	40
21 »	7	26	11	47	4	10	8	36	1	20	6	7
1 Febbraio	7	42	0	20	5	0	8	27	1	31	6	37
11 »	7	50	0	51	5	5	8	7	1	40	7	6
21 »	7	45	1	19	6	57	8	2	1	46	7	33
1 Marzo	7	34	1	34	7	40	7	51	1	51	7	54
11 »	6	58	1	22	7	46	7	35	1	56	8	20
21 »	6	7	0	25	6	40	7	20	2	2	8	47
1 Aprile	5	12	11	18	5	13	7	7	2	10	9	17
11 »	4	57	10	47	4	39	6	56	2	18	9	43
21 »	4	40	10	40	4	42	6	52	2	29	10	10
1 Maggio	4	29	10	49	5	12	6	52	2	40	10	33
11 »	4	23	11	10	6	2	6	58	2	52	10	51
21 »	4	28	11	46	7	12	7	10	3	4	11	2
1 Giugno	4	55	0	42	8	36	7	29	3	16	11	6
11 »	5	37	1	31	9	31	7	47	3	24	11	0
21 »	6	20	2	3	9	49	8	8	3	29	10	51
1 Luglio	6	48	2	12	9	36	8	27	3	31	10	36
11 »	6	49	1	56	9	2	8	43	3	28	10	14
21 »	6	13	1	11	8	9	8	55	3	22	9	50
1 Agosto	4	52	11	58	7	3	9	3	3	11	9	20
11 »	3	57	11	13	6	32	9	2	2	54	8	45
21 »	3	57	11	13	6	32	8	51	2	29	8	6
1 Settembre	4	55	11	48	6	44	8	22	1	49	7	16
11 »	5	55	0	20	6	47	7	33	0	59	6	25
21 »	6	51	0	45	6	40	6	24	11	59	5	34
1 Ottobre	7	40	1	4	6	30	5	14	11	2	4	51
11 »	8	23	1	29	6	18	4	17	10	16	4	16
21 »	8	58	1	32	6	8	3	40	9	45	3	50
1 Novembre	9	12	1	33	5	53	3	21	9	24	3	29
11 »	8	31	0	57	5	24	3	17	9	13	3	11
21 »	6	36	11	33	4	29	3	20	9	7	2	58
1 Dicembre	5	49	10	48	3	48	3	30	9	4	2	40
11 »	6	9	10	51	3	45	3	45	9	5	2	27
21 »	6	44	11	10	3	37	4	2	9	8	2	18
31 »	7	22	11	36	3	52	4	21	9	14	2	7

ETI

MARTE						GIOVE						SATURNO					
Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare		Nascere		Passaggio al meridiano		Tramontare	
h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m
)	34 Mattino	2	12 Sera	6	51 Sera	2	22 Mattino	7	39 Mattino	0	56 Sera	5	24 Sera	1	3 M.	8	42 Mattino
)	17	2	5	6	55	1	48	7	4	0	20	4	40	0	20	8	0
3	57	1	56	6	57	1	15	6	29	11	43 Mattino	3	53	11	33 Sera	7	13
3	35	1	47	7	2	0	35 Sera	5	49	11	23	3	5	10	46	6	25
3	13	1	37	7	4	11	58	5	11	10	44	2	23	10	4	5	45
7	50	1	27	7	7	11	19	4	32	9	5	1	41	9	23	5	5
7	31	1	18	7	8	10	47	4	0	9	13	1	8	8	50	4	32
7	7	1	7	7	10	10	5	3	19	8	33	0	28 Mattino	8	10	3	52
6	43	0	56	7	11	9	22	2	37	7	52	11	49	7	31	3	13
6	17	0	43	7	12	8	33	1	50	7	7	11	6	6	48	2	30
5	54	0	32	7	13	7	47	1	6	6	25	10	29	6	11	1	53
5	31	0	21	7	14	7	1	0	22	5	43	9	52	5	34	1	16
5	9	0	10	7	14	6	11	11	33 Sera	4	55	9	16	4	57	0	38
4	48	0	0	7	23	5	25	10	49	4	13	8	40	4	21	0	2
4	28	11	49 Mattino	7	13	4	41	10	6	3	31	8	6	3	46	11	26 Sera
4	7	11	38	7	11	3	53	9	20	2	47	7	28	3	8	10	48
3	51	11	29	7	9	3	12	8	39	2	6	6	54	2	33	10	12
3	36	11	19	7	3	2	32	7	59	1	26	6	21	1	59	9	37
3	24	11	10	6	58	1	53	7	20	0	47	5	48	1	25	9	2
3	12	11	0	6	50	1	16	6	42	0	8	5	15	0	51	8	27
3	2	10	50	6	40	0	40	6	5	11	30 Sera	4	42	0	17	7	52
2	52	10	38	6	25	0	2	5	25	10	48	4	7	11	40 Mattino	7	13
2	45	10	27	6	11	11	30 Mattino	4	51	10	12	3	34	11	6	6	38
2	38	10	15	5	54	10	57	4	16	9	33	3	1	10	32	6	3
2	33	10	2	5	33	10	24	3	40	8	56	2	25	9	54	5	23
2	26	9	48	5	11	9	53	3	7	8	21	1	42	9	19	4	46
2	20	9	34	4	49	9	23	2	35	7	49	1	17	8	43	4	9
2	13	9	19	4	27	8	55	2	3	7	11	0	42	8	8	3	34
2	7	9	4	4	2	8	27	1	32	6	37	0	6	7	31	2	56
1	59	8	47	3	36	7	58	1	1	6	6	11	31 Sera	6	55	2	19
1	50	8	28	3	8	7	28	0	27	5	26	10	49	6	13	1	37
1	41	8	10	2	41	7	1	11	57 Mattino	4	53	10	11	5	35	0	59
1	31	7	52	2	14	6	33	11	26	4	19	9	32	4	56	0	20
1	20	7	33	1	46	6	4	10	55	3	56	8	52	4	16	11	40 Mattino
1	8	7	13	1	18	5	37	10	25	3	13	8	10	3	35	11	0
)	51	6	52	0	52	5	8	9	54	2	40	7	29	2	54	10	19
)	37	6	30	0	23	4	39	9	22	2	5	6	46	2	12	9	38

OSSERVAZIONI

DELLE

COMETE FABRY, BARNARD E BROOKS (I^a 1886)

FATTE

ALL' EQUATORIALE DI MERZ DELL' OSSERVATORIO DI TORINO

del Dott. Francesco Porro

I.

Prima di intraprendere uno studio regolare del nuovo equatoriale di Merz e del micrometro filare annesso, ho creduto opportuno di fare alcune osservazioni ai micrometri circolari, i quali, com'è noto, non esigono che l'istrumento sia perfettamente rettificato, potendo essere applicati a qualunque cannocchiale, colla sola condizione che questo resti immobile durante ogni passaggio degli astri che si vogliono fra loro confrontare. Il signor Direttore dell'Osservatorio presentò già a codesta Accademia due Note relative a questi micrometri (1), uno dei quali è ad anello semplice, l'altro ad anello doppio; ma i valori dei raggi, essendo stati da lui determinati, prima dell'arrivo dell'equatoriale, al cercatore di comete, collocato nella piccola cupola di Est, sopra la torre meridiana, dovevano essere nuovamente dedotti da osservazioni all'equatoriale di Merz, come è accennato nella prima di dette Note. Ho quindi eseguito una nuova serie di misure nelle notti del 24 aprile e del 4 maggio, osservando i passaggi di singole stelle lungo un diametro dell'anello. Questo metodo, che manifestamente è il più semplice possibile, dà immediatamente il diametro cercato, mediante la formula

$$d = 15\ t \cos \delta\,,$$

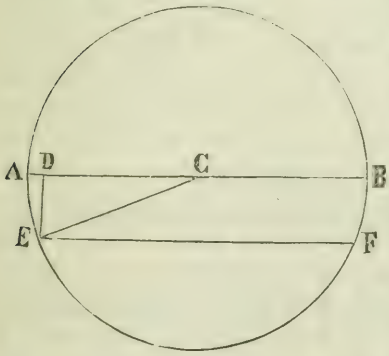
dove t è il tempo occupato dalla stella nel percorrere l'anello

(1) Volume XIX.

e δ la declinazione della stella. Al valore che si ricava non occorre applicare altra correzione che quella dovuta alla rifrazione, la quale si può rendere costante, ed eguale a $-\frac{d}{3600}$, se si osserva una stella vicina al meridiano, e non più lontana di 20° dallo zenit, perchè in questo caso si può ritenere che le grandezze angolari degli oggetti osservati si contraggano appunto di $\frac{1}{3600}$ del loro valore, così nel senso verticale come nell'orizzontale (1).

Non è il caso di applicare la correzione dovuta alla curvatura del parallelo, perchè questa incomincia a diventare sensibile sulla quinta cifra decimale del logaritmo solo per declinazioni maggiori di quelle delle stelle da me adoperate.

Per assicurarmi che i passaggi fossero veramente centrali, ho cercato di leggere il circolo di declinazione nella posizione esattamente intermedia fra quelle che corrispondono ai due paralleli tangenti all'anello superiormente ed inferiormente; ma ho dovuto riconoscere che, per l'imperfezione delle letture e per la complicata e difettosa trasmissione dei movimenti attraverso a ruote dentate, ciò mi riusciva men sicuro che colla semplice stima dell'occhio. E per quanto codesta possa sembrare grossolana, non è difficile dimostrare che l'errore da essa prodotto è trascurabile di fronte a quelli che si commettono nell'osservare gli appulsi.



Sia infatti AB (fig. 1) il diametro vero dell'anello, EF la corda descritta dalla stella, per inesatta collocazione dell'istrumento. Conducendo la ED, perpendicolare comune ad AB e ad EF, è chiaro che AD è la quantità di cui viene ad essere diminuito il raggio per un errore di puntata uguale a DE. Ora, se chia-

(1) La legge di contrazione degli archi celesti verticali per rifrazione può essere rappresentata abbastanza bene dalla formola $0{,}00028\ (1+\mathrm{tg}^2\zeta)$, dove ζ indica la distanza zenitale. Il coefficiente numerico dà la misura della contrazione orizzontale, che si può ritenere sensibilmente costante sino verso i sessanta gradi dallo zenit, mentre l'effetto di ζ sulla contrazione verticale incomincia a mostrarsi verso i 20°.

miamo α l'angolo ACE, sarà $DE = \sin\alpha$, $AD = 1 - \cos\alpha$. Poniamo ad esempio $DE = \frac{1}{10}$ del raggio: avremo $AD = \frac{1}{200}$, errore insignificante, rispetto a quelli che si commettono apprezzando i secondi, ancorchè si sia a bella posta esagerato nell'assumere un valore di DE, che è di molto superiore a quello che praticamente si può aspettare in una puntata.

I risultati da me ottenuti sono riassunti nei due quadri seguenti:

Anello doppio — Aprile 24.

NOME DELLA STELLA	Declinazione Boreale	Grandezza	Numero delle osservazioni	Raggio dell' anello grande	Raggio dell' anello piccolo
δ Leonis	21° 8′, 9	2-3	4	8′ 36″, 3	4′ 36″, 3
17 H. Can. Ven.	37 45, 0	5-6	4	8 33, 6	4 36, 4
Anonima	37 45, 0	9	8	8 35, 2	4 35, 8
Anonima	32 45, 0	7	4	8 36, 4	4 36, 0
Anonima	32 42, 0	7-8	4	8 36, 8	4 38, 1

Anello semplice — Maggio 4.

NOME DELLA STELLA	Declinazione Boreale	Grandezza	Numero delle osservazioni	Raggio dell' anello
α Ursae Majoris	62° 22′	2	8	3′ 15″, 4
Anonima	62 16	7	4	3 14, 2
ζ Ursae maj. pr.	55 31	2	4	3 15, 6
Anonima	55 30	9	4	3 14, 6

Di qui dedussi, previa l' accennata correzione per la rifrazione, i seguenti valori definitivi dei raggi:

Micrometro doppio { Anello maggiore $r = 8' \, 35'', 46$. Errore probabile $= \pm 0,157$.
Anello minore $r' = 4 \; 36, 31$. Errore probabile $= \pm 0,083$.

Micrometro semplice $r'' = 3 \; 14, 90$. Errore probabile $= \pm 0,046$.

II.

Le osservazioni di comete delle quali rendo conto nella presente Nota abbracciano il periodo di tempo dal 30 marzo al 4 maggio 1886, durante il quale le condizioni atmosferiche singolarmente avverse, e le difficoltà riscontrate nell'uso dell'equatoriale non mi permisero di determinare oltre a 14 posizioni, quattro della cometa di Barnard, sei di quella di Fabry e quattro della prima di Brooks. Le misure si fecero nel modo ordinario, osservando ad orecchio i passaggi della cometa e di una stella opportunamente scelta, e prendendo i tempi sopra un cronometro siderale di Kohlschitter, confrontato prima e dopo le osservazioni col pendolo normale Dent dell' Osservatorio (1). Ebbi cura di fare sempre due serie di osservazioni, nelle quali le corde descritte dai paralleli della cometa e della stella occupassero posizioni simmetriche rispetto al centro, respingendo le osservazioni che per una causa qualsiasi non rispondessero a questa condizione; e non tralasciai alcuna di quelle precauzioni che sono consigliate per assicurare il miglior esito delle misure.

Quanto alla scelta delle stelle di comparazione, essa fu affatto arbitraria, non avendo io a mia disposizione al momento delle osservazioni la *Durchmusterung* di Argelander, che avrebbe potuto indicarmi le stelle meglio determinate. Mi sono unicamente lasciato guidare da due criterii: primo, che la stella fosse

(1) Le osservazioni di maggio furono fatte con un cronometro tascabile di Frodsham a tempo medio.

il meno possibile lontana dalla cometa, specialmente in declinazione; secondo, che fosse piuttosto brillante e facile a riconoscersi in ogni futura ricerca, sia sulle carte sia sul cielo.

Ciò rese necessario un lavoro abbastanza lungo di identificazione delle stelle, che fu eseguito con somma cortesia e premura dal professore Millosevich, astronomo all' Osservatorio del Collegio Romano.

Le distanze zenitali quasi sempre molto grandi delle comete durante le osservazioni (60-70 gradi per la Fabry, 75-80 per la Barnard) mi imposero di calcolare con tutta l'esattezza le correzioni dovute alla rifrazione atmosferica; delle quali è già tenuto conto nelle differenze di ascensione retta e di declinazione qui sotto riferite.

Le coordinate della cometa si sono calcolate, e scritte nelle relative colonne, dove si potè verificare l'esistenza in qualche catalogo della stella di comparazione: ma in alcuni casi mi sono limitato a indicare il luogo della stella nella *Durchmusterung*, giusta l'uso comune, quando trattasi di stelle non osservate. Ciò rende possibile per l'avvenire la determinazione diretta di queste stelle, od il loro riferimento ad altre stelle vicine, mediante il micrometro filare. L'ultima stella, che servì il 4 maggio per la cometa di Brooks, è assai piccola, e quindi non trovasi in Argelander.

RISULTATI DELLE OSSERVAZIONI

Cometa Fabry.

1886	Tempo medio di Torino	Δα (☉ − ✳)	Δδ (☉ − ✳)	Confronti	α appar. ☉	Logaritmo del fattore parallattico in α	δ appar. ☉	Logaritmo del fattore parallattico in δ	✳
Marzo 30	$16^h\ 25^m\ 53^s$	+14m 15s, 38	−5′ 7″,2	3	$23^h\ 17^m\ 49^s$,48	9,7239n	+38° 12′ 38″,5	0,7164	1
31	16 42 22	+ 0 33, 81	−4 1,0	8	23 18 13,84	9,7268n	+38 27 58,1	0,6856	2
Aprile 2	15 48 34	− 1 2, 38	−0 59,5	8	—	—	—	—	3
10	15 39 3	− 2 6, 30	−0 20,8	8	—	—	—	—	4
13	14 44 17	+ 0 14, 52	−0 7,5	8	23 41 37,57	9,7048n	+40 16 48,5	0,7976	5
14	15 41 16	+ 1 14, 91	+0 56,6	8					6

Cometa Barnard.

1886	Tempo medio di Torino	Δα (✳ − ☉)	Δδ (✳ − ☉)	Confronti	α appar. ☉	Logaritmo del fattore parallattico in α	δ appar. ☉	Logaritmo del fattore parallattico in δ	✳
Aprile 1	$8^h\ 16^m\ 32^s$	$-\ 0^m\ 50^s,81$	$+0°47'',1$	7	—	—	—	—	7
2	8 7 42	− 0 51 ,86	−3 56 ,7	8	—	—	—	—	8
24	17 48 53	+ 4 44 ,71	−5 4 ,2	6	$1^h\ 40^m\ 37^s,30$	9,4761n	+39°42'53'',0	0,8241	9
Maggio 4	14 55 52	+ 0 11 ,19	−9 16 ,5	8	1 39 42 ,53	9,4830n	+40 15 19 ,2	0,8236	10

Prima Cometa Brooks.

Maggio 1	$11^h\ 24^m\ 38^s$	$+\ 2^m\ 28^s,49$	$+12'\ 9'',2$	4	$0^h\ 52^m\ 18^s,00$	9,9174n	+60°17'56'',2	0,9172	11
1	13 30 23	+ 3 9 ,28	+ 9 24 ,4	8	0 52 58 ,79	9,7536n	+60 15 11 ,4	0,8224	11
2	12 54 43	+ 1 4 ,24	+ 1 31 ,7	8	1 0 9 ,41	9,8239n	+59 43 21 ,7	0,8643	12
4	10 9 5	− 1 2 ,67	− 1 0 ,0	6	—	—	—	—	13

Posizioni medie delle Stelle di comparazione.

✳	α 1886,0	Riduzione al luogo apparente	δ 1886,0	Riduzione al luogo apparente	AUTORITÀ
1	23h 3m 34s,69	$-\ 0^s,59$	+38°17'52'',1	− 6'',4	Radcliffe I (1845, 0) N° 5973.
2	23 17 40 ,62	− 0 ,59	+38 32 5 ,5	− 6 ,4	Weisse, Catalogus ex Zonis Regiomontanis, II, (1825) Hora XXIII, 330.
3	—	—	—	—	Durchmusterung + 38°,4998 (9^m,4).
4	—	—	—	—	D M + 40°, 5125 (9^m,4).
5	23 41 23 ,43	− 0 ,38	+40 17 3 ,1	− 7 ,1	Weisse II Hora XXIII, 857.
6	—	—	—	—	D M + 40°, 5159 (9^m,5).
7	—	—	—	—	D M + 30°, 308 (8^m,9).
8	—	—	—	—	D M + 31°, 342 (8,9).
9	1 35 52 ,99	− 0 ,40	+39 48 5 ,5	− 8 ,3	Radcliffe I, 508.
10	1 39 31 ,74	− 0 ,40	+40 24 45 ,0	− 9 ,3	Weisse II, Hora I, 863.
11	0 49 49 ,96	− 0 ,45	+60 5 56 ,1	− 9 ,1	γ Cassiopejae, Berliner Astronomisches Jahrbuch.
12	0 59 5 ,65	− 0 ,48	+59 41 59 ,6	− 9 ,6	Krüger, Astr. Gesell. Zon. 130, 131, 663.
13	—	—	—	—	La stella non è in D M. Grandezza inferiore alla Decima.

Note sull'aspetto fisico delle Comete.

Cometa Fabry.

Marzo 30. Sereno splendido. Cometa bella, splendente, con nucleo fusiforme, aureola larga e densa, coda aperta a ventaglio. Appulsi sicuri.

Marzo 31. Nel crepuscolo del mattino la cometa sembra alquanto più debole e più diffusa di ieri. Nucleo di forma più rotonda.

Aprile 2. La Cometa ha un nucleo grosso, ben definito, circondato da densa chioma; la coda si protende nel campo del refrattore per un tratto superiore al diametro dell'anello piccolo (4 minuti e mezzo), e sembra divisa in due da una striscia nera, disposta secondo l'asse. Traccia di un getto luminoso dal nucleo. La parte anteriore della coda è molto più luminosa e meglio definita della posteriore.

Aprile 10. La Cometa ha un nucleo grosso come una stella di terza grandezza, circondato da una densa chioma che si incurva convessamente all'attacco anteriore della coda. Questa, osservata coll'oculare di minimo ingrandimento, è magnifica, la parte precedente più lunga e ben definita, la seguente più rara, aperta a ventaglio, e breve. Non vedo traccie di getto luminoso dal nucleo. Linea nera marcatissima nell'asse della coda.

Aprile 13. L'aspetto della Cometa è assai mutato. Nucleo ancora come prima, rotondo, con folta chioma e senza getto: coda lunghissima, uniforme, ben definita *da ambo le parti*, in forma di una parabola, della quale il nucleo è prossimamente il fuoco. Non vedo più traccie della linea nera nell'asse della coda, ma la luminosità è costante in ogni sezione normale all'asse stesso, degradando insensibilmente coll'allontanarsi dal nucleo.

Aprile 14. L'aspetto della Cometa mi sembra a un dipresso uguale a quello di ieri; non oso descriverlo, perchè il cielo è brutto assai. Nucleo troppo diffuso; appulsi mal sicuri.

Cometa Barnard.

Aprile 2. La Cometa è molto debole, e quasi si perde nelle nebbie dell'orizzonte; nucleo stellare, che io stimo di 7ma ad 8va grandezza. Intorno al nucleo un'aureola densa, rotonda, di un minuto e mezzo di diametro; traccie di coda verso il Nord, non abbastanza sicure, perchè si possa determinarne la direzione.

Aprile 24. Cometa piccola e brutta per luce lunare prima, poi per il crepuscolo. Osservazione cattiva.

Maggio 4. Cometa splendida. Coda lunga circa un grado, sottile, diretta, con due codette laterali assai più brevi, divise dalla principale mediante intervalli oscuri marcatissimi. Nucleo stellare.

Cometa Brooks I.

Maggio 1. Appulsi malsicuri. Non vedo concentrazione da poter considerare come nucleo.

Maggio 2. Appulsi cattivi. Massa nebulare senza nucleo.

Maggio 4. Campo pieno di stelline piccolissime. A $9^h\ 25^m$ circa (tempo medio di Torino) una di queste, di grandezza inferiore alla decima, è occultata dalla Cometa, che sembra una nebulosità informe, attraverso alla quale la stella si discerne perfettamente.

SULLE

FORZE ELETTROMOTRICI

DI CONTATTO FRA LIQUIDI

del Prof. Stefano Pagliani

Scopo della presente Nota si è di esporre la prima parte di una serie di ricerche intorno alle forze elettromotrici, che si sviluppano al contatto dei liquidi. È questo un problema stato cimentato da parecchi sperimentatori sotto speciali punti di vista, ma le determinazioni che si hanno al riguardo, non molto numerose, non permettono ancora di risolvere talune questioni che si presentano in questo fenomeno, in apparenza molto semplice, ma la cui indagine offre parecchie difficoltà.

Esiste veramente una forza elettromotrice al contatto di due liquidi, come al contatto di due metalli, o non si deve piuttosto attribuire lo sviluppo di elettricità in queste coppie, così semplici, al contatto dei metalli, che servono di elettrodi, coi liquidi stessi? E se esiste, come si ammette ormai in modo non dubbio, questa forza elettromotrice al contatto dei liquidi, quale ne è la sua origine? Si deve considerarla come dovuta ad una differenza di potenziale che si produca nei due liquidi per il semplice contatto, oppure non la si deve attribuire a processi chimici, o a processi fisici di diffusione? È in questi processi o altrove che deve ricercarsi l'equivalente del lavoro della corrente prodotta da queste coppie, e richiesto dalla legge della conservazione dell'energia? Tutte queste questioni si sono presentate a volta a volta ai fisici che si sono occupati di questo interessante problema.

Fu il Nobili (*Ann. Chim. Phys.* 1825, XXXVIII, 240) il primo a dimostrare sperimentalmente l'esistenza di una forza

elettromotrice al contatto dei liquidi, dando all'elemento Becquerel una disposizione tale, da far vedere come si potesse ottenere una corrente anche soltanto fra acido nitrico e potassa, evitando il contatto del platino coll'acido e coll'alcali, al qual contatto Davy attribuiva la produzione di elettricità. Il Nobili emise allora l'opinione che le correnti prodotte in queste coppie abbiano una origine analoga a quella delle correnti termoelettriche, e che il lavoro della corrente trovi il suo equivalente nel calore assorbito dallo esterno. Questa supposizione mi sembra trovare una affermazione nelle sperienze di Peltier (*Institut*, V, 159), il quale avendo misurato contemporaneamente le variazioni di temperatura e le correnti che si producono nell'azione dell'acqua sulle diverse soluzioni saline trovò che la corrente, quantunque più debole, non era mai affatto nulla, anche quando si osservava abbassamento di temperatura. A tale proposito credo utile citare anche delle recenti esperienze di E. Doumerc (*Étude sur l'osmose des liquides*, Bordeaux, 1881). In esse, come dice l'autore stesso, non si trattò di misure; si osservò soltanto lo spostamento prodotto nel mercurio di un elettrometro capillare di Debrun per il passaggio di una corrente dovuta al contatto di una soluzione salina coll'acqua. Egli trovò che sempre si ha produzione di elettricità nel fenomeno della diffusione, e l'attribuisce appunto ad un effetto termico dovuto alla diluizione della soluzione, la quale avviene ora con sviluppo, ora con assorbimento di calore. Paragonando il senso della corrente coll'effetto termico prodotto dalla diluizione di un sale arrivò al risultato che il senso della corrente cambia coll'effetto termico. Così le sostanze, che sviluppano calore sciogliendosi, danno una corrente in senso contrario a quello della corrente data dai sali che assorbono calore. È vero che nei suoi confronti si servì del calore di soluzione e non di quello di diluizione, ma egli lo giustifica in parte con ciò che le soluzioni da lui adoperate essendo concentratissime, il sale non aveva ancora prodotto tutto l'effetto termico che può produrre nello sciogliersi in 200 p. d'acqua.

L'opinione del Nobili è stata appoggiata anche da Paalzow (*Pogg. Ann. Jubelband*, 1874). Ammettendo tale modo di vedere, la forza elettromotrice al contatto dei liquidi potrebbe essere dovuta ad una differenza di potenziale, che si produrrebbe in due liquidi per il semplice fatto del contatto, e non sarebbe necessaria per ciò la possibilità di una azione chimica fra i due liquidi stessi.

I fisici, i quali per primi proseguirono le ricerche del Nobili si proposero di verificare se era necessaria un'azione chimica per la produzione di elettricità al contatto di due liquidi, o se questa poteva avvenire anche senza quella. Becquerel considerava la forza elettromotrice del suo elemento come esclusivamente dovuta all'azione chimica fra acido nitrico e potassa, e ammetteva senz'altro che le forze elettromotrici del platino, dell'oro e in generale delle sostanze non attaccabili siano nulle o per lo meno uguali nella maggior parte dei liquidi. In realtà egli non l'ha dimostrato rigorosamente. Anzi adoperando nella sua coppia degli elettrodi di platino, d'oro, di carbone ha trovato dei valori differenti per la forza elettromotrice. Però questo nemmeno proverebbe il contrario, poichè se l'acido nitrico non era perfettamente puro, ma conteneva traccie di acido cloridrico, il platino poteva esserne intaccato, così l'oro, come pure questo se non era perfettamente puro; e d'altra parte il carbone poroso tenendo in sè assorbita una certa quantità di ossigeno dell'aria dà facilmente luogo a processi d'ossidazione nell'acido nitrico, i quali poi si producono anche facilmente in questo, quando è concentrato, come era il caso delle sperienze di Becquerel, ed esposto all'azione della luce. Quindi a contatto di questi elettrodi potevano prodursi dei processi chimici, sede di forza elettromotrice, senza che perciò non si possa concludere che nel contatto dei liquidi con sostanze inattaccabili non si abbia forza elettromotrice. A questo proposito noterò che Nobili (*loc. cit.*) nella sua Memoria sull'elemento Becquerel dice che l'esperienza gli aveva insegnato ad evitare l'uso degli acidi forti attorno a piccole lamine di platino, perchè è molto più difficile conservarle omogenee, che nelle soluzioni saline. Becquerel trovò poi che nel suo elemento si produce una corrente intensa dalla potassa attraverso la parete porosa verso l'acido nitrico, e che se a questo si sostituisce acido solforico si ottiene una corrente più debole, e più debole ancora, ma diretta in senso contrario, se si sostituisce la potassa o l'acido nitrico coll'acqua. Questi fatti sembrerebbero dimostrare che la sorgente di elettricità risiedesse nell'azione chimica dei due liquidi, ma non escludono l'azione degli elettrodi.

Fechner (*Pogg. Ann.* XLII, 509, 1839, XLVIII, 259) ha istituito invece delle esperienze per dimostrare che la forza elettromotrice al contatto dei metalli coi liquidi è molto più con-

siderevole di quella dovuta al contatto dei liquidi. Egli ha ottenuto per *F. E.* dei seguenti elementi i valori:

$$Pt \mid KNO^3 + KNO^3 \mid KOH + KOH \mid HNO^3 + HNO^3 \mid KNO^3 + KNO^3 \mid Pt = 0.140$$

$$Pt \mid KOH + KOH \mid KNO^3 + KNO^3 \mid HNO^3 + HNO^3 \mid KNO^3 + KNO^3 \mid HNO^3 + HNO^3 \mid Pt = 8.644$$

e ne dedusse che la *F. E.* della coppia $KNO^3 \mid HNO^3$ è 60 volte minore di quella dell'elemento $Pt \mid KOH \mid HNO^3 \mid Pt$. Ora questa deduzione non è per nulla rigorosa. Volendo tener conto tanto dei contatti fra metalli e liquidi, quanto di quelli fra i liquidi, il secondo valore rappresenterebbe la *F. E.* dell'elemento $Pt \mid KOH + KOH \mid KNO^3 + KNO^3 \mid HNO^3 + HNO^3 \mid Pt$ e non di $Pt \mid KOH \mid HNO^3 \mid Pt$. Dalle successive esperienze del Fechner stesso e da quelle di Worm-Müller risulta non essere ammessibile che al contatto fra la soluzione di un alcali e quella del sale corrispondente, e fra quella di un acido e quella del sale corrispondente non esista forza elettromotrice. Ed anche volendo ammettere questo, tuttavia le condizioni del contatto fra platino e liquidi nel secondo elemento sono assai diverse da quelle del primo. Mentre in questo si può supporre che il platino rimanga affatto inattaccato dalla soluzione di salnitro, lo stesso non si può dire per l'acido nitrico, del quale Fechner non ci dice se lo abbia adoperato chimicamente puro. Se poi si vuol considerare come nulla la forza elettromotrice nel contatto del platino coi liquidi nei due elementi, o uguale ed opposta in ciascun elemento, il primo elemento sarebbe rappresentato da

$$KNO^3 \mid KOH + KOH \mid HNO^3 + HNO^3 \mid KNO^3 =$$
$$KOH \mid HNO^3 - (KOH \mid KNO^3 + KNO^3 \mid HNO^3) = 0{,}140$$

ed il secondo da

$$KOH \mid KNO^3 + KNO^3 \mid HNO^3 = 8{,}644;$$

quindi potremo scrivere:

$$KOH \mid HNO^3 = 0{,}140 + 8{,}644 = 8{,}780 \ ,$$

ciò che non inchiude alcuna contraddizione.

Nè maggior valore per dimostrare essere le forze elettromotrici fra metalli e liquidi notevolmente più grandi che quelle fra liquidi hanno le altre sperienze del Fechner, il quale avrebbe trovato che in una coppia formata da lamine d'uno stesso metallo, acqua e solfuro di potassio le forze elettromotrici vanno diminuendo coi diversi metalli seguenti, ordinati nel seguente modo: Platino, Rame, Bismuto, Antimonio, Stagno, Piombo, Zinco. All'infuori del Platino, gli altri metalli di tale serie hanno tutti tendenza a formare dei solfuri in contatto dei solfuri alcalini, e quindi si avrebbero qui dei processi chimici, che potrebbero essere origine di forza elettromotrice.

Anche il Poggendorff (*Pogg. Ann.* 1841, LIV, 353) in uno studio fatto sull'elemento Becquerel ha cercato di dimostrare che si ha forza elettromotrice nel contatto fra liquidi e metalli, supposti non attaccati da quelli. Egli trovò che un elemento Ferro, potassa, acido nitrico, Platino ha una forza elettromotrice almeno doppia di quella d'un elemento Platino, potassa, acido nitrico, Platino, quantunque, come egli afferma, la liscivia di potassa non eserciti alcuna azione chimica tanto sul ferro che sul platino. Ora se ciò si può dire del platino, non si può dire con ugual sicurezza del ferro. Il Poggendorff stesso indica nella sua Memoria la formazione visibile e rapida di un ferrato potassico in quella coppia quando si adoperi ghisa invece di ferro battuto, come è quello da lui adoperato per le sue determinazioni. Coll'acciaio si osserva soltanto una colorazione rossa, e col ferro questa colorazione si formava solo dopo lunghissimo tempo, e assai leggera. In tutti i casi poi si sviluppa sempre ossigeno, tanto col ferro, che col platino, che con altri metalli. Ora si sa che il ferro perfettamente puro è quasi sconosciuto, specialmente in forma di lamine. Quindi mi sembra non senza fondamento il dubbio che la maggior forza elettromotrice ottenuta col ferro nell'elemento Becquerel si possa attribuire ad un'azione chimica della potassa sul ferro.

D'altra parte altre esperienze del Fechner stesso lo condussero ad opinare non essere necessaria per la produzione della corrente un'azione chimica fra i liquidi a contatto, poichè egli ottenne forze elettromotrici in coppie di liquidi, fra i quali non è supponibile azione chimica. Quindi egli conchiudeva che tanto al contatto dei liquidi fra di loro, che in quello di essi coi metalli si produce una differenza di potenziale, come nel con-

tatto di due metalli; che se si vuole considerarla come dovuta al semplice contatto, allora conviene ammettere che in queste coppie, formate da liquidi e metalli, si stabilisca soltanto uno stato di equilibrio, ma che in grazia di questa differenza di potenziale al contatto dei due liquidi si producano degli effetti secondari (azioni chimiche o analoghe alle chimiche) fra i metalli ed i liquidi, per cui questo stato di equilibrio verrebbe tolto, e determinato e mantenuto l'efflusso di elettricità.

L'esistenza di una forza elettromotrice al contatto dei liquidi veniva poi anche confermata dalle ricerche successive di Buff (*Pogg. Ann.* 1848, LXXIII, 510), di Matteucci (*C. R.* 1851, XXXII, 145), dalle misure elettroscopiche di Kohlrausch (*Pogg. Ann.* 1850, LXXIX, 200), il quale però non le dava molta importanza, poichè aveva trovato nello studio della coppia Daniell che la forza elettromotrice fra solfato di Rame e solfato di Zinco o era nulla, o arrivava appena ad $^1/_{50}$ della forza elettromotrice totale di una Daniell, conclusione al certo non rigorosamente giustificata, potendo dipendere dai limiti di sensibilità delle misure elettroscopiche. Le determinazioni di Kittler e le mie conducono ad un valore di quella forza elettromotrice di circa $^6/_{100}$ di Daniell, come vedremo in seguito.

Stabilito ad ogni modo il fatto che nel contatto di due liquidi può prodursi una differenza di potenziale, i fisici si proposero un altro problema importante, quello di verificare se anche nei liquidi si verificasse la legge del Volta relativa alle forze elettromotrici di contatto nei metalli.

Fechner aveva trovato a questo riguardo dei risultati generalmente negativi, ma Wild (*Pogg. Ann.* 1858, CIII, 353) formando degli elementi di tre liquidi disposti per ordine di densità e a diretto contatto fra loro trovò che anche fra gli elettroliti si possono trovare dei gruppi, i cui termini obbediscono alla legge del Volta. Questi si ritrovano nella classe dei solfati neutri della formola MSO^4 con eccezione del solfato di ammonio, e Wild ordina i metalli di questi solfati sotto quel riguardo secondo la seguente serie: *K*, *Na*, *Mg*, *Mn*, *Fe*, *Ni*, *Co*, *Zn*, *Cu*, *Ag*. I termini di tali gruppi seguirebbero la legge del Volta qualunque sia la concentrazione delle soluzioni, uguale o non, quantunque le forze elettromotrici variino col variare della concentrazione delle soluzioni. Non seguirebbero invece detta legge le soluzioni di altri solfati, degli acidi in generale e quindi

anche dei sali neutri di uno stesso metallo con acidi diversi, ad eccezione dei sali aloidi del potassio.

Le ricerche proseguite collo stesso metodo dallo Schmidt (*Pogg. Ann.* 1860, CIX, 106) hanno confermato per i solfati la serie del Wild e per i nitrati hanno dato invece la serie: *Cu*, *Sr*, *Na*, *K*, *Mg*, *Co*, *Pb*, *Ba*, *Ca*, *Ag*, *Zn*, e per i cloruri la serie: *Ba*, *Cu*, *Ca*, *Mg*, *Fe*, *Na*, *K*, *Hg*, *Zn*, *Sr*. La seconda parte dei risultati dello Schmidt è infirmata della inesattezza del metodo indiretto, da lui adoperato per determinare la forza elettromotrice fra due liquidi. Difatti egli ammette che se tre soluzioni saline S, S_1, S_2 seguono la legge del Volta, allora interponendo fra S_1 e S_2 un acido, la forza elettromotrice dell'elemento, che ne risulta, misura quella di contatto fra S_1 e S_2; cioè se $S \mid S_1+S_1 \mid S_2+S_2 \mid S=O$ allora deve essere: $S \mid S_1+S_1 \mid A+A \mid S_2+S_2 \mid S=S_1 \mid S_2$.

Ora ciò non è esatto. Sarà la forza elettromotrice di questo elemento uguale a quella dell'elemento $S_1 \mid A+A \mid S_2+S_2 \mid S_1$ e non di $S_1 \mid S_2$.

Le determinazioni di Du Bois-Reymond (*Reichert's* u. *E. Du Bois-Reymonds Archiv.* 1867, 453) e quelle di Worm-Müller (*Pogg. Ann.* 1870, CXL, 114 e 380) hanno portato anch'esse un importante contributo allo studio delle coppie di liquidi ed hanno anch'esse dimostrato chiaramente che un'azione elettromotrice fra liquidi esiste, ed anche fra liquidi, che non sembrano poter agire chimicamente fra loro. Però da queste ricerche non ne veniva vantaggiata la questione della verifica della legge del Volta, come neppure da quelle anteriori, pure assai importanti, del Wüllner (*Pogg. Ann.* 1859, CVI, 454), nelle esperienze del quale parve si generassero correnti nella soluzione dei sali, ma probabilmente erano solo dovute al contatto d'una soluzione più diluita con una più concentrata dello stesso sale, e quelle posteriori di Bleekrode (*Pogg. Ann.* 1871, CXLII, 611), di Moser (*Wied. Ann.* 1878, III, 216), di Eccher (*N. Cimento* 1879 (3), V, 5), di I. v. Hipperger (*Wien. Anz.* 1880, n. 10, 148), di Alder Whrigt e C. Thompson (*Phil. Mag.* 1884 (5), XVII, 202, 377), i quali tutti in generale studiarono coppie di soluzioni, diversamente concentrate, a contatto fra loro e con uno stesso metallo, che non ne è intaccato.

Per provare se tre liquidi L_1 L_2 L_3 seguono la legge del

Volta, bisogna determinare le forze elettromotrici dei tre seguenti elementi:

$$M \mid L_1 + L_1 \mid L_3 + L_3 \mid M = e$$
$$M \mid L_1 + L_1 \mid L_2 + L_2 \mid M = e'$$
$$M \mid L_2 + L_2 \mid L_3 + L_3 \mid M = e''$$

se $e = e' + e''$, oppure $e - e' = e''$, allora i tre liquidi seguono la legge del Volta e si avrà:

$$L_1 \mid L_2 + L_2 \mid L_3 = L_1 \mid L_3 \,, \quad \text{oppure} \quad L_3 \mid L_1 - L_1 \mid L_2 = L_3 \mid L_2 \,.$$

Se quelle eguaglianze non sussistono, il gruppo di quei tre liquidi non soddisfa alla legge del Volta.

Il primo che abbia fatto una verifica di questo genere è il Kittler (*Wied. Ann.* 1881, XII, 572 e 1882, XV, 391). Dei risultati, a cui è giunto il Kittler, citerò qui soltanto quelli che si riferiscono all'argomento in questione. Egli essenzialmente si occupò di verificare se le soluzioni dei cloruri di diversi metalli, o di uno stesso cloruro a diverse concentrazioni poste a contatto con un altro liquido, una soluzione di $Cu\,SO^4$, acqua distillata, o una soluzione di $H^2\,SO^4$, presentavano la relazione ora indicata. E trovò difatti che la legge del Volta era verificata per molti cloruri colla soluzione di solfato di rame, e con l'acqua distillata, non colla soluzione di acido solforico. Se cioè nella 2ª delle equazioni ultime ora indicate L_2 e L_3 sono due soluzioni di due cloruri diversi, oppure due soluzioni diversamente concentrate di uno stesso cloruro, e L_1 è una soluzione di solfato di rame, o acqua distillata, detta equazione è soddisfatta.

Nelle mie ricerche mi sono proposto di verificare la legge del Volta per le forze elettromotrici di contatto fra le soluzioni di tre serie di sali principali, solfati, cloruri e nitrati dei diversi metalli. Nella presente Nota esporrò i risultati da me ottenuti nelle determinazioni fatte colle soluzioni dei solfati fra loro, e con soluzioni di acido solforico.

Metodo di misura. — Nella misura delle forze elettromotrici di contatto è necessario adottare un metodo, nel quale sia impedita la polarizzazione degli elettrodi e tale da permettere di fare la determinazione rapidamente, e, come si vedrà in se-

guito, nei primi istanti in cui i liquidi vengono a contatto. Due sono i metodi specialmente adoperati dai fisici, il metodo di compensazione e il metodo dell'elettrometro. Ho scelto il primo che è anche quello adottato dalla maggior parte degli sperimentatori che si occuparono di queste misure.

Il metodo di compensazione venne da me applicato nel seguente modo: Sia in D (fig. 1) la $F.\ E.$ compensante, in X quella da misurarsi, in R un reostato, in G un galvanometro, posti in circuito, come lo vuole il metodo di Poggendorff. Siccome si trattava di misurare delle forze elettromotrici assai piccole, ho introdotta una resistenza r_e nel tratto ZN; perchè allora si doveva, per ottenere la compensazione, introdurre nel tratto PN una resistenza maggiore, e quindi si poteva raggiungere una maggior approssimazione nelle misure. In tal modo detta R' questa ultima resistenza, detta r_i la resistenza interna della coppia, ottenuta la compensazione si potrà scrivere: $X = D \frac{R'}{R' + r_i + r_e}$, in cui D è la $F.\ E.$ compensante data da due coppie Daniell. Esse venivano, prima e dopo ogni serie di determinazioni di una $F.\ E.$ incognita, comparate con una coppia normale Kittler; ottenuta la compensazione, detta K la $F.\ E.$ della Kittler e R la resistenza introdotta, si ha $D = K \frac{R + r_i + r_e}{R}$ e quindi $X = K \frac{R'}{R} \frac{R + r_e + r_i}{R' + r_e + r_i}$.

In tal modo la $F.\ E.$ incognita veniva direttamente espressa prendendo per unità la Kittler, e siccome questa è stata preparata e adoperata con tutte le norme indicate dal Kittler, se ne poteva dedurre il suo valore in volts.

Per determinare r_i, dopo aver compensata la Kittler con la Daniell, si sostituiva ad r_e un grosso filo di rame; quindi detta ρ la resistenza necessaria per ottenere di nuovo la compensazione si ha: $D = K \frac{\rho + r_i + r_e}{\rho}$, dalla quale e dalla seconda precedente $r_i = \frac{\rho r_e}{R - \rho}$.

Da quanto si è detto sul principio del metodo si comprenderà facilmente la disposizione generale dell'apparecchio rappresentato nella fig. 2, dove si ritrovano le stesse lettere della fig. 1 nelle posizioni corrispondenti. Le due linee punteggiate

$C_1 P'$ e $p P'$ rappresentano due conduttori mobili, per poter inserire nel sistema di circuito ora la Kittler ora la coppia di $F. E.$ incognita, secondo che si tratta di compensare l'una o l'altra. P e P' rappresentano due pozzetti di mercurio.

Per non lasciare chiuse sopra se stesse, che per un brevissimo tempo tanto la coppia compensante che quella da misurarsi, era necessario poter introdurre in circuito la prima coppia e poscia la seconda e il galvanometro soltanto per il tempo necessario per osservare la deviazione dell'ago. A tale scopo servono i due contatti a mercurio in P e P' e l'interruttore, pure a pozzetti di mercurio, M, rappresentato schematicamente nella fig. 3. È desso costituito da due paia di grossi fili di rame, A, B e C, D, fissati per mezzo di due viti di pressione a due spranghette a' b', c' d', le quali sono portate da una traversa TT' di ebanite. I quattro fili portano superiormente dei serrafili, per mezzo dei quali si possono mettere in comunicazione fra loro, a due a due.

Alla traversa TT' è fissata un'asta, portata da una funicella, che si avvolge sopra una carrucola, e per mezzo della quale la si può innalzare o abbassare in modo da far immergere le estremità dei fili di rame entro a quattro pozzetti di mercurio, a, b, c, d, praticati in uno zoccolo di legno. La lunghezza dei fili A, B è maggiore di quella di C, D, cosicchè quando si lascia discendere la traversa TT', pescano prima nel mercurio i fili A, B e poi C, D, e quando la si innalza, lasciano il mercurio prima i fili C, D e poi A, B. Dando ora uno sguardo alle comunicazioni nella fig. 2 si comprende subito che quando si abbassa la parte mobile dell'interruttore M si stabilisce prima la comunicazione $a\ b$, per cui vien introdotta nel sistema di circuiti la coppia compensante, poscia la comunicazione $c\ d$, per cui viene introdotto il galvanometro e la coppia a compensarsi. Quindi alzando la traversa TT' si toglie prima la comunicazione $c\ d$, e quindi il galvanometro e la coppia a compensarsi dal circuito, poscia la comunicazione $a\ b$ e quindi la coppia compensante. Siccome questo movimento di saliscendi si può fare molto rapidamente, così si comprende come le due coppie rimangano chiuse soltanto per il tempo brevissimo dell'osservazione della deviazione.

Dirò ora delle singole parti dell'apparecchio.

Coppie Daniell. — Sono coppie ordinarie di modello medio. Tanto queste quanto l'elemento normale non si adoperavano che un quarto d'ora almeno dopo di averle preparate.

Elemento normale. — Si è scelto l'elemento Kittler (1882, *Münchner Ber.*, 467). È desso costituito da rame puro e zinco amalgamato puro; acido solforico di peso specifico 1,075 a 18°, soluzione di solfato di rame di p. s. 1,19-1,20. L'acido solforico e il solfato di rame sono messi in comunicazione mediante un sifone ripieno del primo. Nel preparare il mio elemento normale mi sono tenuto strettamente alle norme date dal Kittler. La lamina di rame, che doveva servire da polo positivo, è stata ricoperta di rame puro per via elettrolitica da una soluzione di solfato di rame puro. Il cilindro di zinco proveniva dalla fabbrica Trommsdorff, e fu amalgamato con mercurio depurato. La coppia non rimaneva mai composta che per il breve tempo, per il quale doveva servire alle determinazioni. In questo modo credo poter ammettere che il mio elemento normale presentasse tutte le qualità dell'elemento normale Kittler. La sua forza elettromotrice è molto costante, solo dopo 24 ore si osserva una diminuzione di 0,5 a 0,8 %. Delle variazioni di temperatura comprese fra 17°,5 e 24°, non ne alterano sensibilmente la *F. E.*, mentre quella dell'elemento Latimer-Clark ne è molto influenzata. Kittler, fondandosi sull'antico valore della Latimer-Clark *volts* 1,457 a 15°,5, aveva dedotto per il suo elemento il valore *volts* 1,195. Calcolandolo invece sul valore più recente *volts* 1,437 della Latimer-Clark, trovato da lord Raylegh e Mrs. Sidgwick, si otterrebbe per valore della Kittler *volts* 1,177.

Resistenza r_e. — Non potendo disporre che di un reostato, era dessa formata da un rocchetto di filo di rame sottile. Due determinazioni di resistenza diedero

a 15°, 3 $r'_e = 99{,}700$ *U. S.* $= 105{,}682$ ohms.

a 24°, 3 $r''_e = 102{,}840$ *U. S.* $= 109{,}010$ »

Siccome il mio reostato è graduato in unità Siemens e d'altra parte qui non si tratta di misure di resistenza, ho calcolato da quei dati una formola che mi dava i valori di r_e alle diverse temperature, a cui ho osservato.

Reostato. — È della casa Siemens e Halske di Berlino e dà i decimi di unità. Siccome si trattava qui di determinare dei rapporti fra resistenze, così mi limitai a verificare il valore relativo dei diversi rocchetti. Avrei voluto nelle mie misure usare un reocordo, ed anzi lo adoperai da principio, ma poi dovetti

desistere, perchè durante il tempo richiesto dall'uso di un reocordo la forza elettromotrice va variando in modo che ho creduto ottenere maggior esattezza, contentandomi di minor approssimazione. Del resto anche per le forze elettromotrici più piccole da me misurate l'approssimazione di $^1/_{20}$ di unità Siemens, che è la maggiore di cui potessi disporre, mi permetteva ancora di raggiungere l'approssimazione di $^1/_{1000}$ di volt, e d'altra parte non sempre aveva la sensibilità, che richiede l'uso di un reocordo.

Galvanometro. — È un galvanometro a riflessione del Thompson della casa Elliott di Londra, adoperato con calamita compensante. La sua resistenza interna è uguale a 0,521 33 ohms a 20°. La scala a lampada e divisa in millimetri, distava dall'ago circa 1 metro. Si osservavano gli spostamenti dell'immagine della fiamma con una lente, cosicchè potevasi apprezzare uno spostamento di $^1/_5$ di millimetro. Per dare un'idea della sensibilità che poteva ottenere con questo strumento dirò che p. es. nella compensazione dell'elemento normale colle due Daniell per una differenza in più o in meno di $^1/_{10}$ di *U. S.* nella resistenza *R* aveva ancora uno spostamento di mm. 1, 5. Ora quella differenza corrisponde a circa $^1/_{1170}$ di volt, e quindi potendo apprezzare uno spostamento di $^1/_5$ di millimetro, si deduce che lo strumento mi permetteva di apprezzare delle differenze di $^1/_{11000}$ di Volt in più o in meno. Debbo però subito notare che in alcuni pochi casi, quando si trattava di soluzioni saline concentratissime, l'approssimazione non era così grande, perchè allora anche con variazioni di 0, 2 *U. S.* in più o in meno nella resistenza *R'* non si aveva ancora uno spostamento visibile nella immagine. Si prendeva allora il medio valore fra i due, per i quali si aveva deviazione in un senso o nell'altro.

Disposizione pel contatto dei liquidi. — Ed ora veniamo alla parte più importante e più difficile dell'apparecchio. Come si deve far avvenire il contatto fra i due liquidi? Quali sono gli elettrodi da adoperarsi? Queste due questioni furono risolte dai diversi sperimentatori in modo diverso.

Come elettrodi Wild e Schmidt adoperarono delle capsule metalliche, che stavano a diretto contatto con uno dei liquidi, e così in generale si usarono dalla maggior parte degli sperimentatori sopra citati delle lamine o dei fili metallici in contatto coi liquidi. Solo Du Bois-Reymond e sul suo esempio Worm-Müller adoperarono altri elettrodi, costituiti da due lastre di zinco amal-

gamate immerse in una soluzione concentrata di solfato di zinco. Anzi Worm-Müller andò più oltre e ammise senz'altro che nel contatto fra l'acqua e gli altri liquidi non si abbia forza elettromotrice, fondandosi sul fatto che Kohlrausch non ha trovato differenza di potenziale nel contatto dell'acqua coll'acido nitrico, e che le correnti termoelettriche fra acqua ed altri liquidi sono debolissime. Ora contro una tale supposizione stanno diversi altri fatti. Faraday (*Exp. Res.*, Ser. 18) trovò che è l'acqua distillata, che per attrito con altre sostanze produce la massima tensione e secondo Quincke (*Pogg. Ann.* CVIII, p. I e CX, 308) le correnti prodotte nel passaggio di un liquido attraverso un diaframma presentano un'intensità notevole coll'acqua distillata. Becquerel col suo apparecchio, detto da lui depolarizzatore, ottenne delle correnti dal contatto dell'acqua con soluzioni saline; così Foucault nel contatto dell'acqua con acido solforico e con potassa, Mousson (*Bibl. univ.* 1839, XXI, 170) fra ammoniaca e acqua e fra acido nitrico e acqua. Ed oltre le sperienze sopra citate di Peltier abbiamo ancora quelle di Eccher (*loc. cit.*), le quali dimostrarono l'esistenza di una forza elettromotrice fra acqua e soluzioni saline, p. es. in un elemento: $Pt \mid H^2O \mid Pt\ Cl^1 \mid Pt$, dove il Platino si può considerare come affatto inattaccabile dai due liquidi che si trovano a contatto. Secondo questi fatti non è giustificata l'ammissione di Worm-Müller, e quindi i risultati da lui ottenuti sono soltanto apparentemente molto semplici, e non si possono per lo più considerare come relativi al contatto di soli due liquidi.

Nelle mie ricerche essendomi proposto di studiare le soluzioni saline di un gran numero di metalli, e desiderando realizzare per ogni coppia le condizioni identiche, ho scelto per gli elettrodi un metallo, che non presentasse reazioni chimiche con nessuna soluzione salina, e tale è appunto il Platino, e fatta a priori l'ipotesi, che l'esperienza poi, come dimostrerò in seguito, confermò, che non esiste forza elettromotrice al contatto di un metallo con un liquido che non vi agisca sopra chimicamente, ho posto gli elettrodi di Platino a diretto contatto coi liquidi a studiarsi, semplificando così d'assai le cose. Il Platino adoperai in alcune prime determinazioni sotto forma di laminette sottili, ma poi esclusivamente sotto forma di fili sottili. Nell'uso degli elettrodi di Platino si incontra però una difficoltà. Già Poggendorff (*loc. cit.*) aveva osservato per l'elemento Bec-

querel che non si ottengono gli stessi valori se si adopera per un elettrodo del Platino stato prima arroventato, o non. Kittler (*loc. cit.*) trovò che delle lamine di Platino trattate coll'acido nitrico e poi coll'acqua bollente e quindi arroventate non presentano la uniformità desiderabile in queste esperienze, tanto che egli preferì degli elettrodi di Rame e di Argento. Anch'io ebbi occasione di osservare che tanto colle lamine, quanto coi fili di Platino, quando si adoperano dopo averli arroventati sopra una fiamma a gas aerato non si ottengono valori concordanti con quelli che prima si ottenevano. Io credo che ciò sia dovuto alla poca purezza della fiamma del gas illuminante, come anche di quella dell'alcool ordinario, per cui si forma sul platino uno strato di sostanza estranea, che modifica le condizioni di contatto coi liquidi. E mi conferma in questa idea il fatto trovato da Poggendorff che, se la lamina di Platino, che si arroventava era quella che poi serviva da elettrodo nell'acido nitrico, l'arroventamento non aveva più alcuna influenza. L'acido nitrico toglierebbe rapidamente quello strato di sostanza deposta. Per evitare tale inconveniente, io dopo aver trattato le lamine e i fili di Platino coll'acido nitrico e poi coll'acqua distillata bollente, li lavai con acqua fredda, introdussi in alcool assoluto, ed ogni volta, dopo averli adoperati, subito li lavava con acqua distillata, e li introduceva nell'alcool. Per adoperarli li toglieva dall'alcool, lasciava evaporare questo un istante all'aria, e subito li introduceva nelle soluzioni saline. In tal modo poteva ottenere dei risultati concordanti in misure fatte ad intervalli di tempo.

Resta la seconda questione sul modo nel quale devono venire a contatto i due liquidi. Alcuni sperimentatori, fra i quali Fechner, Worm-Müller, Bleekrode, Kittler, in alcune loro determinazioni, posero i liquidi a diretto contatto fra loro sopra una superficie molto limitata, stabilendo la comunicazione fra i liquidi per mezzo di sifoni terminanti in estremità capillari. Altri, come Wild, Schmidt, Paalzow, fecero avvenire il contatto su una superficie più estesa disponendo i liquidi secondo la loro densità. Altri invece, come Becquerel e quelli che si occuparono dell'elemento Becquerel, Du Bois-Reymond, Moser, e quelli, che studiarono le forze elettromotrici fra soluzioni di diversa concentrazione, Kittler in alcune sue determinazioni, Bichat e Blondlot (*Journ. Phys.* 1883 (2), 533) fecero avvenire il contatto attraverso un setto poroso od una membrana. Worm-Müller asse-

risce invero doversi evitare la separazione dei liquidi mediante membrane o setti porosi, perchè possono dar luogo a forze elettromotrici speciali. Però secondo Kittler si ottengono uguali risultati tanto se i liquidi sono a diretto contatto, che quando sono separati da una membrana. Così pure Alder Whright e C. Thompson (*loc. cit.*) hanno trovato che per coppie formate da due soluzioni dello stesso sale, ma di differente concentrazione, con elettrodi metallici identici, i risultati, che si ottengono, non variano se si chiudono i sifoni, che uniscono i liquidi con membrane. Lo stesso fatto trovò Doumerc (*loc. cit.*) nelle sue esperienze sulla diffusione e osmosi. Le mie esperienze mi hanno dimostrato che se la presenza della carta pergamena può in qualche caso esercitare una piccolissima influenza, questa non dipende da forze elettromotrici speciali, dovute alla carta pergamena, ma dal fatto che attraverso questa il contatto avviene in condizioni, pel nostro scopo migliori, che direttamente. In generale gli sperimentatori hanno sempre cercato di ottenere delle superficie di contatto ben nette e determinate fra i liquidi, e la considerarono come una condizione indispensabile per ottenere dei buoni risultati. Paalzow (*loc. cit.*) trovò invece che tale condizione non sarebbe necessaria, e che si possono disturbare colla agitazione i contatti senza che varii la forza elettromotrice. Ora un fatto analogo fu pure da me riscontrato. Dopo un po' di tempo da che era avvenuto il contatto, cioè quando i due strati dei due liquidi in presenza mescolandosi avevano assunto un determinato stato di equilibrio, allora potevo scuotere il recipiente, nel quale si trovavano i liquidi, senza che ne variasse la forza elettromotrice. Mousson (*Die Physik*, § 1521) osservando giustamente che la vera azione fra i due liquidi può solo aversi nel primo istante in cui essi vengono a contatto, adoperò un metodo, che forse fra quelli finora proposti è il più diretto per studiare la semplice azione di contatto di due liquidi. Però esso non mi parve abbastanza pratico per studiare molte coppie di liquidi, realizzando sempre le stesse condizioni, specialmente per essere in esso le superficie di contatto troppo grandi. Difatti egli non ottenne con esso risultati concordanti.

In presenza di fatti così diversi, ho creduto dover fare delle esperienze apposite per trovare le condizioni migliori per studiare le forze elettromotrici di contatto ed ho tentato i diversi metodi adoperati finora.

Essendomi da principio proposto di usare il contatto diretto ho cominciato coll'adoperare dei sifoni, terminanti alle due estremità con un foro piccolissimo, per mettere fra loro in comunicazione i due liquidi. Quantunque i sifoni abbiano piccolissima apertura, tuttavia non è facile nell'immersione di essi nei liquidi impedire che non avvenga un piccolo dislivello per cui si produca anche un piccolo movimento e rimescolio dei due liquidi. Volendo perciò determinare la forza elettromotrice nei primi istanti di contatto coi liquidi, l'uso dei sifoni non mi parve conveniente. Ricorsi quindi ad altre disposizioni, nelle quali potessi far avvenire il contatto in un dato istante e tosto misurare la forza elettromotrice. Dirò brevemente di queste disposizioni, non perchè abbiano importanza i risultati ottenuti con alcune di esse, ma perchè dall'andamento delle esperienze si può dedurre qualche idea intorno a quello che deve avvenire quando i due liquidi vengono a contatto.

Nella prima disposizione ho adoperato uno di quei piccoli e semplici apparecchi di Kipp, che in chimica servono alla determinazione dell'anidride carbonica. Essi sono costituiti da un recipiente di vetro, diviso in due scompartimenti, l'uno inferiore più grande, l'altro superiore più piccolo, messi fra loro in comunicazione mediante un brevissimo tubo di vetro, smerigliato internamente, che io poteva chiudere mediante un cilindretto di ebanite terminato a tronco di cono. Il compartimento superiore si apre in alto, come una boccia ordinaria; lateralmente nella parete del compartimento inferiore e piuttosto in alto si trova un'apertura munita di un piccolo collo di vetro. A questo adattava un tappo portante una laminetta o un filo di Platino, saldati con un filo di Rame; così pure al collo del compartimento superiore adattava un tappo con un foro, attraverso al quale passava liberamente il detto cilindretto di ebanite, e che portava l'altro elettrodo di Platino. Dopo aver messo a posto l'elettrodo inferiore si introduceva mediante un imbuto a lungo tubo il liquido di densità maggiore nel compartimento inferiore, si chiudeva la comunicazione e quindi si introduceva l'altro liquido. In tal modo si poteva trasportare l'apparecchio senza che i liquidi per nulla venissero a contatto. Quando poi tutto era disposto per le misure, si faceva avvenire il contatto alzando lentamente il cilindro di ebanite; la superficie di contatto era così relativamente grande, cioè mm.^{2} 38, 5.

Ebbene, se si voleva procedere subito alla compensazione era difficile che la si potesse raggiungere nei primi minuti, perchè per la variabilità delle condizioni del contatto, andava variando la forza elettromotrice.

Fra le molte serie di determinazioni fatte con questa disposizione non ne citerò che tre, le quali serviranno a dare una idea dell'andamento generale di tutte.

I. { Soluzione di $K^2 SO^4$ 9,2 %: $d = 1{,}0756$ a 12° 9
» » $H^2 SO^4$ 5,6 %: $d = 1{,}0361$ a 15° 3.

Temperatura 17° 1.

Appena prodotto il contatto non è stato possibile ottenere la compensazione, la *F. E.* andava crescendo rapidamente. Dopo 5 minuti di contatto, il valore della resistenza R' era compreso fra 23 e 25, donde si calcolava approssimativamente una *F. E.* $e = 0{,}343$ Kittler. Dopo 45′ si trovò $e = 0{,}500$; dopo 1^h 25′, $e = 0{,}571$; dopo 5^h 20′, $e = 0{,}449$; dopo 6^h 20′, $e = 0{,}379$.

II. { Soluzione di $Na^2 SO^4$ 9,9 %: $d = 1{,}0914$ a 13°, 9
» » $H^2 SO^4$ 7,5 %: $d = 1{,}0503$ a 15°, 6.

Temperatura 17°, 1.

Dopo 15′ di contatto si trovò $e = 0{,}176$; dopo 1^h, $e = 0{,}381$; dopo 5^h 15′, $e = 0{,}370$; dopo 7^h 30′, $e = 0{,}364$.

III. { Soluzione di $Zn SO^4$ 18,2 %: $d = 1{,}2127$ a 14° 6
» » $H^2 SO^4$ 11,2 %: $d = 1{,}0813$ a 15° 6.

Temperatura 18° 5.

Dopo 12′ di contatto $e = 0{,}101$; dopo 25′, $e = 0{,}119$; dopo 1^h 30′, $e = 0{,}199$; dopo 1^h 50, $e = 0{,}199$.

Da queste esperienze si può vedere come se si fanno venire a contatto due liquidi sopra una larga superficie, la *F. E.* che si produce nell'istante del contatto non è la stessa che quella che si misura dopo un certo tempo da che è avvenuto il contatto. Difatti è chiaro che appena i due liquidi si troveranno a contatto, si avranno due strati di due diversi liquidi in presenza, e si produrrà una forza elettromotrice, dovuta realmente

al contatto di due sostanze eterogenee, ma tosto succederà la diffusione dell'un liquido nell'altro, la mescolanza dell'uno coll'altro, ed allora si troveranno a contatto strati di liquidi la cui composizione non sarà più quella di prima, entreranno in campo delle azioni molecolari. dovute alla diffusione e alla soluzione, delle azioni chimiche dovute a scambio d'acqua che avverrà fra le due soluzioni, o diversamente concentrate, o contenenti sali o acidi diversi, e quindi le variazioni molto grandi, che si osservano nella forza elettromotrice sul principio. In seguito finirà per stabilirsi un nuovo stato d'equilibrio, per cui si formerà uno strato di liquido di composizione intermedia, interposto fra i due liquidi diversi, e quindi quelle azioni, di cui si è parlato sopra, non si manifesteranno più colla stessa energia di prima, e quindi noi vediamo che la forza elettromotrice finisce per acquistare un valore, che varia in seguito assai poco. Allora, se anche si agita il liquido, o si scuote il recipiente, non cambia sensibilmente la forza elettromotrice, come fu osservato da Paalzow e da me.

Questo modo di concepire l'andamento dei fenomeni che avvengono al contatto di due liquidi è anche confermato dalle determinazioni di Worm-Müller. Egli notò che in tre coppie: $A|B$ costituita di un alcali (A) con un acido (B), $A \mid C$ dello stesso alcali col sale (C) da essi formato, $C \mid B$ del sale coll'acido, la corrente va normalmente dal primo al secondo corpo, e si ha nel primo caso una forza elettromotrice doppia, anche tripla che negli altri due. Invece, se si costituisce un elemento $C \mid A+A \mid B+B \mid C$, allora la forza elettromotrice è piccolissima, e dipendente più che altro dalla concentrazione diversa delle soluzioni. Il Worm-Müller spiega appunto questo fatto ammettendo che dopo i primi istanti di contatto fra la soluzione dell'alcali (A) e quella dell'acido (B) si formi uno strato di soluzione del sale (C), cosicchè quell'elemento si potrebbe anche rappresentare collo schema $C \mid A + A \mid C + C \mid B + B \mid C$ ed allora si comprende come la forza elettromotrice di un tal elemento riesca piccolissima o pressochè nulla. Ma se una tale ammissione vale per un caso, deve valere anche per tutti gli analoghi. Prendo a considerare tre elementi scelti fra quelli studiati dal Worm-Müller e per i quali sono date le forze elettromotrici.

I. $H^2O + H^2O \mid Na\,HO + Na\,HO \mid H^2SO^4 + H^2SO^4 \mid H^2O + H^2O$
$= 0^{\text{D}},482.$

II. $H^2O + H^2O \mid Na\,HO + Na\,HO \mid Na^2SO^4 + Na^2SO^4 \mid H^2O + H^2O$
$= 0,134.$

III. $H^2O + H^2O \mid Na^2SO^4 + Na^2SO^4 \mid H^2SO^4 + H^2SO^4 \mid H^2O + H^2O$
$= 0,120.$

Ammessa la formazione di uno strato di soluzione salina fra l'alcali e l'acido, il primo elemento potrà anche essere rappresentato dallo schema: $H^2O + H^2O \mid Na\,HO + Na\,HO \mid Na^2SO_4 + Na^2SO^4 \mid H^2SO^4 + H^2SO^4 \mid H^2O + H^2O.$

Ora un elemento uguale si otterrebbe addizionando il II e il III elemento, quindi la somma delle due forze elettromotrici di questi dovrebbe essere uguale alla *F. E.* del primo. Ora se ciò non si verifica si è perchè oltre all'azione dell'alcali e dell'acido, abbiamo anche l'azione dell'acqua sulle soluzioni dell'alcali, dell'acido e del sale, azione che il Worm-Müller credeva trascurabile.

Quello che succede nella disposizione sopra descritta, deve succedere anche nella disposizione a sifoni, e in tutte le altre nelle quali si pongono direttamente a contatto i due liquidi.

Siccome non si potevano sempre stabilire le stesse condizioni di contatto, ma per l'agitazione, per quanto piccola, inevitabile tuttavia, del liquido superiore, si aveva uno strato dovuto ad una mescolanza più o meno progredita dei due liquidi, così non poteva ottenere risultati concordanti colla disposizione sopra descritta, in serie diverse di determinazioni.

Tentai allora una disposizione nella quale fosse specialmente evitata la detta agitazione, e diminuita la superficie di contatto. Il liquido di minor densità era introdotto in un imbuto cilindrico a tubo tagliato alla sua estremità inferiore nettamente secondo un piano perpendicolare all'asse del tubo, il cui orlo veniva spalmato di paraffina perchè si potesse avere una superficie liquida ben piana. L'imbuto era chiuso con un tappo portante un tubo a chiavetta ed il filo di Platino; la chiavetta chiusa impediva l'efflusso del liquido. Disposto l'imbuto verti-

calmente nel tappo del compartimento superiore del recipiente sopra descritto, lo si abbassava lentamente in modo che la superficie estrema del liquido superiore venisse appena appena a contatto colla superficie libera del liquido inferiore. Le forze elettromotrici che si ottenevano in questo modo colle stesse coppie di liquidi erano più piccole di quelle misurate col primo apparecchio, e non andavano più variando rapidamente come prima. Citerò qualche esempio.

Stesse soluzioni della coppia III, sopra indicata.
Temperatura 18° 6.

Coppia n. 1. — Dopo 6′ di contatto, $e = 0,067$ Kittler; dopo 20′, $e = 0,069$; dopo 45′, $e = 0,071$; dopo 1^h 10′, $e = 0,071$; dopo 3^h, $e = 0,071$; dopo 6^h, $e = 0,067$.

Coppia n. 2. — Dopo 7′ di contatto, $e = 0,080$; dopo ½ ora, $e = 0,076$; dopo 1^h, $e = 0,068$; dopo 1^h½, $e = 0,067$.

Coppia n. 3. — Dopo 6′ di contatto, $e = 0,057$.
Coppia n. 4. — Dopo 8′ » $e = 0,091$.

Se dopo di aver determinato una forza elettromotrice si abbassava l'imbuto a tubo in modo che se ne immergesse l'estremità nel liquido inferiore, allora la *F. E.* aumentava, perchè si favoriva la mescolanza dei due liquidi.

Come si vede, quantunque questa disposizione desse dei risultati, secondo me, più probabili, tuttavia questi non erano ancora sufficientemente concordanti. A mio parere la ragione ne stava ancora sempre nel non potere, mettendo direttamente a contatto i due liquidi, sempre realizzare le stesse condizioni di contatto.

Tralasciando di parlare di altri tentativi passo a parlare subito della disposizione da me definitivamente adottata, nella quale mi proposi di abbandonare il contatto diretto dei liquidi, di diminuire maggiormente la superficie di diffusione e di togliere anche una delle cause, che favoriscono la diffusione, quale è quella dipendente dal peso della colonna liquida soprastante.

Secondo me, due condizioni principali si devono soddisfare in queste misure, e sono che il contatto avvenga nel modo più lento possibile, e che si possa fare la determinazione della *F. E.* nei primi istanti, in cui esso avviene. Mi sembra aver raggiunto questi due scopi nel modo seguente. Da uno stesso cannello di

vetro a pareti molto spesse e a diametro interno assai piccolo si tagliano due pezzi, dei quali uno, *A* (fig. 4), viene piegato due volte a sifone, e l'altro, *B*, una volta sola in modo da formare un tubo a *U* a branche di ugual lunghezza. Nel tubo *A* si mette il liquido di minor peso specifico. Per la forma sua a sifone, il liquido si porta nella branca *A* all'altezza della estremità *a* del tubo stesso, e rimane così in equilibrio in modo da presentare una superficie libera verso il basso, superficie che si può rendere piana spalmando di paraffina il taglio terminale del tubo reso ben piano mediante smeriglio finissimo. Il liquido di peso specifico maggiore vien posto nel tubo *B*, in modo da riempirlo; anche qui si spalma la estremità *b* del tubo con paraffina, in modo che il liquido venga a formarvi una superficie ben piana, e si rende ben piano il taglio estremo *b*, cosicchè possa combaciare esattamente col taglio *a*. Nelle due branche *A* e *B* si introducono due fili di Platino, preparati nel modo sopra detto, e si spingono fin presso la curvatura inferiore dei due tubi. Siccome a questi si può dare la minor lunghezza possibile, così si soddisfa anche ad un'altra condizione utile, che è quella di diminuire la resistenza, già grandissima, della coppia. Per portare a contatto i due liquidi si innalza lentamente, mediante un sostegno a dentiera, il tubo *B*, in modo da portare una branca di esso verticalmente ed esattamente al di sotto della branca corrispondente del tubo *A*.

Siccome alcune determinazioni fatte portando a diretto contatto i due liquidi non mi diedero risultati abbastanza concordanti, sempre per la ragione sopra indicata, adottai l'uso di un setto formato da un pezzetto di carta pergamena, interposto fra le due superficie dei liquidi. In tal modo il contatto non poteva che avvenire lentamente, specialmente con soluzioni molto concentrate, come sono in generale quelle da me adoperate, e sovrapposte per ordine di densità, ciò che rende l'osmosi più lenta. Con una stessa coppia di soluzioni, senza carta pergamena ebbi in qualche caso valori appena maggiori di quelli ottenuti colla carta, in altri casi nessuna differenza. Si vede semplicemente l'influenza delle condizioni di contatto.

Ed ecco finalmente come procedeva ad una serie di determinazioni. Dopo aver preparate le due Daniell e la Kittler, disponeva i due liquidi nei tubi, compensava la Kittler; quindi poneva sopra la superficie terminale del tubo *B* il pezzetto di

carta pergamena ed innalzava il tubo fino a contatto dell'altro. Il movimento dei due liquidi attraverso il setto non era così rapido da aversi subito la corrente, ma generalmente dopo mezzo minuto si aveva, e si procedeva tosto alla compensazione. La prima misura di una *F. E.* non poteva farsi rapidamente, perchè non si conosceva ancora il valore da darsi approssimativamente a R', ma fatta la prima, le altre si potevano fare speditamente. Generalmente quella si rigettava perchè dava risultato un po' diverso dalle altre, pel maggior tempo richiesto. I risultati, che ottenni in tal modo, furono molto soddisfacenti, come si vedrà in seguito, e mi indussero ad adottare definitivamente tale metodo.

Per una data coppia di soluzioni le determinazioni si fecero successivamente l'una dopo l'altra, rinnovando per ciascuna i liquidi. Siccome si facevano in una camera grande, la temperatura, misurata da un termometro posto accanto all'apparecchio dei liquidi, non indicava variazioni sensibili durante una stessa serie di determinazioni, nè molto grandi durante tutte le serie. Del resto vedremo in seguito come l'influenza della temperatura si possa considerare come insensibile entro ristretti limiti.

Le soluzioni saline adoperate sono quasi tutte molto concentrate, prossime alla saturazione. Esse sono state preparate con sali, provenienti come puri dalla rinomata fabbrica del Trommsdorff. Per prepararle il sale veniva pesato e l'acqua distillata, nella quale si doveva sciogliere, misurata in volume. Il peso specifico delle soluzioni si determinò con una buona bilancia di Mohr e riferito all'acqua alla temperatura di 15°. Aggiungo qui subito come la soluzione di solfato ferroso fu preparata con acqua disaerata e subito adoperata per impedire la ossidazione del sale. Difatti essa si è conservata perfettamente limpida per più mesi.

Risultati. — Ed ora vengo ai risultati numerici. Per non dover ripetere troppe volte la composizione e la densità delle soluzioni che costituiscono le coppie, enumerate in seguito, darò qui subito un elenco delle soluzioni stesse contrassegnandole con un numero d'ordine, che citerò in seguito accanto al nome del sale o dell'acido:

1. Acido solforico.... (H^2SO^4 35. 2 %) $d = 1.2516$ a 17° 2
2. Acido solforico.... (H^2SO^4 21. 5 %) $d = 1.1502$ a 14° 3

3.	Acido solforico...	(H^2SO^4	9. 0 %)	$d = 1.0601$ a 17° 2
4.	Acido solforico...	(H^2SO^4	15. 3 %)	$d = 1.1070$ a 15° 2
5.	Acido solforico...	(H^2SO^4	11. 2 %)	$d = 1.0773$ a 14° 8
6.	Acido solforico...	(H^2SO^4	7. 3 %)	$d = 1.0511$ a 15° 0
7.	Acido solforico...	(H^2SO^4	5. 1 %)	$d = 1.0352$ a 16° 7
8.	Solf. di potassio	(K^2SO^4	9. 2 %)	$d = 1.0767$ a 15° 0
9.	Solfato di sodio	(Na^2SO^4	10. 7 %)	$d = 1.0995$ a 14° 2
10.	Solfato di litio...	(Li^2SO^4	29. 0 %)	$d = 1.2082$ a 16° 9
11.	Solf. di magnesio	($MgSO^4$	25. 1 %)	$d = 1.2860$ a 16° 7
12.	Solfato di cadmio	($CdSO^4$	49. 3 %)	$d = 1\ 5656$ a 14° 6
13.	Solfato di zinco	($ZnSO^4$	30. 95 %)	$d = 1.4010$ a 15° 1
14.	Solfato di zinco	($ZnSO^4$	14. 0 %)	$d = 1.1563$ a 16° 7
15.	Solfato di zinco	($ZnSO^4$	16. 3 %)	$d = 1.1870$ a 15° 0
16.	Solfato di zinco	($ZnSO^4$	9. 1 %)	$d = 1.0990$ a 15° 7
17.	Solfato di rame	($CuSO^4$	16. 6 %)	$d = 1.1800$ a 16° 2
18.	Solfato di rame	($CuSO^4$	11. 6 %)	$d = 1.1225$ a 14° 8
19.	Solfato di rame	($CuSO^4$	9. 2 %)	$d = 1.0940$ a 16° 7
20.	Solfato di ferro	($FeSO^4$	19. 1 %)	$d = 1.2200$ a 17° 4
21.	Solf. di manganese	($MnSO^4$	37. 3 %)	$d = 1.4580$ a 13° 7
22.	Solfato di nickel	($NiSO^4$	22. 3 %)	$d = 1.27095$ a 13° 7
23.	Solfato di cobalto	($CoSO^4$	23. 3 %)	$d = 1.2859$ a 16° 7
24.	Solf. di alluminio	($Al^2(SO^4)^3$	30. 0 %)	$d = 1.3116$ a 14° 7

In seguito le serie di determinazioni non sono riportate nell'ordine in cui furono eseguite. I singoli valori delle forze elettromotrici ottenuti in ciascuna determinazione sono espressi prendendo per unità la Kittler, e così per loro medio e. Da questo ho calcolato la $F.\ E.$ espressa in volts, servendomi del valore 1.177 sopra accennato per la Kittler.

I nomi delle due soluzioni di ciascuna coppia sono posti nell'ordine, che corrisponde al senso in cui va la corrente nell'interno della coppia.

La temperatura a cui si fecero le misure è data da t.

Per ristrettezza di spazio non si sono potuti riportare i dati delle determinazioni.

1. Solfato di potassio (n. 8) e A. solforico (n. 1). $t = 17°\ 9$.
   Valori di e: 0. 062; 0. 067; 0. 067; 0. 067.
   Medio $e = 0.\ 065$. $F.\ E. = 0.\ 076$ volts.

2. Solfato di sodio (n. 9) e A. solforico (n. 1). $t = 18°\ 5$.
   Valori di e: 0. 104; 0. 104; 0. 109; 0. 111; 0. 108.
   Medio $e = 0.\ 107$. $F.\ E. = 0.\ 126$ volts.

3. Solfato di potassio (n. 8) e di sodio (n. 9). $t = 18°\ 4$.
   Valori di e: 0. 084; 0. 074; 0. 076; 0. 079; 0. 082.
   Medio $e = 0.\ 079$, $F.\ E. = 0.\ 093$ volts.

4. Solfato di litio (n. 10) e A. solforico (n° 1). $t = 17°\ 1$.
   Valori di e: 0. 108; 0. 111; 0. 104; 0. 106.
   Medio $e = 0.\ 107$. $F.\ E. = 0.\ 126$ volts.

5. Solfato di potassio (n. 8) e di litio (n° 10). $t = 18°\ 4$.
   Valori di e: 0. 068; 0. 073; 0. 079; 0. 068; 0. 072.
   Medio $e = 0.\ 071$. $F.\ E. = 0.\ 083$ volts.

6. Solfato di sodio (n. 9) e di litio (n. 10). $t = 18°\ 5$.
   Valori di e: 0. 107; 0. 095; 0. 095; 0. 099; 0. 101.
   Medio $e = 0.\ 099$. $F.\ E. = 0.\ 116$ volts.

7. Solfato di magnesio (n. 11) e A. solforico (n. 1). $t = 18°\ 3$.
   Valori di e: 0. 092; 0. 086; 0. 083; 0. 092.
   Medio $e = 0.\ 088$. $F.\ E. = 0.\ 104$ volts.

8. Solfato di magnesio (n. 11) e A. solforico (n. 2). $t = 18°\ 8$.
   Valori di e: 0. 120; 0. 111; 0. 127; 0. 120; 0. 120.
   Medio $e = 0.\ 120$. $F.\ E. = 0.\ 141$ volts.

9. Solfato di potassio (n. 8) e di magnesio (n. 11). $t = 18°\ 8$.
   Valori di e: 0. 075; 0. 087; 0. 083; 0. 081; 0. 087.
   Medio $e = 0.\ 083$. $F.\ E. = 0.\ 098$.

10. Solfato di sodio (n. 9) e di magnesio (n. 11). $t = 18°\ 3$.
    Valori di e: 0. 006; 0. 006; 0. 007; 0. 007.
    Medio $e = 0.\ 0065$. $F.\ E. = 0.\ 008$ volts.

11. Solfato di litio (n. 10) e di magnesio (n. 11). $t = 18°\ 1$.
    Valori di e: 0. 062; 0. 055; 0. 050; 0. 047.
    Medio $e = 0.\ 053$. $F.\ E. = 0.\ 062$ volts.

12. Solfato di cadmio (n. 12) e A. solforico (n. 1). $t = 15° 6$.
Valori di e: 0. 007; 0. 008; 0. 008; 0. 008; 0. 007.
Medio $e = 0.008$; $F. E. = 0.009$ volts.

13. Solfato di cadmio (n. 12) e A. solforico (n. 2). $t = 15° 8$.
Valori di e: 0. 050; 0. 053; 0. 051; 0. 053; 0. 053.
Medio $e = 0.052$. $F. E. = 0.061$ volts.

14. Solfato di potassio (n. 8) e di cadmio (n. 12). $t = 16° 3$.
Valori di e: 0. 110; 0 114; 0. 114; 0. 119; 0. 116.
Medio $e = 0.115$. $F. E. = 0.135$ volts.

15. Solfato di sodio (n. 9) e di cadmio (n. 12). $t = 16° 3$.
Valori di e: 0. 082; 0. 084; 0. 082; 0. 082; 0. 082.
Medio $e = 0.082$. $F. E. = 0.097$ volts.

16. Solfato di litio (n. 10) e di cadmio (n. 12). $t = 16° 3$.
Valori di e: 0. 067; 0. 067; 0. 065; 0. 057.
Medio $e = 0.064$; $F. E. = 0.075$ volts.

17. Solfato di magnesio (n. 11) e di cadmio (n. 12). $t = 15° 6$.
Valori di e: 0. 047; 0. 045; 0. 045; 0. 047.
Medio $e = 0.046$. $F. E. = 0.054$ volts.

18. A. solforico (n. 1) e solfato di zinco (n. 13). $t = 19° 5$.
Valori di e: 0. 104; 0. 095; 0. 104; 0. 095.
Medio $e = 0.100$. $F. E. = 0.118$ volts.

19. A. solforico (n. 3) e solfato di zinco (n. 13). $t = 18° 1$.
Valori di e: 0. 048; 0. 053; 0. 052; 0. 048; 0. 052; 0. 052.
Medio $e = 0.051$. $F. E. = 0.060$ volts.

20. A. solforico (n. 3) e solfato di zinco (n. 14). $t = 18° 5$.
Valori di e: 0. 017; 0. 018; 0. 018; 0. 016; 0. 016; 0. 016.
Medio $e = 0.017$. $F. E. = 0.020$ volts.

21. Solfato di potassio (n. 8) e di zinco (n. 13). $t = 17° 5$.
Valori di e: 0. 080; 0. 081; 0. 083; 0. 080; 0. 081.
Medio $e = 0.081$. $F. E. = 0.095$ volts.

22. Solfato di potassio (n. 8) e di zinco (n. 15). $t = 18° 3$.
Valori di e: 0. 063; 0. 067; 0. 069; 0. 072; 0. 070.
Medio $e = 0.068$. $F. E. = 0.080$ volts.

23. Solfato di potassio (n. 8) e di zinco (n. 16). $t = 17° 1$.
Valori di e: 0. 027; 0. 029; 0. 030; 0. 030; 0. 029.
Medio $e = 0.029$. $F. E. = 0.034$ volts.

24. Solfato di sodio (n. 9) e di zinco (n. 13). $t = 18^\circ 8$.
Valori di e: 0. 140; 0. 142; 0. 146; 0. 148; 0. 143.
Medio $e = 0.144$. $F. E. = 0.169$.

25. Solfato di litio (n 10) e di zinco (n 13). $t = 16^\circ 3$.
Valori di e: 0. 129; 0. 135; 0. 130; 0. 127; 0. 129.
Medio $e = 0.130$. $F. E. = 0.153$ volts.

26. Solfato di magnesio (n. 11) e di zinco (n. 13). $t = 15^\circ 1$.
Valori di e: 0. 111; 0. 111; 0. 115; 0. 115.
Medio $e = 0.113$. $F. E. = 0.133$ volts.

27. Solfato di cadmio (n. 12) e di zinco (n. 13). $t = 15^\circ 6$.
Non si ottenne corrente da questa coppia.

28. A. solforico (n. 1) e solfato di rame (n. 17). $t = 17^\circ 5$.
Valori di e: 0. 099; 0. 106; 0. 101; 0. 098.
Medio $e = 0.101$. $F. E. = 0.119$ volts.

29. A. solforico (n. 2) e solfato di rame (n. 17). $t = 17^\circ 5$.
Valori di e: 0. 141; 0. 137; 0. 141; 0. 134; 0. 132.
Medio $e = 0.137$. $F. E. = 0{,}161$ volts.

30. A. solforico (n. 4) e solfato di rame (n. 17). $t = 17^\circ 5$.
Valori di e: 0. 091; 0. 090; 0. 089; 0. 091.
Medio $e = 0.090$. $F. E. = 0.106$ volts.

31. A. solforico (n. 5) e di rame (n. 17). $t = 17^\circ 5$.
Valori di e: 0. 056; 0. 054; 0. 056; 0. 057.
Medio $e = 0.056$. $F. E. = 0.066$ volts.

32. A. solforico (n. 3) e solfato di rame (n. 17). $t = 17^\circ 5$.
Valori di e: 0. 062; 0. 067; 0. 069; 0. 071; 0. 066.
Medio $e = 0.067$. $F. E. = 0.079$ volts.

33. A. solforico (n. 6) e solfato di rame (n. 17). $t = 17^\circ 5$.
Valori di e: 0. 060; 0. 059; 0. 056; 0. 056; 0. 057.
Medio $e = 0.058$; $F. E. = 0.068$ volts.

34. A. solforico (n. 7) e solfato di rame (n. 17). $t = 17^\circ 5$.
Valori di e: 0. 065; 0. 062; 0. 065; 0. 064.
Medio $e = 0.064$. $F. E. = 0.075$ volts.

35. A. solforico (n. 6) e solfato di rame (n. 18). $t = 18^\circ 7$.
Valori di e: 0. 031; 0. 032; 0. 029; 0. 028.
Medio $e = 0\ 030$. $F. E. = 0.035$ volts.

36. Solfato di potassio (n. 8) e di rame (n. 17). $t = 17^\circ\ 5$.
Valori di e: 0. 078; 0. 086; 0. 079; 0. 076; 0. 084; 0. 081.
Medio $e = 0.\ 081$. $F.\ E. = 0.\ 095$ volts.

37. Solfato di potassio (n. 8) e di rame (n. 19). $t. = 17^\circ\ 9$.
Valori di e: 0. 060; 0. 062; 0. 062; 0. 059; 0. 065.
Medio $e = 0.\ 062$. $F.\ E. = 0.\ 073$ volts.

38. Solfato di sodio (n. 9) e di rame (n. 17). $t = 18^\circ\ 8$.
Valori di e: 0. 185; 0. 190; 0,189; 0,187,
Medio $e = 0.\ 188$. $F.\ E. = 0.\ 221$ volts.

39. Solfato di litio (n.10) e di rame (n. 17). $t = 17^\circ\ 3$.
Valori di e: 0. 141; 0. 143; 0. 132; 0. 131.
Medio $e = 0{,}137$. $F.\ E. = 0.\ 161$ volts.

40. Solfato di magnesio (n. 11) e di rame (n. 17). $t = 18^\circ\ 2$.
Valori di e: 0. 192; 0. 195; 0. 180; 0.186; 0. 181.
Medio $e = 0.\ 187$. $F.\ E. = 0.\ 220$ volts.

41. Solfato di cadmio (n. 12) e di rame (n. 17). $t = 15^\circ\ 35$.
Valori di e: 0. 102; 0. 090; 0. 090; 0. 103; 0,095; 0. 090.
Medio $e = 0.\ 095$. $F.\ E. = 0.112$ volts.

42. Solfato di zinco (n. 13) e di rame (n. 17). $t = 15^\circ 8$.
Valori di e: 0. 045; 0. 045; 0. 045; 0. 047; 0. 045; 0. 046.
Medio $e = 0.\ 045$. $F.\ E. = 0.\ 053$ volts.

43. Solfato di zinco (n. 15) e di rame (n. 17). $t = 16^\circ\ 0$.
Valori di e: 0. 031; 0. 032; 0. 031; 0. 029; 0,030; 0. 031.
Medio $e = 0.\ 031$. $F.\ E. = 0{,}036$ volts.

44. Solfato di potassio (n. 8) e di ferro (n. 20). $t = 15^\circ\ 1$.
Valori di e: 0. 112; 0. 109; 0. 103; 0.100; 0. 106; 0. 105.
Medio $e = 0.\ 106$. $F.\ E. = 0.\ 125$ volts.

45. Solfato di sodio (n. 9) e di ferro (n. 20). $t = 15^\circ\ 1$.
Valori di e: 0. 073; 0. 074; 0. 066; 0. 065.
Medio $e = 0.\ 070$; $F.\ E. = 0.\ 082$ volts.

46. Solfato di litio (n. 10) e di ferro (n. 20). $t = 15^\circ\ 1$.
Valori di e: 0 055; 0. 056; 0. 053; 0. 052; 0. 053.
Medio $e = 0.\ 054$. $F.\ E. = 0.\ 063$ volts.

47. Solfato di magnesio (n. 11) e di ferro (n. 20). $t = 15^\circ 6$.
Valori di e: 0. 115; 0. 116; 0. 115; 0. 116.
Medio $e = 0.115$. $F. E. = 0.135$ volts.

48. Solfato di ferro (n. 20) e di cadmio (n. 12). $t = 15^\circ 1$.
Valori di e: 0. 060; 0. 062; 0. 063; 0. 063; 0. 066.
Medio $e = 0.063$. $F. E. = 0.074$ volts.

49. Solfato di ferro (n. 20) e di zinco (n. 13). $t = 15^\circ 1$.
Valori di e: 0. 079; 0. 079; 0. 076; 0. 073; 0. 073.
Medio $e = 0.076$. $F. E. = 0.089$ volts.

50. Solfato di ferro (n. 20) e di rame (n. 17). $t = 15^\circ 1$.
Valori di e: 0. 100; 0. 103; 0. 102; 0. 103; 0. 104.
Medio $e = 0.102$. $F. E. = 0.120$ volts.

51. Solfato di potassio (n. 8) e di manganese (n. 21). $t = 15^\circ 1$.
Valori di e: 0. 154; 0. 150; 0. 152; 0. 150; 0. 147.
Medio $e = 0.151$. $F. E. = 0.178$ volts.

52. Solfato di sodio (n. 9) e di manganese (n. 21). $t = 15^\circ 1$.
Valori di e: 0. 090; 0. 082; 0. 093; 0. 090; 0. 085.
Medio $e = 0.088$. $F. E. = 0.103$ volts.

53. Solfato di litio (n. 10) e di manganese (n. 21). $t = 15^\circ 2$.
Valori di e: 0. 130; 0. 132; 0. 124; 0. 133; 0. 130.
Medio $e = 0.130$. $F. E. = 0.152$ volts.

54. Solfato di magnesio (n. 11) e di manganese (n. 21). $t = 15^\circ 6$.
Valori di e: 0. 141; 0. 144; 0. 137; 0. 144.
Medio $e = 0.141$. $F. E. = 0.165$ volts.

55. Solfato di manganese (n. 21) e di cadmio (n. 12). $t = 15^\circ 3$.
Valori di e: 0. 009; 0. 011; 0. 011; 0. 013; 0. 014.
Medio $e = 0.012$. $F. E. = 0.014$ volts.

56. Solfato di manganese (n. 21) e di zinco (n. 13). $t = 15^\circ 6$.
Non si ebbe corrente da questa coppia.

57. Solfato di manganese (n° 21) e di rame (n. 17). $t = 15^\circ 1$.
Valori di e: 0. 037; 0. 035; 0. 039; 0. 034; 0. 037.
Medio $e = 0.036$. $F. E. = 0.041$ volts.

58. Solfato di ferro (n. 20) e di manganese (n. 21). $t = 15^\circ 1$.
Valori di e: 0. 079; 0. 074; 0. 080; 0. 080; 0. 085.
Medio $e = 0.080$. $F. E. = 0.094$ volts.

59. Solfato di potassio (n. 8) e di nickel (n. 22). $t = 16^\circ 1$.
Valori di e: 0. 068; 0. 065; 0. 066; 0. 068; 0. 070.
Medio $e = 0.067$. $F. E. = 0.079$ volts.

60. Solfato di sodio (n. 9) e di nickel (n. 22). $t = 15^\circ 9$.
Valori di e: 0. 070; 0. 075; 0. 075; 0. 075; 0. 071.
Medio $e = 0.073$. $F.E. = 0.086$ volts.

61. Solfato di litio (n. 10) e di nickel (n. 22). $t = 16^\circ 7$.
Valori di e: 0. 045; 0. 045; 0. 048; 0. 042.
Medio $e = 0.045$. $F.E. = 0.053$ volts.

62. Solfato di magnesio (n. 11) e di nickel (n. 22). $t = 17^\circ 8$.
Valori di e: 0. 047; 0. 045; 0. 052; 0. 049; 0. 047.
Medio $e = 0.048$. $F.E. = 0.056$ volts.

63. Solfato di nickel (n. 22) e di cadmio (n. 12). $t = 18^\circ 0$.
Valori di e: 0. 158; 0. 169; 0. 163; 0. 166; 0. 163.
Medio $e = 0.164$; $F.E. = 0.193$ volts.

64. Solfato di nickel (n. 22) e di zinco (n. 13). $t = 18^\circ 0$.
Valori di e: 0. 149; 0. 149; 0. 146; 0. 158; 0. 153.
Medio $e = 0.151$. $F.E. = 0.176$ volts.

65. Solfato di nickel (n. 22) e di rame (n. 17). $t = 16^\circ 6$.
Valori di e: 0. 088; 0. 088; 0. 088; 0. 088.
Medio $e = 0.088$. $F.E. = 0.103$ volts.

66. Solfato di nickel (n. 22) e di ferro (n. 20). $t = 15^\circ 6$.
Valori di e: 0. 124; 0. 129; 0. 126; 0. 128; 0. 126.
Medio $e = 0.127$. $F.E. = 0.148$ volts.

67. Solfato di nickel (n. 22) e di manganese (n. 21). $t = 18^\circ 0$.
Valori di e: 0. 155; 0. 153; 0. 153; 0. 159; 0. 158.
Medio $e = 0.156$. $F.E. = 0.182$ volts.

68. Solfato di potassio (n. 8) e di cobalto (n. 23). $t = 16^\circ 1$.
Valori di e: 0. 248; 0. 254; 0. 250; 0. 245; 0. 244.
Medio $e = 0.248$. $F.E. = 0{,}291$ volts.

69. Solfato di sodio (n. 9) e di cobalto (n. 23). $t = 15^\circ 9$.
Valori di e: 0. 201; 0. 198; 0. 204; 0. 198; 0. 201.
Medio $e = 0.200$. $F.E. = 0.235$ volts.

70. Solfato di litio (n. 10) e di cobalto (n. 23). $t = 16^\circ 1$.
Valori di e: 0. 167; 0. 166; 0. 165; 0. 172.
Medio $e = 0.168$. $F.E. = 0.196$ volts.

71. Solfato di magnesio (n. 11) e di cobalto (n. 23). $t = 18^\circ 3$.
Valori di e: 0. 174; 0. 163; 0. 171; 0. 164; 0. 167.
Medio $e = 0.168$. $F.E. = 0.196$ volts.

72. Solfato di cadmio (n. 12) e di cobalto (n. 23). $t = 18^\circ 0$.
Valori di e: 0. 057; 0 057; 0. 057; 0. 056; 0. 056.
Medio $e = 0.057$. $F.E. = 0.067$ volts.

73. Solfato di zinco (n. 13) e di cobalto (n. 23). $t = 18^\circ 1$.
Valori di e: 0. 047; 0. 046; 0. 045; 0. 048.
Medio $e = 0.046$. $F.E. = 0.054$ volts.

74. Solfato di rame (n. 17) e di cobalto (n. 23). $t = 16^\circ 6$.
Valori di e: 0. 016; 0. 016; 0. 013; 0. 016; 0. 016.
Medio $e = 0.016$. $F.E. = 0.019$ volts.

75. Solfato di ferro (n. 20) e di cobalto (n. 23). $t = 15^\circ 6$.
Valori di e: 0. 120; 0 119; 0. 119; 0. 123; 0. 122.
Medio $e = 0.121$. $F.E. = 0.140$ volts.

76. Solfato di manganese (n. 21) e di cobalto (n. 23). $t = 18^\circ 0$.
Valori di e: 0. 033; 0. 036; 0. 038; 0. 038; 0. 035.
Medio $e = 0.036$. $F.E. = 0.041$ volts.

77. Solfato di nickel (n. 22) e di cobalto (n. 23). $t = 18^\circ 0$.
Valori di e: 0. 165; 0. 163; 0. 163; 0. 168.
Medio $e = 0.165$. $F.E. = 0.194$ volts.

78. Solfato di potassio (n. 8) e di alluminio (n. 24). $t = 16^\circ 1$.
Valori di e: 0. 260; 0. 259; 0. 264; 0. 260; 0. 262.
Medio $e = 0.261$. $F.E. = 0.306$ volts.

79. Solfato di sodio (n. 9) e di alluminio (n. 24). $t = 15^\circ 9$.
Valori di e: 0. 215; 0. 212; 0. 214; 0. 218; 0. 212.
Medio $e = 0.214$. $F.E. = 0.250$ volts.

80. Solfato di litio (n. 10) e di alluminio (n. 24). $t = 16^\circ 1$.
Valori di e: 0. 191; 0. 188; 0. 194; 0. 192.
Medio $e = 0.191$. $F.E. = 0.224$ volts.

81. Solfato di magnesio (n. 11) e di alluminio (n. 24). $t = 18^\circ 3$.
Valori di e: 0. 159; 0. 151; 0. 159; 0. 166; 0. 156.
Medio $e = 0.158$. $F.E. = 0.185$ volts.

82. Solfato di cadmio (n. 12) e di alluminio (n. 24). $t = 18^\circ 0$.
Valori di e: 0. 062; 0. 062; 0. 065; 0. 065.
Medio $e = 0.063$. $F.E. = 0.074$.

83. Solfato di zinco (n. 13) e di alluminio (n. 24). $t = 18^\circ 5$.
Valori di e: 0. 058; 0. 058; 0. 057; 0. 058.
Medio $e = 0.058$. $F.E. = 0.068$ volts.

84. Solfato di rame (n. 17) e di alluminio (n. 24). $t = 18°4$.
Valori di e: 0. 042; 0. 042; 0. 039; 0. 035.
Medio $e = 0.039$. $F.E. = 0.046$ volts.

85. Solfato di ferro (n. 20) e di alluminio (n. 24). $t = 15°6$.
Valori di e: 0. 109; 0. 104; 0. 106; 0. 110; 0. 107.
Medio $e = 0.107$. $F.E. = 0.126$ volts.

86. Solfato di manganese (n. 21) e di alluminio (n. 24). $t = 18°5$.
Valori di e: 0. 049; 0. 046; 0. 044; 0. 044.
Medio $e = 0.046$. $F.E. = 0.054$ volts.

87. Solfato di nickel (n. 22) e di alluminio (n. 24). $t = 17°4$.
Valori di e: 0. 196; 0. 204; 0. 209; 0. 202; 0. 200.
Medio $e = 0.202$. $F.E. = 0.227$ volts.

88. Solfato di cobalto (n. 23) e di alluminio (n. 24). $t = 18°8$.
Valori di e: 0. 029; 0. 029; 0. 029; 0. 027.
Medio $e = 0.028$. $F.E. = 0.033$ volts.

Ho espresso nei risultati precedenti le forze elettromotrici delle singole coppie in volts. Con ciò non pretendo tuttavia di dare soverchia importanza a questi valori assoluti, perchè in parte dipendenti dalle condizioni in cui ho operato, ma siccome ho cercato che queste fossero sempre le stesse per le diverse coppie studiate, credo di poter ora dedurre qualche conclusione dal confronto di questi valori.

Considerazioni sui risultati.

Influenza degli elettrodi. — Prima di passare alla discussione dei risultati è necessario vedere quale influenza vi possano avere gli elettrodi e la temperatura, per poter asserire che i valori ottenuti siano realmente confrontabili fra loro. Come ebbi occasione di dimostrare in principio, le ricerche della maggior parte degli sperimentatori non risolvono in modo decisivo la questione se al contatto fra un metallo ed un liquido, che non lo attacchi chimicamente, si abbia, o non, forza elettromotrice. Soltanto nelle determinazioni di Kittler *(loc. cit.)* troviamo una dimostrazione indiretta in senso negativo. Egli trovò che in un elemento formato da due soluzioni di uno stesso cloruro, o da

una soluzione di un cloruro e acqua la corrente va dalla soluzione più concentrata alla meno concentrata, o dal cloruro all'acqua, e la direzione è la stessa per elettrodi di argento, di rame, o di zinco.

Le mie determinazioni mi sembrano risolvere in modo abbastanza deciso la questione. Consideriamo le coppie seguenti:

(56) $Pt \mid Mn\,SO^4 + Mn\,SO^4 \mid Zn\,SO^4 + Zn\,SO^4 \mid Pt = 0.$

(27) $Pt \mid Cd\,SO^4 + Cd\,SO^4 \mid Zn\,SO^4 + Zn\,SO^4 \mid Pt = 0.$

Tre ipotesi si possono fare al riguardo: 1° Supporre che la forza elettromotrice fra i liquidi sia nulla, e che quelle fra ciascun liquido e l'elettrodo corrispondente si annullino a vicenda. Allora si avrebbe

$$Pt \mid Mn\,SO^4 = -Zn\,SO^4 \mid Pt \quad \text{e} \quad Pt \mid Cd\,SO^4 = -Zn\,SO^4 \mid Pt$$

e quindi

$$Pt \mid Mn\,SO^4 + Mn\,SO^4 \mid Cd\,SO^4 + Cd\,SO^4 \mid Pt = 0.$$

Ora ciò non è perchè questo elemento ha dato $e = 0.014$ (55).

2° Supporre nulle le forze elettromotrici agli elettrodi; allora riuscirebbe nulla o almeno non apprezzabile la *F. E.* fra i due liquidi, ciò che è possibile.

3° Supporre che si abbiano forze elettromotrici tanto fra liquido e liquido, quanto fra liquidi e metalli. Allora si avrebbe

$$Pt \mid Mn\,SO^4 + Mn\,SO^4 \mid Zn\,SO^4 = -Zn\,SO^4 \mid Pt.$$
$$Pt \mid Cd\,SO^4 + Cd\,SO^4 \mid Zn\,SO^4 = -Zn\,SO^4 \mid Pt$$

donde si ricaverebbe:

$$Pt \mid MnSO^4 + Mn\,SO^4 \mid ZnSO^4 - (ZnSO^4 \mid CdSO^4 + Cd\,SO^4 \mid Pt) = 0.$$

Questa eguaglianza pure non inchiuderebbe contraddizione.

Consideriamo ora queste altre due coppie:

(21). $Pt \mid K^2\,SO^4 + K^2\,SO^4 \mid Zn\,SO^4 + Zn\,SO^4 \mid Pt = 0.\,095.$

(36). $Pt \mid K^2\,SO^4 + K^2\,SO^4 \mid Cu\,SO^4 + Cu\,SO^4 \mid Pt = 0.\,095.$

Anche qui si potrebbero fare le tre ipotesi precedenti.

La prima condurrebbe all'eguaglianza:

$$Pt \,|\, Zn\,SO^4 + Zn\,SO^4 \,|\, Cu\,SO^4 + Cu\,SO^4 \,|\, Pt = 0\,,$$

la quale non è possibile perchè questo elemento ha dato:

$$e = 0.\ 053 \quad (42).$$

La seconda non porterebbe ad alcuna contraddizione.

La terza condurrebbe all'eguaglianza:

$$Pt \,|\, Zn\,SO^4 + Zn\,SO^4 \,|\, K^2\,SO^4 + K^2\,SO^4 \,|\, Cu\,SO^4 + Cu\,SO^4 \,|\, Pt = 0\,.$$

Ma secondo questa eguaglianza la corrente dovrebbe andare dal solfato di zinco e da quello di rame a quello di potassio. Invece l'esperienza ci dà che la corrente va dal solfato di potassio sia a quello di zinco che a quello di rame. Si potrebbero citare altri esempi che darebbero le stesse conseguenze.

Mi sembra adunque giustificata meglio che le altre due la seconda ipotesi, che cioè non esista forza elettromotrice al contatto del platino e delle soluzioni saline, il che va anche d'accordo con altri fatti sopra accennati.

Influenza della temperatura. — Riguardo all'influenza della temperatura sulla forza elettromotrice fra liquidi, secondo Bichat e Blondlot (*loc. cit.*) essa non sarebbe sensibile anche per differenze comprese fra la ordinaria temperatura e 50°; risultato che può parere invero alquanto singolare. Le mie determinazioni diedero delle differenze pressochè insensibili per *F. E.* misurate a temperature poco differenti. Citerò un solo esempio. La serie **31** diede il valore 0. 056 alla temperatura di 17° 5. Per la stessa coppia, ma alla temperatura di 19° 1, si trovò 0. 057. Dimodochè io credo che nei ristretti limiti di temperatura delle mie esperienze, la influenza di questa si possa ritenere trascurabile.

Confronti coi risultati di altri sperimentatori. — Pochi sono i confronti che ho potuto istituire coi risultati che si hanno finora.

Kittler trovò per l'elemento: $Cu \,|\, \underset{\text{conc.}}{Zn\,SO^4} + Zn\,SO^4 \,|\, \underset{\text{conc.}}{Cu\,SO^4} + Cu\,SO^4 \,|\, Cu$ il valore 0. 067 prendendo per unità una Daniell. Io trovai volts 0. 053 (**42**).

I valori non sono molto differenti, se si considera che non è detta la richezza delle soluzioni usate dal Kittler, nè si conosce il valore della sua Daniell. Si vede pure non essere

pressochè sentita l'influenza degli elettrodi, mentre sembra che le condizioni di contatto fossero tali da permettere una diffusione più rapida.

Bichat e Blondlot trovarono per un elemento costituito da acqua acidula (17 % $H^2 SO^4$) e soluzione di $Na^2 SO^4$ (4 %) con elettrodi di platino la *F. E.* in volts 0. 146. Io trovai per la coppia (2) il valore 0. 126. Questi risultati non sono però confrontabili che per l'ordine di grandezza.

Un risultato, a cui arrivarono pure Bichat e Blondlot, mi meravigliò assai ed è che la differenza di potenziale per i tre elementi seguenti sia sensibilmente nulla:

Soluzione di solfato di zinco (25 %) e soluzione di solfato di sodio (4 %);

Soluzione di solfato di rame satura e soluzione di solfato di sodio (4 %);

Soluzione di solfato di zinco (25) % e soluzione di solfato di rame satura.

Invece io per l'elemento $Zn SO^4$ (30. 95 %), $Na^2 SO^4$ (10. 7 %) trovai $e = 0. 169$; per l'elemento $Cu SO^4$ (16. 6 %), $Na^2 SO^4$ (10. 7 %) $e = 0. 221$; e per l'elemento $Zn SO^4$ (30. 95), $Cu SO^4$ (16. 6 %) $e = 0. 053$.

I due fisici francesi furono però condotti a quel risultato, più che dall'esperienza, da un ragionamento, che non mi sembra molto rigoroso, e che cito qui colle stesse loro parole: « Ce « dernier résultat a été obtenu par la méthode indirecte en « formant une pile sulfate de soude, sulfate de zinc, sulfate « de cuivre, sulfate de soude avec des éléctrodes en platine. « La force électromotrice de cette pile a été trouvée égale à « $-0^{D}, 0025$. On peut conclure de là que la différence sulfate « de cuivre — sulfate de zinc soit: $-0^{D}, 0025$. Dans les me- « sures faites avec l'appareil à écoulement, on ne peut pas « repondre d'une erreur inférieure à 0. 002. Chacune des dif- « férences sulfate de zinc — sulfate de soude, et sulfate de « cuivre — sulfate de soude, pourrait donc être comprise entre « $+0. 002$ e $-0. 002$. On pourrait, par suite, se tromper en « les supposant rigoureusement nulles et en attribuant toute la « force électromotrice de la pile à la différence sulfate de cuivre « — sulfate de zinc. Tout ce que l'on peut conclure c'est que « cette différence est de l'ordre des erreurs que nous pouvons « commettre dans nos expériences ».

Ora per spiegare come la *F. E.* dell'elemento in questione sia pressochè nulla non è necessario ammettere anche nulle le *F. E.* delle coppie intermedie di liquidi. Basta che queste siano di tal grandezza e di tal segno da annullarsi a vicenda per avere quel risultato. Infatti se io formo l'elemento:

$$Na^2 SO^4 | Zn\ SO^4 + Zn\ SO^4 | Cu\ SO^4 + Cu\ SO^4 | Na^2 SO^4$$

e vi introduco i valori da me trovati (cfr. **24**, **42**, **38**), avrò: 0. 169 + 0. 053 − 0. 221 = + 0. 001. *F. E.* che non era data dall'apparecchio di Bichat e Blondlot. Dunque pur stando il risultato sperimentale ottenuto da questi fisici, l'interpretazione loro appare non giustificata.

In seguito si confrontano i valori relativi alla coppia delle soluzioni diluite di $H^2 SO^4$ e $Cu\ SO^4$ della coppia Daniell.

Direzione della corrente. — Riguardo al senso, secondo il quale si dirige la corrente nella coppia, non si può stabilire altra regola generale se non che la corrente va dalla soluzione dei solfati alcalini e alcalino-terrosi, attraverso il contatto, a quella dei solfati degli altri metalli, qualunque ne sia la richezza procentica.

Nelle coppie formate da solfati e acido solforico, la corrente va dai primi al secondo per i solfati di *K*, *Na*, *Li*, *Mg*, *Cd*, e viceversa per quelli di *Zn* e *Cu*. Anche Bichat e Blondlot trovarono che la corrente va dal solfato di sodio all'acido solforico. Così Kittler trovò pure con elettrodi di rame che la corrente va dal solfato di zinco a quello di rame, sia la soluzione del primo sale concentrata o non.

Influenza della concentrazione delle soluzioni. — Sul valore della *F. E.* al contatto dei liquidi influisce la ricchezza delle soluzioni. Per le coppie costituite da solfati, dai pochi dati che ho sulle soluzioni di solfato di rame, di zinco e di potassio, si ricava che, mantenendo costante la concentrazione di una delle due soluzioni saline e facendo aumentare quella dell'altra, facendo cioè crescere la differenza fra la densità delle due soluzioni, cresce la forza elettromotrice (cfr. i risultati delle serie **21**, **22** e **23**; **36** e **37**; **42** e **43**).

Per le coppie costituite da solfati e acido solforico si osserva in generale che colle soluzioni più concentrate di acido solforico, cresce la *F. E.* col decrescere della concentrazione dell'acido, rimanendo costante la concentrazione del sale (cfr. **7** e

8; **12** e **13**; **28** e **29**). Colle soluzioni più diluite di acido solforico si osserva invece diminuire la *F. E.* col diminuire della concentrazione della soluzione salina, rimanendo costante la concentrazione dell'acido (cfr. **19** e **20**; **33** e **35**).

La soluzione di solfato di rame, quasi satura, al 16. 6 % con soluzioni di acido solforico, la cui concentrazione vada gradatamente diminuendo, dà delle forze elettromotrici che crescono per le soluzioni più concentrate di $H^2 SO^4$ e poi decrescono fino ad un certo limite. Colle soluzioni di $H^2 SO^4$ contenenti meno di 11 % la forza elettromotrice varia assai poco colla concentrazione dell'acido (cfr. **28**, **29**, **30**, **31**, **32**, **33**, **34**).

La *F. E.* fra la soluzione di acido solforico (15. 3 %) e quella di solfato di rame (16. 6 %), che è presso a poco quella che si ha nella coppia Daniell, trovai uguale a 0. 106, circa $^1/_{10}$ di volt, valore che va d'accordo con quello trovato da altri.

Becquerel trovò l'elemento $Pt \,|\, \underset{\text{sat.}}{Cu\,SO^4} \,|\, \underset{17\,\%}{H^2\,SO^4} \,|\, Pt = 0.\ 095$ Daniell.

Du Bois-Reymond trovò l'elem. $H^2\,O \,|\, \underset{\text{conc.}}{Cu\,SO^4} \,|\, \underset{12\,\%}{H^2\,SO^4} \,|\, H^2O = 0.\ 108$ Daniell, cogli elettrodi, di cui sopra si è detto.

Kittler infine trovò per l'elemento:

$$Cu \,|\, \underset{d=1.075}{H^2\,SO^4 + H^2\,SO^4} \,|\, \underset{d=1.004}{Cu\,SO^4 + Cu\,SO^4} \,|\, Cu = 0^{\text{D}}.\ 109\,.$$

Legge delle forze elettromotrici del Volta. — Ho trovato anch'io che vi sono dei gruppi di elettroliti i quali soddisfano alla legge del Volta. Citerò qui dei gruppi a tre termini:

K^2SO^4	K^2SO^4	K^2SO^4	K^2SO^4				
Na^2SO^4	$MgSO^4$	Li^2SO^4	$NiSO^4$				
$MgSO^4$	$CoSO^4$	$Al^2(SO^4)^3$	$Al^2(SO^4)^3$				
Na^2SO^4	Na^2SO^4	Na^2SO^4	Na^2SO^4	Na^2SO^4			
$FeSO^4$	$MgSO^4$	$ZnSO^4$	$CuSO^4$	$ZnSO^4$			
$ZnSO^4$	$CuSO^4$	$CuSO^4$	$CoSO^4$	$Al^2(SO^4)^3$			
Li^2SO^4	Li^2SO^4	Li^2SO^4	Li^2SO^4	Li^2SO^4	Li^2SO^4	Li^2SO^4	Li^2SO^4
$FeSO^4$	$FeSO^4$	$MnSO^4$	$NiSO^4$	$FeSO^4$	$MnSO^4$	$ZnSO^4$	$CoSO^4$
$MnSO^4$	$ZnSO^4$	$ZnSO^4$	$CuSO^4$	$CoSO^4$	$CoSO^4$	$Al^2(SO^4)^3$	$Al^2(SO^4)^3$

$NiSO^4$	$NiSO^4$	$NiSO^4$	$NiSO^4$
$MnSO^4$	$MnSO^4$	$MnSO^4$	$CoSO^4$
$CdSO^4$	$ZnSO^4$	$Al^2(SO^4)^3$	$Al^2(SO^4)^3$

$FeSO^4$	$FeSO^4$	$FeSO^4$	$FeSO^4$	$FeSO^4$
$MnSO^4$	$MnSO^4$	$CdSO^4$	$ZnSO^4$	$CuSO^4$
$ZnSO^4$	$CoSO^4$	$CoSO^4$	$CoSO^4$	$CoSO^4$

$CdSO^4$
$ZnSO^4$
$Al^2(SO^4)^3$

Un'altra ventina di gruppi seguono la legge del Volta soltanto molto approssimativamente, altri se ne scostano poco, ma per brevità si ommettono. Da quei gruppi di tre termini se ne deducono pochi altri a quattro termini:

K^2SO^4	Na^2SO^4	Li^2SO^4	Li^2SO^4
Na^2SO^4	$FeSO^4$	$FeSO^4$	$FeSO^4$
$MgSO^4$	$ZnSO^4$	$MnSO^4$	$MnSO^4$
$CuSO^4$	$CoSO^4$	$ZnSO^4$	$CoSO^4$

Si comprende però come i fenomeni, che devono succedere nel contatto di due liquidi, sono così complessi da non essere probabile che si possano veramente ordinare, secondo un determinato criterio, le soluzioni dei sali di uno stesso acido in modo da aversi una serie come quella del Volta. Soltanto a tentativi si potrà trovare una serie di soluzioni di tale concentrazione, che si potranno disporre secondo una scala come quella del Volta, e siccome il senso della corrente da un sale all'altro non cambia col cambiare della richezza procentica, questa serie, secondo le mie determinazioni, dovrebbe essere ordinata nel seguente modo per i seguenti dodici solfati: K^2SO^4, Na^2SO^4, Li^2SO^4, $MgSO^4$, $NiSO^4$, $FeSO^4$, $MnSO^4$, $CdSO^4$, $ZnSO^4$, $CuSO^4$, $CoSO^4$, $Al^2(SO^4)^3$, dove la corrente va nella coppia da ciascun sale verso quelli che lo seguono nella serie.

Rapporti colle proprietà fisiche o chimiche dei sali. — Non sono molto notevoli le relazioni che si osservano fra le proprietà fisiche e chimiche dei solfati studiati ed il valore delle forze elettromotrici delle coppie da essi costituite.

Anzitutto non mi sembra verificarsi qui ciò che si verifica per la elettricità sviluppata per strofinio, che cioè i corpi di maggior resistenza elettrica presentino le differenze di potenziale più grandi (Paalzow, *loc. cit.*). Noi vediamo che appunto le soluzioni più concentrate, e quindi meno conduttrici, sono quelle che ci danno le forze elettromotrici più piccole. Fra la soluzione di $ZnSO^4$ e quelle di $CdSO^4$ e di $MnSO^4$ non si è manifestata $F.E.$ apprezzabile, quantunque abbia verificato che il contatto era avvenuto, perchè la corrente di una Daniell lo attraversava.

Si osserva invece che forze elettromotrici grandi si hanno specialmente per quelle coppie, in cui la differenza di solubilità dei due sali e quindi la differenza nella concentrazione e nella densità delle due soluzioni è molto grande, come sarebbero quelle formate dalle soluzioni di Na^2SO^4 e K^2SO^4, che contengono pochissimo sale, come quelle dei solfati più solubili. E quindi parrebbe che ciò fosse in relazione colla rapidità di diffusione, la quale è tanto maggiore quanto maggiore è la differenza di densità nei due liquidi, oppure colla tendenza del sale più solubile a sciogliersi nell'acqua della soluzione di quello meno solubile. Ma siccome la relazione ora accennata non si può dire generale, così nulla si può concludere al riguardo.

Sembra pure che i solfati, che hanno maggior tendenza a formare dei sali doppi, diano le maggiori forze elettromotrici di contatto. Quindi si presenta la questione se la $F.E.$ al contatto delle soluzioni saline stia in relazione colla formazione di nuovi composti.

Sulla formazione di sali doppi in soluzione, molto si è discusso. Uno dei risultati più importanti degli studi del Graham sulla diffusione dei liquidi fu al certo la dissociazione di certi sali doppi, quando si diffondono nell'acqua. Kremers osservò che se si mescolano quantità equivalenti di sali, i quali possono formare un sale doppio per cristallizzazione, il volume della mescolanza è quasi esattamente uguale alla somma dei volumi delle due soluzioni mescolate; quindi ne conchiuse che non si formano doppi sali nella soluzione. Così Favre e Valson avendo trovato che nella soluzione di un doppio sale nell'acqua si ha assorbimento di una quantità di calore maggiore della somma delle quantità di calore assorbite nella soluzione dei singoli sali, ne dedussero che la differenza è impiegata nella dissociazione del sale. Ora questa potrebbe non essere totale, ed una parte di

quel calore essere assorbita nella trasformazione dell'acqua di cristallizzazione in acqua di soluzione. Raoult trovò che l'abbassamento prodotto nel punto di congelazione dell'acqua dalla presenza di un doppio sale è sensibilmente uguale alla somma degli abbassamenti prodotti dalla presenza dei singoli sali in quantità equivalenti. Anche Rüdorff fondandosi sulle sue ricerche sulla solubilità dei miscugli di sali non ammette la formazione di doppi sali in soluzione.

Al contrario Ingenhoes, il quale si occupò di questa questione, servendosi del dializzatore di Graham, ha constatato che nelle soluzioni più diluite si ha dissociazione, nelle più concentrate formazione di doppi sali. Così pure Hittorf cita molti esempi di doppi sali in soluzione e dimostra che in essi si ha una dissociazione tanto più avanzata, quanto più aumenta l'acqua di soluzione. Si deve dunque distinguere fra una dissociazione parziale ed una totale dei sali doppi in soluzione. Finalmente Klein (*Wied. Ann.* 1886 (*N. F.*), XXVII) fondandosi sul fatto che la conducibilità elettrica dei doppi sali da lui studiati è nelle soluzioni più diluite sensibilmente uguale alla media aritmetica delle conducibilità dei singoli sali, o alcunchè minore, e nelle soluzioni concentrate è sempre minore, ne conchiude che i sali doppi sono completamente dissociati nelle soluzioni diluite, e più o meno nelle concentrate, e che ad ogni modo la dissociazione aumenta colla diluizione.

Siccome anche tutti i fenomeni, che erano stati addotti come prova della dissociazione dei sali doppi in soluzione, si possono spiegare mediante una dissociazione parziale, così si può ammettere che nelle soluzioni concentrate, come è il caso delle mie sperienze, in cui erano tutte prossime alla saturazione, sia possibile la formazione di un doppio sale. Questa ammissione mi sembra confermata da una relazione interessante che si osserva fra il valore della forza elettromotrice per tre coppie di sali, che formano sali doppi ad ugual numero di molecole di acqua di cristallizzazione, ed il calore di formazione e di soluzione di questi sali doppi.

La *F. E.* della coppia	K^2SO^4 | $MgSO^4$	è	0,098	volts
» »	K^2SO^4 | $ZnSO^4$		0,095	»
» »	K^2SO^4 | $CuSO^4$		0,095	»

Il calore di formazione del sale

$$Mg\,SO^4 + K^2SO^4,\ 6\ H^2O \text{ è } 23920^c$$
$$Zn\,SO^4 + K^2SO^4,\ 6\ H^2O \text{ è } 23950^c$$
$$Cu\,SO^4 + K^2SO^4,\ 6\ H^2O \text{ è } 22990^c.$$

Si vede dunque che da una parte le forze elettromotrici di quelle tre coppie di sali, dall'altra i calori di formazione dei sali doppi corrispondenti, sono pressochè uguali. Anche i calori di soluzione di tre sali doppi (rispettivamente -10020^c, -11900^c, -13510^c) sono poco differenti. Si osserva tuttavia che per la coppia $K^2SO^4 \mid Mn\,SO^4$ abbiamo il valore 0.178, mentre il calore di formazione (13810^c) di questo sale doppio con $4\,H^2O$ è minore di quello dei tre sali doppi sopra indicati. Ma qui la differenza nella solubilità dei due sali e quindi nella concentrazione e nella densità delle due soluzioni è maggiore in quest'ultima che nelle tre coppie sopra considerate, e quindi potrebbe avvenire che qui influisse oltre alla formazione del sale doppio anche la soluzione del sale più solubile, o la diluizione della soluzione concentrata, o una maggiore rapidità di diffusione.

Da quanto son finora venuto esponendo mi sembra potersi conchiudere che sul valore delle forze elettromotrici al contatto dei liquidi possono influire contemporaneamente delle azioni fisiche di diffusione, di soluzione, o di diluizione, e delle azioni chimiche consistenti in combinazioni molecolari o atomiche, azioni tutte che rendono molto complesso il fenomeno dello sviluppo di elettricità in queste condizioni. A proposito del fenomeno della diffusione nei liquidi il Clerk-Maxwell così si esprime: « È facile il vedere che se esso consiste in uno spostamento irregolare fra le molecole di un liquido misto, esso deve sopratutto tendere a far sì che ciascun componente passi dagli strati in cui esso entra in maggior proporzione nella mescolanza, agli strati dove è meno abbondante. È pure manifesto che il moto relativo dei due costituenti deve trovare una resistenza proveniente dall'incontro delle molecole di questi componenti. Il valore di questa resistenza nei liquidi dipende da condizioni più complicate che nei gas, e per ora si può ammettere che esso sia una funzione di tutte le proprietà della mescolanza in un dato punto, cioè della sua temperatura e pressione, e delle proporzioni dei differenti componenti della mescolanza ». In tal modo si spiega il difetto

quasi assoluto di rapporti semplici e evidenti fra i valori di quelle forze elettromotrici. Forse uno studio più esteso sopra soluzioni diversamente concentrate degli stessi sali, e sopra soluzioni di altri sali degli stessi metalli, potrà portare un po' più di luce in questi fenomeni tanto complicati. Mi propongo d'esporre in altra Nota le determinazioni già fatte sopra alcuni cloruri e le altre che intendo di fare, come continuazione di questo lavoro.

Laboratorio di Fisica del R. Istituto Tecnico di Torino.
Giugno 1886.

Fig. 2ª

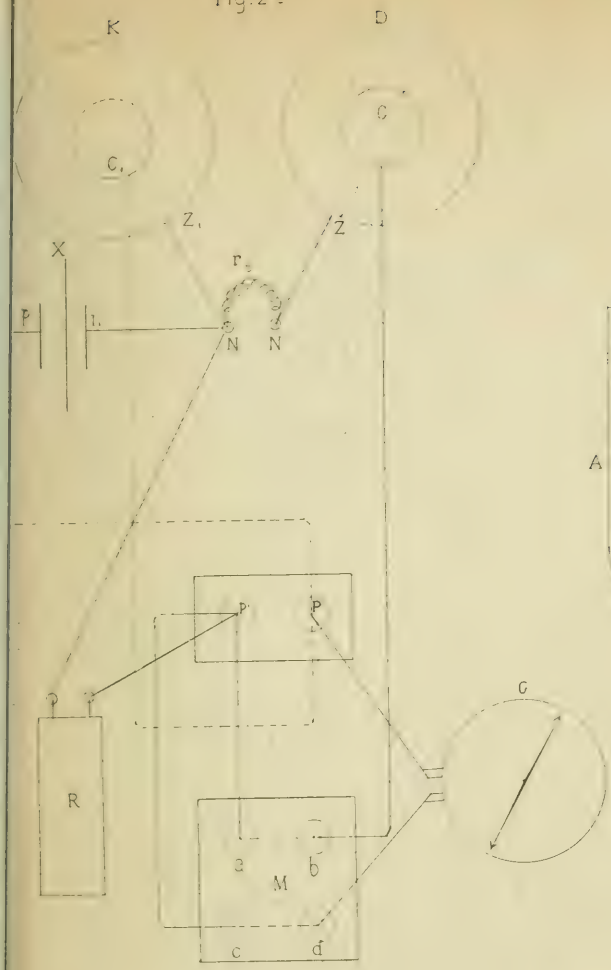


Fig. 4ª

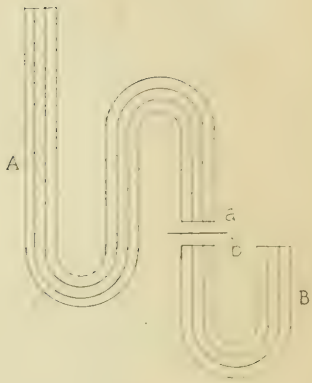


Fig. 3ª

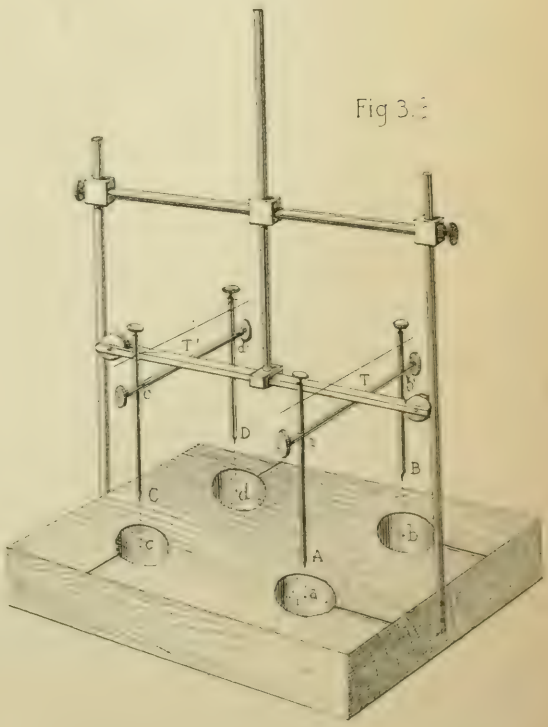
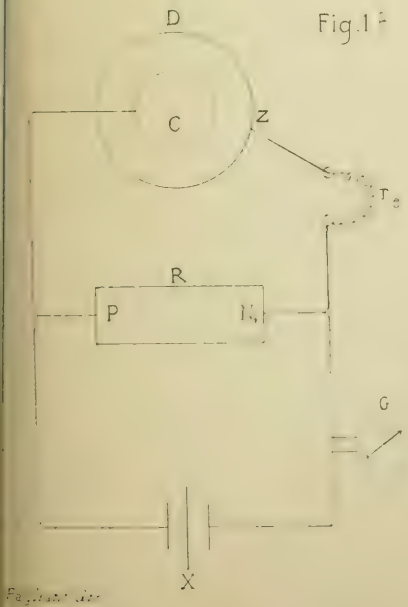


Fig. 1ª



S. Pagliani — Sulle forze elettromotrici di contatto fra liquidi

INTORNO ALL' INFLUENZA
DELLA
MAGNETIZZAZIONE
SOPRA LA CONDUCIBILITÀ TERMICA DEL FERRO

del Dott. Angelo Battelli

Come è noto, il primo a intraprendere esperienze intorno all'influenza che può esercitare la magnetizzazione sulla conducibilità termica del ferro fu il Maggi (*) nel 1851.

Egli sperimentando sopra un disco di ferro, la cui superficie era spalmata di cera, e il cui centro veniva riscaldato a temperatura costante, giunse a concludere che la magnetizzazione produce nel ferro un notevole aumento di conducibilità nel senso perpendicolare all'asse di magnetizzazione e una diminuzione lungo l'asse, o almeno uno di questi effetti. Ma il valore della detta variazione trovato dal Maggi, che per la sua grandezza appariva poco probabile, e il non aver egli neppure curato di ripetere l'esperienza, come risulta dalla sua Memoria, indussero qualche dubbio sull'esattezza di tale conclusione. Anzi sino dal 1856, Thomson (**) scriveva che altri sperimentatori avevano ritentata la prova di Maggi, ma non erano riusciti a verificare la cosa.

Invece il Pazienti, in una Nota letta all'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, nel 1865 asseriva di esservi riuscito. Eccetto questa breve Nota del Pazienti, non ne conosco altra prima del lavoro pubblicato su questo argomento dai professori Naccari e Bellati nel 1876 (***).

(*) Memorie dell'Accademia di Verona, vol. XXVIII, pag. 159 (1851).

(**) Phil. trans. for. 1856.

(***) Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, vol. II, serie V (1876).

E siccome oltre ad essi altri sperimentatori in seguito studiarono lo stesso soggetto, arrivando a conclusioni disparatissime, credo utile riferire brevemente i metodi e le cautele dai vari autori adoperate.

Dapprincipio i professori Naccari e Bellati fecero uso di lamine di ferro, che venivano magnetizzate per mezzo di fortissime elettrocalamite, e in cui la propagazione del calore veniva studiata seguendo i metodi che Mayer e Röntgen adoperarono per la conducibilità termica nei cristalli. Ma essi in tal guisa non poterono osservare l'attesa variazione nella conducibilità del ferro e si rivolsero quindi al metodo stesso del Maggi, cercando di avvicinarsi alle condizioni della sua esperienza, pur migliorandola in alcuni particolari.

Dopo molti tentativi fatti colla maggiore accuratezza i due sperimentatori furono costretti ad abbandonare pure questo metodo; perchè fu loro impossibile anche in tali condizioni l'osservare il fenomeno enunciato dal Maggi. Allora essi pensarono di fare l'esperienza in modo da ottenere maggiore sensibilità: disponendo sul disco di ferro precedentemente usato le due saldature di una coppia termoelettrica, l'una sopra il diametro assiale, cioè passante per i poli dell'elettrocalamita, e l'altra sopra l'equatoriale, ad eguale distanza dal centro e ben fisse nelle loro posizioni.

Non ottenendo neppure per questa via alcun effetto, sostituirono ad una coppia una pila termoelettrica, e fecero dei fori nel disco onde fissarne le estremità con maggiore sicurezza; ma anche in tale caso le variazioni che ottennero non superavano gli errori d'osservazione. Onde finirono per concludere, che se pure esiste il fenomeno indicato dal Maggi, esso non può avere che una minima intensità.

Nel 1878 Tomlinson (*) tornò sull'argomento, e fece una serie di variate esperienze, le quali tutte lo condussero alla conclusione che esiste ed in modo notevole un'alterazione della conducibilità termica del ferro per effetto della magnetizzazione. Egli usò da prima due aste l'una di ferro, l'altra di ottone, ambedue della sezione di 1 cmq. e le saldò in due aperture praticate in un cubo di Leslie nel quale bolliva dell'acqua. Sotto all'asta di ferro fu collocata un'elettrocalamita a ferro di

(*) Proceedings of the R. Society of London, vol. XXVII, pag. 109 (1878).

cavallo, e sulle due aste vennero fermate rispettivamente le due saldature di una coppia termoelettrica rame-pakfong, per mezzo di striscie di caoutchouc; le correnti prodotte nella pila venivano indicate da un sensibile galvanometro Thomson. Fece poi altre esperienze, con un secondo metodo disponendo parallelamente l'una all'altra due aste di rame $A\ B$ e $C\ D$, e saldando alle due estremità corrispondenti una terza asta di ferro lunga e larga 1^{cm}, come a formare il terzo lato d'un rettangolo, del quale le due prime aste formavano i due lati maggiori paralleli; alla prima asta $A\ B$ era saldata un'altra asta pure di rame $E\ A$, la quale penetrava nel cubo di Leslie. Al di sotto dell'asta di ferro era posta l'elettrocalamita, e tutto l'apparecchio, all'infuori del cubo di Leslie e parte della sbarra $E\ A$, era collocato in una cassa riempita di segatura di legno. Una punta della coppia termoelettrica era addossata all'asta di rame $C\ D$, l'altra punta era tuffata nella segatura.

Finalmente usò un terzo metodo nel quale saldò le estremità di due sbarre d'acciaio a verghe di rame, per modo da formare due aste che venivano introdotte da una parte nei lati opposti d'un cubo di Leslie, dall'altra in due piccoli recipienti pieni d'acqua. In questi due recipienti egli variava la quantità dell'acqua in maniera da avere in ambedue la stessa temperatura e perciò nella pila, che aveva le sue estremità nei due recipienti, non si aveva segno di corrente. Quando poi una delle sbarre d'acciaio veniva magnetizzata e allora variava in essa la conducibilità, si generava una corrente nella pila, che egli però neutralizzava togliendo nuovamente acqua da uno dei due recipienti.

Il Tomlinson trovò sufficiente concordanza nei risultati ottenuti colle varie esperienze da lui intraprese, e si credè autorizzato a concludere che la conducibilità termica nel ferro per effetto della magnetizzazione, venga alterata almeno del 6 per cento.

Ma dopo Tomlinson nel 1883 i signori John Trowbridge e Charles Binghan Penrose (*) fecero nuove esperienze, dalle quali ottennero pel fenomeno di Maggi un risultato negativo. Essi studiarono dapprima sopra un'asta di ferro dolce lunga 95^{cm}, larga $1^{cm}, 3$ e spessa $0^{cm}, 2$, e la collocarono orizzontalmente

(*) Philosophical Magazine, vol. XVI, serie V, pag. 377 (1883).

attraverso i lati di una cassetta, dentro la quale posero una lampada Bunsen tale che mantenesse la sbarra al calore rosso ciliegia. I bracci della sbarra da una parte e dall'altra furono chiusi rispettivamente entro due tubi di vetro, e ad ogni estremità della sbarra fu saldato un grosso filo di pakfong.

Un braccio della sbarra era posto fra i poli di un'elettrocalamita. I primi risultati ottenuti dai due sperimentatori parvero confermare la scoperta di Maggi, ma ben presto s'avvidero che tali risultati erano dovuti o all'azione diretta dell'elettrocalamita sull'ago del galvanometro, o alla radiazione del calore dell'elettrocalamita sull'asta di ferro. Essi in seguito eliminarono queste due cause d'errore, e allora non poterono più osservare alcun fenomeno.

Queste ultime esperienze, come quelle dei professori Naccari e Bellati, dànno subito a pensare, che per lo meno siano esagerati i valori dati dal Maggi e dal Tomlinson a questo riguardo.

Perciò ho stimato utile di ripetere dapprima le prove del Tomlinson nelle stesse condizioni in cui egli le aveva fatte; avendo cura però di rendere gli apparecchi più sensibili, e di allontanare ogni circostanza che potesse sospettarsi causa di errore.

II.

Adoperai anzitutto due aste, l'una di ferro dolce di Svezia, l'altra d'ottone, lunghe 30^{cm} e della sezione quadrata di 1 cmq., ciascuna delle quali terminava ad una estremità in una vite lunga 2 cm. e del diametro di 5 mm. Con queste viti le aste penetravano attraverso a due fori rispettivamente in due cubi di latta uguali, alle cui pareti venivano strettamente fissate per mezzo di adatte madreviti. Nel coperchio che costituiva la parete opposta di ciascun cubo, era saldata una canna che conduceva il vapore dell'acqua bollente e che si prolungava nell'interno del cubo stesso, sino a circondare quasi tutta la madrevite. Nell'asta di ferro, a 3 cm., dalla parete del cubo, era praticato un piccolo forellino da introdurvi la punta di una coppia termoelettrica; e un secondo foro v'era nell'asta di ottone a 4^{cm}, 0 dalla parete, seguito da altri due distanti ognuno di 5 mm. dal precedente per modo che l'altra punta della coppia termoelettrica si poteva spostare lungo l'asta di ottone, onde ottenere,

per quanto era possibile, che la corrente nella coppia fosse nulla quando le aste erano riscaldate.

La coppia termoelettrica che dapprima ho adoperato era di ferro-pakfong, ma ben presto l'abbandonai, temendo qualche effetto della magnetizzazione sulle proprietà termoelettriche del ferro che ne faceva parte, e la sostituii con due coppie di zinco-pakfong, le cui saldature erano coperte diligentemente con seta ed erano infisse forzatamente nei fori delle aste, i quali venivano poi riempiti con olio. Il galvanometro era di quelli a riflessione di Thomson, e quantunque l'ago fosse ben astatico, tuttavia per sottrarlo ad ogni azione diretta della calamita fu posto in un'altra stanza lontano 15 metri circa dall'apparecchio.

Innanzi tutto si determinò qual deviazione nel galvanometro corrispondeva a una data differenza di temperatura nelle saldature della pila, e fu trovato, come media di parecchie determinazioni, che per un grado di differenza nella temperatura delle saldature, la macchia di luce del galvanometro si spostava di 760 divisioni sulla scala.

Dinanzi all'estremità libera dell'asta di ferro dolce fu posta una potentissima elettrocalamita, composta di un'asta di ferro dolce lunga 36^{cm}, e della sezione di 21 cmq., ricoperta con un filo di rame della sezione di $1^{mm},9$ e della lunghezza di 134 m., attraverso al quale nell'atto dell'esperienza si faceva passare la corrente di 4 Bunsen. L'elettrocalamita come pure le aste vennero solidamente fermate, e fra il nucleo dell'elettrocalamita e l'asta di ferro erano stretti due fogli di grosso cartone, fra cui era interposto del panno di lana, onde premunirsi dal calore prodotto per il passaggio della corrente nel rocchetto: la distanza fra l'asta di ferro e l'elettrocalamita era così di 5 mm. circa. Similmente le aste e i fili della coppia termoelettrica erano difesi con doppi schermi di latta e cartone dal calore radiato dal cubo e dal pallone ove bolliva l'acqua.

Come determinazioni preliminari ho voluto provare se l'elettrocalamita influisse direttamente sull'ago del galvanometro e se il calore radiato dal rocchetto arrivasse all'asta in istudio; ma fortunatamente potei constatare d'essere al coperto da tali cause d'errore.

Si fece poi circolare per parecchie ore il vapore d'acqua bollente nei cubi, e allora si infissero le seconde saldature della pila termoelettrica in quel foro dell'asta d'ottone che meglio si adattava onde avere nel galvanometro la minima deviazione.

Quando da circa mezz'ora la macchia di luce si manteneva sufficientemente ferma sulla scala, o almeno non si moveva più in una direzione determinata, cominciava a notare di minuto in minuto le divisioni su cui la macchia stessa passava; e questo per l'intervallo di 10 minuti primi, dopo di che faceva passare la corrente nel rocchetto dell'elettrocalamita, e seguitava ad osservare l'andamento della macchia di luce sulla scala per altri 10 minuti dopo i quali interrompeva la corrente, e per gli ultimi 10 minuti leggeva le divisioni su cui passava la macchia.

In questo modo però non ho potuto constatare alcun effetto, perchè o sia che le aste, quantunque cercassi di fermarle solidamente, soffrissero qualche piccolissimo spostamento, o sia che l'agitazione dell'aria della stanza intorno all'asta producesse nell'estremità della pila continui cambiamenti di temperatura, non potei ottenere mai una costante posizione della macchia sulla scala; talchè se l'effetto fosse stato molto piccolo, esso veniva coperto da queste cause d'errore. Allora pensai di pormi in condizioni migliori, sopprimendo l'asta di ottone, e tuffando le due saldature della pila, che in essa erano infisse, in un tubo da saggi pieno d'olio contenuto in un vaso d'acqua che era collocato alla sua volta in una cassetta con segatura di legno; l'asta di ferro venne poi rinchiusa in una cassa lunga e stretta che ebbi cura di circondare con ovatta; attraverso ad un'apertura praticata nella parte estrema della cassa, passava l'elettrocalamita.

Per precauzione in queste nuove condizioni furono rinnovate a freddo le prove per vedere se il calore del rocchetto giungesse all'asta di ferro in istudio, e mi potei accertare replicatamente che passando la corrente per 25 minuti primi, non si aveva nel galvanometro nessun indizio di deviazione.

Allora nuovamente feci circolare il vapore nei cubi e ripetei le osservazioni come nel caso precedente, colla sola differenza che ora manteneva la corrente nel rocchetto per 15 minuti primi.

In tali condizioni la macchia si manteneva ben ferma sulla scala dopo circa 3 ore che nel cubo circolava il vapore, e quindi mi trovavo nel caso di osservare qualunque cambiamento fosse avvenuto nella corrente termica dell'asta.

Alcune esperienze fatte in queste condizioni parvero confermarmi, quantunque in tenuissimo grado, il fenomeno enunciato dal Maggi; altre invece non mi diedero indizio di alcun effetto.

Riporterò qui sotto le tabelle relative a due esperienze, una delle quali confermerebbe meglio d'ogni altra il fenomeno, l'altra è scelta fra quelle che dànno effetto nullo o negativo.

Nelle colonne controsegnate con *L* sono i numeri indicanti le divisioni lette sulla scala e gli indici (*C*) (*Z*) ci dànno rispettivamente il minuto, a cominciare dal quale *passa* o *non passa* la corrente magnetizzante nel rocchetto.

TABELLA I.

Tempi	*L*	Tempi	*L*	Tempi	*L*
0′	106 (*Z*)	12′	105	24′	111
1′	105	13′	104	25′	111 (*Z*)
2′	106	14′	106	26′	111
3′	104	15′	108	27′	111
4′	104	16′	108	28′	110
5′	105	17′	108	29′	110
6′	104	18′	110	30′	110
7′	106	19′	110	31′	108
8′	105	20′	110	32′	109
9′	105	21′	111	33′	108
10′	105 (*C*)	22′	110	34′	107
11′	105	23′	111	35′	108

TABELLA II.

Tempi	*L*	Tempi	*L*	Tempi	*L*
0′	70 (*Z*)	12′	70	24′	69
1′	70	13′	70	25′	69 (*Z*)
2′	70	14′	70	26′	69
3′	72	15′	71	27′	69
4′	72	16′	70	28′	69
5′	70	17′	70	29′	70
6′	71	18′	69	30′	70
7′	71	19′	69	31′	69
8′	70	20′	70	32′	71
9′	71	21′	69	33′	71
10′	71 (*C*)	22′	68	34′	70
11′	71	23′	68	35′	71

Siccome le esperienze preliminari indicano che riscaldando le saldature che ora si trovano immerse nell'olio del tubo, si ha un movimento della macchia dallo zero verso l'estremità della scala, così dalla prima tabella si dedurrebbe che il foro nell'asta di ferro s'è raffreddato, ossia sarebbe verificato il fenomeno di Maggi; ma dalla seconda tabella, se qualche cosa si volesse indurre, si verrebbe a concludere l'opposto.

III.

Bisognava quindi migliorare ancora le condizioni, crescendo la magnetizzazione del ferro, e cercando qualche maniera di rendere maggiormente sensibile il mutamento della corrente termica nell'asta. La prima di queste condizioni era facile a soddisfare, sostituendo all'elettrocalamita un rocchetto, che circondasse l'asta di ferro.

Per ingrandire poi l'effetto della variazione della conducibilità termica del ferro, pensai di costrurre l'asta nella maniera seguente. Un prisma di ferro della lunghezza di 3^{cm}, e di sezione quadrata avente 2^{cm} di lato, era saldato ad argento fra due prismi di rame aventi la stessa sezione dell'asta di ferro, e lunghi ciascuno 7^{cm}. Il primo di questi prismi terminava in una vite da introdursi nel cubo al quale veniva avvitato mediante una madrevite pure di rame. Attorno al prisma di ferro si poneva il rocchetto e da una parte e dall'altra dello stesso prisma, era in ciascun prisma di rame un foro, dove si infiggevano le estremità della pila termoelettrica rivestite di seta.

L'asta era situata in una cassetta circondata da ogni parte di cotone, e il breve tratto di prisma di rame che rimaneva nell'aria fra il cubo e la cassetta era ben ricoperto con panno di lana. Con tale apparecchio, se la magnetizzazione longitudinale generata dal rocchetto nell'asta di ferro diminuiva in questa la conducibilità pel calore, si doveva avere un abbassamento di temperatura nel secondo prisma di rame e un innalzamento nell'estremità del primo che era prossima al ferro; o viceversa, se tale magnetizzazione avesse aumentato la conducibilità. Per tal modo la differenza di temperatura delle due saldature sarebbe stata più grande, che se una sola delle saldature stesse si fosse trovata sull'asta.

Il rocchetto poi consisteva in un tubo cilindrico di vetro sottile, lungo $2^{cm},5$ e del diametro interno di $4^{cm},5$ a cui era avvolto del filo di rame rivestito di seta del diametro di $1^{mm},7$ e della lunghezza di 20 metri. Dentro a questo tubo ne era collocato un secondo, il cui asse coincideva con quello del primo, e il cui diametro interno era di $3^{cm},5$. Il tubo piccolo era rivestito da ogni parte con stagnola, il tubo più grande soltanto internamente. I due tubi erano fermati l'uno all'altro mediante piccoli cunei di legno, che penetravano forzatamente nello spazio anulare; e per mezzo di simili cunei l'intero rocchetto era adattato al prisma di ferro, per modo che l'asse di questo coincidesse coll'asse del rocchetto e che le estremità del prisma, il quale era di 5 mm. più lungo del rocchetto, sporgessero di quantità eguali da ambe le parti.

Disposte in tal modo le cose, volli provare a freddo, se il calore sviluppato nel rocchetto giungesse all'asta di ferro, usando per corrente magnetizzante quella di due Bunsen. Trovai che infatti dopo 7 minuti che passava la corrente, la macchia di luce cominciava a muovere lentamente verso Sud, indicando un riscaldamento nel foro del *primo* prisma di rame; ripetei molte volte l'esperienza e la prolungai per mezz'ora, e sempre osservai questo movimento della macchia, che si faceva man mano sempre più rapido. Usai allora la corrente di una sola Bunsen e la deviazione nella scala, quantunque ritardata e diminuita, tuttavia non scomparve. Provai allora ad usare un secondo rocchetto, che aveva un diametro 5 mm. più grande del precedente ed anche in tal caso, pure colla corrente di una sola Bunsen, dopo 15 minuti primi si cominciava a notare un movimento della macchia sulla scala. E per togliere ogni sospetto che questa deviazione nel galvanometro potesse dipendere da qualche altra cagione che non fosse calore radiato dal rocchetto, ho fatto le due seguenti prove. Ho tuffato le saldature della pila termoelettrica rispettivamente in due tubi da saggi pieni d'olio; l'uno di questi tubi l'ho sepolto nella segatura di legno, e l'altro l'ho disposto dentro il rocchetto per modo che le saldature che erano legate insieme nel tubo si trovassero sull'asse del rocchetto. Usando il rocchetto più piccolo e la corrente di due Bunsen, dopo dieci o dodici minuti primi la macchia cominciava a muoversi di due divisioni per ogni minuto verso Sud, il che indicava un riscaldamento nell'olio del tubo che si trovava dentro il rocchetto. Usando

invece il rocchetto più grande con la corrente di una sola Bunsen, non ottenni nel galvanometro nessuna deviazione durante i 25 minuti primi, in cui la corrente seguitò a passare.

Allora sostituii nel tubo da saggi situato dentro il rocchetto un termometro diviso in cinquantesimi di grado alle saldature della pila termoelettrica; passando la corrente di 2 Bunsen nel rocchetto piccolo, e per 35 minuti primi, ottenni un innalzamento di $0^{\circ},018$ nel termometro, mentre non ottenni alcun indizio di innalzamento di temperatura usando il rocchetto più grande pel quale faceva passare la corrente di una Bunsen per un tempo uguale.

Ho voluto riferire questi tentativi, perchè il Tomlinson ha usato nel suo ultimo metodo un rocchetto costruito in modo simile al mio, mentre però nel suo la spirale era più vicina all'asta di ferro, e il filo che lo ricopriva era più sottile. Anche la corrente da lui usata pare fosse più intensa di quella che io adoperai, giacchè, sebbene non specifichi quale corrente fosse, tuttavia dice che in questo metodo usò talvolta quella di una forte pila.

Per mettermi in seguito al sicuro da questa causa d'errore ho diminuita ancora la lunghezza del rocchetto, onde avere i fori in cui erano infisse le saldature più distanti da esso, tanto più che risulta dalle esperienze di Lenz e Jacobi (*) che l'intensità magnetica del nucleo di ferro può considerarsi indipendente dal raggio della spirale magnetizzante quando il nucleo sporge notevolmente da ambe le parti. Quindi ho reso il diametro del tubo esterno di 8^{cm}, l'ho costruito in legno per maggior solidità e l'ho ricoperto con una striscia di panno dello spessore di 2^{mm}. Gli orli poi di questo rocchetto erano alti 5^{cm}, e coperti di stagnola, perchè impedissero la radiazione del calore all'esterno. Il tubo minore aveva il diametro di 5^{cm} ed era al solito tutto coperto di stagnola.

Inoltre ho sostituito al filo di rame una lamina di rame sottilissima larga 2^{cm}, e lunga 15 metri, le cui spirali erano fra loro separate da una striscia continua di carta paraffinata. E per ben difendere anche i fili della pila termoelettrica da ogni influenza calorifica del rocchetto, ho adattato fra essi e lo stesso rocchetto doppi schermi di latta e cartone da ambe le parti.

Chiuso nuovamente l'apparecchio nella sua cassetta, ho cominciato dal provare qual fosse il suo comportamento a freddo:

(*) Pogg. Ann., 47, pag. 225 (1839).

facendo passare una corrente magnetizzante di 2 Bunsen disposte per superficie, non se ne avvertì il minimo effetto riscaldante sulle saldature della pila.

Sono passato quindi a fare esperienze col riscaldamento non tralasciando però, innanzi di far circolare il vapore nel cubo, di fare ogni volta un'osservazione anche a freddo. Da tutte le esperienze eseguite in queste condizioni e in giorni successivi ho ottenuto costantemente, in causa della magnetizzazione, un movimento della macchia di luce sulla scala dallo zero verso l'estremità, movimento che in media cominciava dopo 5 minuti primi dacchè passava la corrente magnetizzante di 2 Bunsen e cessava dopo 12 minuti primi, producendo in media una deviazione di 24 divisioni. Tale deviazione indicava un raffreddamento del primo foro, o un riscaldamento del secondo, o l'uno e l'altro effetto insieme, il che deriva veramente da una diminuzione della conducibilità termica del ferro.

Fra le numerose tàbelle rappresentanti queste esperienze, porterò, come esempio, una di quelle in cui la deviazione è più vicina al valore medio.

TABELLA III.

Tempi	*L*	Tempi	*L*	Tempi	*L*
0′	131 (*Z*)	17′	137	34′	156
1′	131	18′	140	35′	155
2′	133	19′	144	36′	155
3′	132	20′	149	37′	152
4′	131	21′	155	38′	150
5′	131	22′	155	39′	146
6′	132	23′	156	40′	144
7′	131	24′	156	41′	142
8′	131	25′	156	42′	140
9′	132	26′	155	43′	138
10′	132 (*C*)	27′	156	44′	137
11′	132	28′	157	45′	136
12′	132	29′	156	46′	136
13′	131	30′	155 (*Z*)	47′	136
14′	130	31′	157	48′	136
15′	134	32′	156	49′	137
16′	135	33′	156	50′	137

Da questa tabella, come pure generalmente dalle altre, si vede che, dopo essere passata per un certo tempo la corrente magnetizzante, se si tiene in seguito per altrettanto tempo il circuito aperto, non si vede la macchia ritornare al punto da cui era partita, ma fermarsi invece in una posizione più lontana dallo zero. Questo può attribuirsi al fatto che il ferro adoperato, quantunque fosse di buonissima qualità, tuttavia per la magnetizzazione subìta, serbasse per qualche tempo un'alterazione molecolare che non gli consentisse di tornare perfettamente nelle condizioni termiche primitive.

Questo metodo però, sebbene mi avesse dato indizio dell'esistenza del fenomeno, non mi poteva servire per avere una misura della variazione della conducibilità. Perciò all'asta di rame e ferro ne sostituii un'altra tutta di ferro lunga 30^{cm}, della stessa sezione della precedente e coi fori alla medesima distanza di prima dall'estremità ov'era la vite. Assicuratomi che pure con tale asta si mostrava abbastanza evidente il fenomeno, pensai di determinare il rapporto fra la conducibilità normale del ferro, e la sua conducibilità quand'è magnetizzato nel modo seguente.

Se si indicano rispettivamente con t_1, t_2 e t_0 le temperature del primo e del secondo foro e dell'ambiente in cui era immersa l'asta; e con x_1 e x_2 le distanze rispettive dei fori dalla sorgente calorifica, possiamo con sufficiente esattezza rappresentare l'eccesso della temperatura del primo foro su quella dell'ambiente, quando la trasmissione nel calore è allo stato permanente con

$$t_1 - t_0 = A e^{-x_1 \sqrt{\frac{hp}{ks}}},$$

dove A è una costante, h la conducibilità esterna, k la conducibilità interna, p il perimetro ed s la sezione dell'asta. Ma siccome nell'asta in istudio la sezione ha per lato due centimetri, si avrà $\sqrt{\frac{p}{s}} = \sqrt{2}$ e perciò scriveremo:

$$t_1 - t_0 = A e^{-x_1 \sqrt{2\frac{h}{k}}} \quad \ldots (1).$$

Analogamente pel secondo foro si avrà

$$t_2 - t_0 = A e^{-x_2 \sqrt{2\frac{h}{k}}}.$$

Da queste equazioni combinate insieme si ottiene

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_0} = \frac{e^{-x_1\sqrt{2\frac{h}{k}}} - e^{-x_2\sqrt{2\frac{h}{k}}}}{e^{-x_1\sqrt{2\frac{h}{k}}}} .$$

Se la conducibilità dell'asta da k si cambia in k' molto prossimo a k, potremo ammettere senza errore sensibile, che h rimanga costante, e allora si avrà analogamente

$$\frac{t_1' - t_2'}{t_1' - t_0} = \frac{e^{-x_1\sqrt{2\frac{h}{k'}}} - e^{-x_2\sqrt{2\frac{h}{k'}}}}{e^{-x_1\sqrt{2\frac{h}{k'}}}}$$

dove t_1' e t_2' sono le nuove temperature dei due fori.

E siccome

$$\frac{t_1 - t_0}{t_1' - t_0} = \frac{e^{-x_1\sqrt{2\frac{h}{k}}}}{e^{-x_1\sqrt{2\frac{h}{k'}}}} ,$$

si avrà

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1' - t_2'} = \frac{e^{-x_1\sqrt{2\frac{h}{k}}} - e^{-x_2\sqrt{2\frac{h}{k}}}}{e^{-x_1\sqrt{2\frac{h}{k'}}} - e^{-x_2\sqrt{2\frac{h}{k'}}}} .$$

Se ora sviluppiamo in serie ciascun termine del numeratore e del denominatore, potremo, con sufficiente approssimazione, fermarci al secondo termine di ogni serie, essendo il valore di $\frac{h}{k}$ molto piccolo nelle nostre condizioni e scrivere quindi:

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1' - t_2'} = \frac{(x_1 - x_2)\sqrt{2\frac{h}{k}}}{(x_1 - x_2)\sqrt{2\frac{h}{k'}}} .$$

E per bene accertarmi di non commettere un errore troppo grande, ho voluto far qualche esperienza onde avere con un po' di precisione il valore di $\sqrt{2\frac{h}{k}}$. A tale uopo ho determinato

con esattezza il valore di A poichè, come è noto, esso ci rappresenta la differenza di temperatura fra la sorgente calorifica e l'ambiente in cui si trova l'asta. Indi ho determinata la differenza di temperatura $t_1 - t_0$ fra il primo foro e l'ambiente, adattando al galvanometro una derivazione, onde la macchia non escisse dalla scala. Allora per la formola (1) si ha

$$\sqrt{2\frac{h}{k}} = \frac{\log. A - \log. (t_1 - t_0)}{M \times x_1}$$

dove M rappresenta il modulo dei logaritmi tavolari.

Come media di varie determinazioni, ho ottenuto per $\sqrt{\frac{h}{h}}$ il valore di $\frac{1}{56\sqrt{2}}$ e quindi essendo $x_1 - x_2 = 7^{cm}$, noi trascureremo quantità inferiore al quadrato di $\frac{1}{2}\left(\frac{7}{56\sqrt{2}}\right)$ e questo tanto nel numeratore quanto nel denominatore.

Accontentandoci dunque di tale approssimazione e innalzando a quadrato ambi i membri si ottiene

$$\frac{k'}{k} = \left(\frac{t_1 - t_2}{t_1' - t_2'}\right)^2.$$

E l'espressione

$$\frac{k' - k}{k} = \frac{(t_1 - t_2)^2 - (t_1' - t_2')^2}{(t'_1 - t_2')^2}$$

ci darà la variazione della conducibilità. Per avere poi la differenza $t_1 - t_2$ avevo graduato il galvanometro inserendovi una data derivazione. Quindi ogni volta, allorchè il vapore aveva circolato nel cubo per parecchie ore, dopo aver applicato la derivazione, chiudevo il circuito della pila termoelettrica, e leggevo sulla scala la posizione della macchia di luce, quand'essa mostrava di essere perfettamente ferma; la differenza fra questa lettura e quella fatta prima di chiudere il circuito mi dava $t_1 - t_2$. Indi toglievo la derivazione, e per mezzo della calamita compensante riconducevo la macchia in sulla scala.

Lo spostamento che si aveva poi per effetto della magnetizzazione dava la quantità che si doveva aggiungere a $t_1 - t_2$ per

avere $t'_1 - t'_2$. Siccome però in causa della mutata posizione della calamita compensante il galvanometro non avrebbe avuto più la sensibilità di prima, così dopo finite le esperienze ho applicata al galvanometro la solita derivazione, e ho tuffate le saldature della pila termoelettrica in due recipienti pieni d'olio, le cui temperature furono variate in maniera da avere sulla scala la stessa deviazione che prima era prodotta dalla differenza di temperatura nei due fori dell'asta di ferro. Tolta la derivazione, con che la macchia usciva dalla scala, l'ho ricondotta sulla scala per mezzo della calamita compensante, e ho determinato la sensibilità del galvanometro in tali condizioni.

Come media di tre determinazioni, ho trovato che alla differenza d'un grado di temperatura fra le punte della pila termoelettrica, corrispondeva la deviazione di 742 divisioni sulla scala. La seguente tabella contiene i risultati di 20 esperienze. In essa Δ indica la deviazione della macchia espressa in divisioni della scala; invece le differenze $t_1 - t_2$ e $t'_1 - t'_2$ le ho espresse addirittura in gradi (vedi la tabella IV nella pagina seguente).

Abbiamo adunque in tal modo una diminuzione nella conducibilità termica del ferro, che è 0,0021 della sua conducibilità normale.

È da notare però che io non ho potuto magnetizzare l'asta sino alla saturazione, giacchè dovevo aver riguardo al riscaldamento prodotto nel rocchetto. Però mi sono curato di determinare l'intensità del campo magnetico in cui si trovava la sbarra di ferro, mentre nel rocchetto passava una corrente di 2 Bunsen. Per far questo ho sospeso un'asticella magnetizzata alla parete superiore del rocchetto esterno per mezzo di un robusto filo di cotone per modo che l'asta si trovasse nell'asse del rocchetto; poi ho sospeso al di sotto dello stesso ago una lunga sbarra di ottone in guisa da formare un sistema rigido, onde aumentare il momento d'inerzia dell'asta calamitata.

Allora se si indica con M il momento magnetico di tale asta e con T l'intensità del campo, il momento di rotazione che su di essa esercita il rocchetto è $D = MT$. Ma nell'istesso tempo la calamita risente anche l'azione terrestre, la quale esercita su di essa un momento di rotazione $\delta = MT_1$, se con T_1 rappresentiamo l'intensità orizzontale del magnetismo terrestre.

Perciò situando il rocchetto con l'asta nella direzione del meridiano magnetico in guisa da risultare il polo nord del rocchetto rivolto al nord della terra, il momento di rotazione del-

l'asta dovuto alla terra si aggiunge a quello dovuto al rocchetto; e quindi se si fa oscillare l'asta in tali condizioni, la durata di un'oscillazione è

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{K}{D+\delta}}$$

dove K è il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione.

TABELLA IV.

Numero delle esperienze	$t_1 - t_2$ in gradi	Δ	$t_1' - t_2'$ in gradi	$\frac{k'}{k}$	$\frac{k'-k}{k}$
1	18°,7220	16	18°,7436	0,99769	0,00231
2	18, 7095	14	18, 7284	0,99798	0,00202
3	18, 8000	18	18, 8243	0,99742	0,00258
4	18, 9360	12	18, 9522	0,99829	0,00171
5	18, 7260	15	18, 7472	0,99774	0,00226
6	18, 5025	12	18, 5187	0,99825	0,00175
7	18, 8000	13	18, 8175	0,99815	0,00185
8	18, 7545	16	18, 7761	0,99770	0,00230
9	18, 6835	15	18, 7047	0,99774	0,00226
10	18, 8960	10	18, 9095	0,99857	0,00143
11	18, 4080	14	18, 4269	0,99795	0,00205
12	18, 8045	18	18, 8288	0,99742	0,00258
13	18, 9465	12	18, 9627	0,99829	0,00171
14	18, 8305	16	18, 8521	0,99771	0,00229
15	18, 5920	15	18, 6132	0,99773	0,00227
16	18, 8160	10	18, 8295	0,99857	0,00143
17	18, 4460	18	18, 4703	0,99737	0,00263
18	18, 7930	18	18, 8173	0,99742	0,00258
19	18, 6985	14	18, 7174	0,99798	0,00202
20	18, 5310	17	18, 5539	0,99753	0,00247
Medie	—	—	—	0,997875	0,002125

Se si ripete l'esperienza senza il rocchetto, la durata d'una oscillazione è

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{K}{\delta}}.$$

Dalle due equazioni si ha, sostituendo a D e δ i loro valori,

$$\frac{t_2^2}{t_1^2} = \frac{T + T_1}{T_1},$$

da cui

$$\frac{T}{T_1} = \frac{t_2' - t_1^2}{t_1^2}.$$

In tal modo ho determinato l'intensità del campo magnetico, ed ho ottenuto

$$T = 7149,05\ T_1$$

essendo T_1 l'intensità orizzontale del magnetismo terrestre a Torino; e perciò in unità assolute ($C\ G\ S$)

$$T = 1501.$$

IV.

Per assicurarmi ancor meglio dell'esistenza del fenomeno, e per conoscere qual grado di esattezza fosse da attribuirsi ai risultati ottenuti, ho ripetuto le prove, magnetizzando l'asta per mezzo di una potente elettrocalamita a ferro di cavallo. Ho dovuto quindi modificare l'apparecchio in questo modo. In una scanalatura praticata in un grosso dado di noce ben stagionato si faceva entrare forzatamente l'asta di ferro dolce. La scanalatura, tranne alle due estremità, era tutto all'ingiro scavata per modo, che l'aria potesse liberamente circolare intorno all'asta di ferro; ed aveva tale lunghezza, che mentre l'asta da una parte ne toccava il fondo, dall'altra parte ov'era la vite sporgeva di circa 2^{cm}; e ciò perchè l'asta di ferro attraversando la cassetta, ov'era posto il dado, potesse essere avvitata al cubo, ove si faceva arrivare il vapore dell'acqua bollente. Dentro allo stesso cubo era posto un altro dado di noce, con una breve scanalatura, nella quale entrava esattamente sino al fondo la madrevite che era pure di ferro dolce.

Nell'uno e nell'altro dado, alla distanza di 2^{cm} dalle estremità dell'asta erano praticati due incavi, in cui potevano penetrare a forza i due poli dell'elettrocalamita. Questa era costituita di due elettrocalamite rettilinee che venivano disposte verticalmente, e di cui i poli contrari, che si trovavano al di sopra, erano congiunti per mezzo di una grossa asta di ferro dolce, e i rocchetti erano posti in comunicazione per via di un grosso filo di rame. La corrente che attraversava i rocchetti era data da 4 Bunsen.

Ho constatato dapprima, che passando la corrente per 25 minuti primi, non se ne risentiva nell'asta di ferro dolce alcuna influenza calorifica, e quindi ho cominciato senz'altro le esperienze col riscaldamento. Nella tabella che segue sono esposti i risultati di dieci esperienze.

TABELLA V.

Numero delle esperienze	$t_1 - t_2$ in gradi	Δ	$t_1' - t_2'$ in gradi	$\frac{k'}{k}$	$\frac{k'-k}{k}$
1	18°,9645	12	18,9807	0,99829	0,00171
2	18°,8310	9	18,8431	0,99872	0,00128
3	18°,6640	15	18,6842	0,99784	0,00216
4	18°,9100	8	18,9208	0,99886	0,00114
5	19°,1205	7	19,1300	0,99901	0,00099
6	18°,6430	8	18,6538	0,99884	0,00116
7	19°,2000	10	19,2135	0,99859	0,00141
8	18°,5875	12	18,6037	0,99826	0,00174
9	18°,4630	11	18,4778	0,99844	0,00156
10	19°,3145	12	19,3307	0,99833	0,00167
Medie	—	—	—	0,998518	0,001482

L'intensità del campo magnetico fu determinata facendo oscillare la stessa asticella calamitata usata innanzi, sospesa entro la scanalatura del dado, prima durante il passaggio della corrente nei rocchetti dell'elettrocalamita, e poi quando la corrente

non passava; e confrontando le durate d'oscillazione nel modo sopra indicato. In questo caso però l'asta di ottone fu unita rigidamente all'asticella di ferro dal di sopra.

Si ebbe così per l'intensità del campo magnetico il valore $T = 6802,00\ T_1$, rappresentando sempre con T_1 l'intensità orizzontale del magnetismo terrestre a Torino; e perciò in unità assolute (*C. G. S.*)

$$T = 1428.$$

Come vedesi, quantunque l'intensità differisca di poco da quella che si aveva nel caso precedente, tuttavia la media dei risultati ottenuti in questa seconda serie di esperienze differisce piuttosto notevolmente dalla media dovuta alla prima serie. Ma tale differenza piuttosto che attribuirla alla diversità nel grado di magnetizzazione, sembrami doversi attribuire alle differenti condizioni, in cui trovasi l'asta nel secondo caso.

V.

Infine ho creduto anche utile di studiare quale variazione producesse la magnetizzazione trasversale sulla conducibilità termica del ferro. A tale scopo ho introdotto l'asta, che aveva servito alle esperienze antecedenti, nella scanalatura che era praticata, nel più grande dei due dadi di noce adoperati precedentemente, per modo che essa vi sporgeva di 2^{cm} dalla parte della vite, per poter attraversare la cassetta in cui era chiusa ed essere avvitata al cubo riscaldante. Alla distanza di 2^{cm} dall'asta da una parte e dall'altra, scorrevano due altre scanalature parallele alla prima, e della stessa lunghezza, nelle quali penetravano a forza due lamine di ferro dolce dello spessore di 1^{cm}.

In due incavi situati a metà di ognuna di queste due scanalature, e dalle parti opposte rispetto all'asta in istudio, entravano i poli dell'elettrocalamita adoperata nelle ultime esperienze, in modo che essi erano fissati a contatto delle lamine di ferro. Come corrente magnetizzante usai quella data da 4 Bunsen.

Ho fatto delle esperienze preliminari a freddo, per vedere se il calore radiato dai rocchetti avesse effetto sull'asta di ferro; ma lasciando passare la corrente magnetizzante per 25 minuti primi, non si scorgeva nel galvanometro alcun segno di deviazione.

Allora ho proceduto alle prove col riscaldamento e quantunque gli effetti fossero molto meno sensibili che nel caso precedente, tuttavia ho creduto che 20 esperienze potessero dare un'idea abbastanza esatta dell'intensità del fenomeno. I risultati sono raccolti nel seguente quadro:

TABELLA VI.

Numero delle esperienze	$t_1 - t_2$ in gradi	Δ	$t_1' - t_2'$ in gradi	$\frac{k'}{k}$	$\frac{k' - k}{k}$
1	18°,9460	2	18°,9487	0,99972	0,00028
2	19, 3230	5	19, 3297	0,99931	0,00069
3	19, 6200	2	19, 6227	0,99973	0,00027
4	19, 7450	3	19, 7490	0,99960	0,00040
5	18, 7465	1	18, 7479	0,99985	0,00015
6	19, 2060	2	19, 2087	0,99972	0,00028
7	18, 8455	1	18, 8469	0,99985	0,00015
8	18, 6785	4	18, 6839	0,99942	0,00058
9	19, 4200	3	19, 4240	0,99959	0,00041
10	19, 3465	2	19, 3492	0,99972	0,00028
11	19, 0045	2	19, 0072	0,99971	0,00029
12	18, 9625	2	18, 9652	0,99971	0,00029
13	19, 3540	4	19, 3594	0,69944	0,00056
14	19, 7425	5	19, 7492	0,99932	0,00068
15	19, 5200	2	19, 5227	0,99974	0,00026
16	18, 7425	2	18, 7452	0,99971	0,00029
17	18, 8210	3	18, 8250	0,99957	0,00043
18	18, 7615	3	18, 7655	0,99957	0,00043
19	19, 2410	4	19, 2464	0,99944	0,00056
20	19, 0025	3	19, 0065	0,99958	0,00042
Medie	—	—	—	0,99961	0,000385

La tabella ci mostra che i risultati delle singole esperienze sono fra loro molto discosti, il che deve attribuirsi evidentemente all'influenza degli errori d'osservazione sopra effetti tanto piccoli. L'intensità del campo magnetico era

$$T = 1392$$

in unità assolute del sistema (*C. G. S.*).

CONCLUSIONI.

Da queste esperienze risulta:

1° Rimane verificato che la magnetizzazione altera la conducibilità termica del ferro, e precisamente la magnetizzazione longitudinale produce un aumento nella conducibilità e la magnetizzazione trasversale un decremento.

2° Questa alterazione è però grandemente più piccola di quella che enunciò il Maggi, e di quella che in seguito fu trovata dal Tomlinson.

3° Si può ritenere che in un'asta uguale alla mia situata in un campo magnetico d'intensità compresa fra 1430 e 1500 unità del sistema (*C. G. S.*) se la magnetizzazione è longitudinale, la variazione della conducibilità termica sia all'incirca 0,002 della conducibilità normale. Se invece la magnetizzazione è trasversale, essendo l'intensità del campo di circa 1400 unità del sistema (*C. G. S.*) la variazione può ritenersi 0,0004 circa della conducibilità normale.

E qui mi si permetta di aggiungere poche righe per giustificare i valori che io ho ottenuti affatto discordanti dagli altri sperimentatori sulla grandezza di questo fenomeno. Non parlerò del risultato ottenuto dal Maggi, perchè non mi sembra, dopo tante esperienze che l'hanno contraddetto, di poter ammettere che esso fosse dovuto a una vera alterazione della conducibilità, anzichè a una pura combinazione.

Non parlerò neppure dei lavori dei professori Naccari e Bellati e dei signori Trowbridge e Penrose, poichè non contraddicono in modo assoluto i miei, vedendosi senz'altro dall'esposizione che ho fatta delle loro ricerche al principio della Memoria, che essi non erano in condizioni di tanta sensibilità da poter notare un effetto così tenue.

Quanto al risultato del Tomlinson però debbo far notare primieramente che io ho ripetute le sue esperienze nelle stesse condizioni espresse nella sua Memoria; e oltre all'aver trovato in alcuni di questi generi di esperienze, il fenomeno talmente coperto dagli errori di osservazioni da non poterlo distinguere, ho pure notato che nel caso in cui egli usò il rocchetto per magnetizzare l'asta di ferro in istudio, i risultati da lui otte-

nuti facilmente erano dovuti al calore radiato dal medesimo rocchetto. Se poi si considera il metodo da lui seguito per dedurre dalle osservazioni la variazione della conducibilità lo si trova inesatto; giacchè egli adopera pei calcoli sul ferro dolce le esperienze fatte col 2° metodo, mentre il passaggio del calore è ancora allo stato variabile; ed ammette che le variazioni del flusso di calore nell'asta di ferro, siano proporzionali alle variazioni di temperatura segnate dalla punta della coppia termoelettrica addossata all'asta di rame CD; il che non è rigoroso.

Questo studio venne eseguito nel Laboratorio di Fisica dell'Università di Torino, diretto dal prof. Naccari; e non posso trattenermi dall'esprimerne al mio Maestro la più viva riconoscenza.

Torino, 20 giugno 1886.

SUL

FENOMENO PELTIER

NEI LIQUIDI

NOTA TERZA

del Socio Prof. A. Naccari *e del Dott.* A. Battelli

In questa Nota diamo conto di alcune esperienze che tengono dietro a quelle relative allo stesso argomento, che furono inserite l'anno scorso negli *Atti* di questa Accademia. Nella prima parte stanno i valori trovati ponendo a contatto solfati e cloruri di uno stesso metallo. L'anno scorso in due serie di esperienze avevamo invece posto a contatto solfati di metalli diversi fra loro a due a due e cloruri pur di metalli diversi.

La seconda parte contiene le esperienze eseguite ponendo sempre a contatto una soluzione di una data sostanza con altra soluzione molto diluita della sostanza stessa. Sperimentando l'anno scorso in questo modo sopra solfati e sopra cloruri avevamo notato che le soluzioni concentrate in generale si trovavano a potenziale più alto delle diluite, ma l'acido solforico e l'acido cloridrico facevano eccezione. Abbiamo voluto esaminare in alcune altre serie se l'acido si comportasse sempre in modo diverso dai sali corrispondenti.

La terza parte infine si riferisce alla verificazione dell'esperienza dell'Hoorweg, della quale ci occupammo già nella prima Nota. Rispetto al modo d'operare, alle lettere usate, alle tabelle, vale tutto ciò che s'è detto nelle Note sopra citate.

I.

Ogniqualvolta fu possibile, le densità furono scelte per modo che vi fosse egual numero di molecole elettro-chimiche in volumi eguali delle varie soluzioni usate in queste esperienze.

Come termine di confronto si prese la soluzione di acido cloridrico cui si diede la densità di 1, 1. Quando la poca solubilità di alcune sostanze non permetteva di raggiungere quella condizione, si cercava di avvicinarvisi quant' era possibile. Nelle esperienze segnate con asterisco la corrente andava dal cloruro al solfato. L'effetto Peltier fu considerato come positivo in tutti i casi, in cui il cloruro risultava a potenziale più alto del solfato.

$Cu\,SO_4 - Cu\,Cl_2$.

34	76, 7	34
* 46	73, 6	
45	74, 4	13
* 46	73, 6	
44	75, 0	29
* 47	73, 9	
	Medio . . .	25

$Na_2\,So_4 - Na\,Cl$.

* 44	87, 2	117
25	89, 4	
* 36	88, 8	17
33	89, 3	
* 29	88, 4	3
28	87, 6	
* 38	88, 6	69
26	90, 9	
	Medio . . .	69

$H_2SO_4 - HCl$.

* 21	107, 1	
		73
5	104, 9	
* 21	101, 5	
		151
— 10	100, 9	
2	103, 8	
		20
* 6	101, 3	
* 7	103, 8	
		19
3	101, 1	
* 11	103, 7	
		49
1	102, 8	
19	99, 6	
		75
* 34	99, 4	
	Medio . . .	65

$K_2SO_4 - KCl$.

14	89, 1	
		102
* 34	91, 9	
* 21	87, 1	
		40
14	87, 9	
* 29	90, 1	
		61
18	89, 5	
27	93, 0	
		32
* 34	94, 6	
	Medio	59

$Mg\,SO_4 - Mg\,Cl_2$.

* 33	97, 7	
		— 19
38	99, 4	
36	97, 8	
		— 9
* 35	99, 0	
* 21	98, 8	
		— 84
38	99, 6	
* 19	98, 8	
		— 44
32	97, 8	
	Medio . . .	— 44

Da queste esperienze risulta che i valori dell'effetto Peltier sono in esse dello stesso ordine di grandezza di quelli riscontrati nelle serie consimili già eseguite. Il grado di precisione è molto piccolo, come nelle esperienze precedenti, perchè il metodo è lo stesso. I tentativi fatti per migliorarlo non hanno avuto buon esito. Nelle varie coppie studiate il cloruro risulta sempre positivo, eccettuata soltanto l'ultima.

II.

Nelle tabelle che seguono venne applicato un asterisco a quella esperienza di ciascuna coppia, nella quale la corrente andava dalla soluzione concentrata alla diluita. L'effetto Peltier fu considerato come positivo quando la soluzione concentrata risultava a potenziale più alto. Per ciascuna sostanza è indicata la densità della soluzione più concentrata; l'altra soluzione era diluitissima.

NITRATI.

Nitrato di Rame

densità 1,10.

* 106	74, 2	40
100	75, 3	
100	73, 7	175
* 125	72, 7	
* 108	76, 8	75
97	76, 5	
146	95, 2	225
* 188	94, 2	
	Medio . . .	129

Nitrato di Potassio

densità 1,08.

24	89, 4	69
* 35	88, 2	
40	84, 1	6
* 39	84, 3	
* 40	83, 4	18
37	84, 3	
38	83, 1	23
* 42	82, 6	
	Medio . . .	29

NITRATO DI SODIO
densità 1,08.

70	87, 0	102
* 88	88, 1	
71	72, 1	35
* 76	71, 7	
55	72, 3	39
* 58	69, 9	
* 49	69, 1	90
39	71, 2	
* 44	67, 8	46
40	69, 8	
* 42	68, 6	54
35	70, 0	
	Medio . . .	61

NITRATO DI CALCIO
densità 1,08.

76	50, 5	58
* 78	53, 2	
24	69, 0	80
* 35	68, 8	
28	72, 6	36
* 31	70, 0	
* 61	85, 8	209
50	88, 8	
43	88, 1	100
* 58	86, 0	
	Medio . . .	96

Acido Nitrico
densità 1,10.

* 49	118, 5	— 88
70	119, 9	
* 21	119, 4	— 102
45	120, 0	
* 53	122, 6	— 170
95	122, 5	
78	120, 5	— 125
* 48	121, 0	
	Medio . . .	— 121

ACETATI.

Acetato di Potassio
densità 1,08.

18	64, 2	37
* 22	66, 6	
67	106, 2	47
* 77	106, 8	
65	106, 5	34
* 71	105, 5	
* 57	90, 6	63
47	91, 9	
* 61	89, 6	41
55	90, 6	
	Medio . . .	44

Acetato di Sodio
densità 1,08.

87	85, 7	19
* 95	88, 0	
94	85, 3	104
* 109	84, 2	
* 51	61, 4	78
40	60, 4	
* 47	61, 4	49
41	61, 6	
	Medio . . .	62

Acetato di Calcio
densità 1,07.

68	83, 0	66
* 81	84, 1	
74	84, 8	36
* 81	85, 3	
64	86, 3	81
* 78	85, 7	
56	86, 1	134
* 66	85, 7	
56	86, 5	47
* 63	85, 7	
	Medio . . .	73

ACIDO ACETICO
densità 1,02.

60	19, 5	— 180
* 53	19, 5	
* 60	18, 3	— 136
65	18, 3	
* 59	17, 9	— 54
61	18, 2	
53	16, 2	— 190
* 53	17, 2	
51	16, 7	— 120
* 47	16, 9	
* 159	29, 4	— 363
189	30, 2	
	Medio . . .	— 174

OSSALATI.

OSSALATO DI POTASSIO
densità 1,08

* 38	19, 7	152
35	17, 5	
51	75, 3	69
* 58	73, 1	
50	71, 5	42
* 56	71, 7	
* 57	69, 4	29
55	70, 7	
	Medio . . .	73

Ossalato di Sodio

densità 1,02.

118	70, 0	35
* 130	71, 7	
* 120	76, 9	58
111	76, 8	
100	72, 4	62
* 109	72, 1	
101	70, 9	21
* 104	70, 7	
	Medio . . .	44

Ossalato di Calcio

densità 1,02.

64	13, 7	74
* 66	13, 3	
* 91	18, 4	81
88	18, 4	
411	39, 6	330
* 437	39, 8	
	Medio . . .	121

ACIDO OSSALICO

densità 1,03.

* 107	113, 6	— 32
121	117, 1	
* 96	119, 3	— 35
102	117, 7	
110	112, 6	— 49
* 99	113, 2	
109	112, 7	— 56
* 99	114, 2	
	Medio . . .	— 43

JODURI.

JODURO DI POTASSIO

densità 1,08.

159	98, 4	51
169	98, 1	
198	103, 9	15
195	103, 2	
193	102, 4	44
202	102, 9	
202	103, 4	49
192	102, 9	
	Medio . . .	40

JODURO DI SODIO

densità 1,05.

143	89, 1	14
152	91, 1	
118	90, 6	— 22
122	90, 4	
126	90, 1	83
111	90, 5	
122	90, 6	36
129	89, 7	
161	90, 1	155
153	89, 3	
	Medio . . .	53

JODURO DI CALCIO

densità 1,03.

96	86, 2	41
* 105	87, 0	
104	86, 7	6
* 105	87, 1	
99	87, 6	76
110	86, 7	
103	86, 5	33
* 106	85, 4	
	Medio . . .	39

ACIDO JODIDRICO
densità 1,03.

* 69	118, 2	
		— 50
79	116, 8	
* 76	115, 6	
		— 4
78	116, 4	
* 72	115, 8	
		— 13
75	116, 3	
	Medio . . .	— 19

BROMURI.

BROMURO DI POTASSIO
densità 1,08.

* 60	65, 5	
		— 2
59	64, 8	
* 78	65, 9	
		68
72	64, 6	
* 78	64, 8	
		8
77	64, 6	
* 82	64, 5	
		54
75	64, 9	
	Medio . . .	32

Bromuro di Sodio

densità 1,08.

76	78, 1	113
* 92	77, 4	
82	77, 4	69
* 91	76, 7	
86	77, 2	65
* 96	76, 7	
90	76, 7	39
* 96	76, 7	
	Medio . . .	71

Bromuro di Calcio

densità 1,05.

* 98	83, 0	43
84	80, 3	
* 87	82, 8	104
82	80, 6	
* 84	81, 2	43
77	81, 6	
* 86	81, 4	55
77	81, 4	
	Medio . . .	61

ACIDO BROMIDRICO

densità 1,03.

* 48	94, 5	— 15
49	92, 7	
* 40	95, 2	— 43
46	93, 0	
* 41	94, 7	— 24
44	92, 9	
	Medio . . .	— 21

Diamo pure i valori ottenuti sperimentando sull'acido iodico e bromico, quantunque non abbiamo studiato le serie consimili alle precedenti e spettanti a questi acidi. È notevole in ogni modo che per essi le esperienze risultano conformi a quelle fatte sopra altri acidi.

ACIDO JODICO

densità 1,06.

* 92	94, 6	— 44
111	99, 6	
* 70	93, 4	— 21
77	95, 4	
* 66	89, 4	— 54
81	92, 6	
* 74	89, 5	— 9
79	91, 5	
	Medio . . .	— 32

ACIDO BROMICO

densità 1,03.

* 61	93, 2	
		— 2
66	96, 7	
* 60	93, 9	
		— 43
70	91, 3	
* 64	93, 9	
		— 10
69	96, 1	
	Medio . . .	— 14

Da queste esperienze congiunte con quelle già pubblicate deducesi che se si pongono a contatto due soluzioni dello stesso sale, diversamente concentrate, la più concentrata assume, rispetto alla termoelettricità, il potenziale più alto; il contrario avviene invece per gli acidi diluiti. La sostituzione dell'idrogeno ad un metallo in un composto farebbe cambiar di segno lo stato elettrico della soluzione di quel composto rispetto all'acqua. Le esperienze comprendono 9 solfati, 2 cloruri, 5 nitrati, 4 acetati, 4 ossalati, 4 ioduri e 4 bromuri.

III.

A compimento di quanto abbiamo riferito nella prima Nota sopra la verificazione di una esperienza dell'Hoorweg fatta con una coppia termoelettrica $CuSO_4 - H_2SO_4$, abbiamo cercato di metterci in condizioni migliori usando un galvanometro di maggiore sensibilità. Uno dei contatti della coppia venne mantenuto alla temperatura della stanza, che era circa 15°. L'altro contatto venne portato a 35° e bastò ciò per produrre una deviazione di 10 parti nel galvanometro in senso tale da mostrare che la corrente andava nel contatto più caldo dal $CuSO_4$ all'H_2SO_4. Per togliere ogni dubbio si mantenne in un'altra esperienza uno dei contatti alla temperatura della stanza, l'altro

si portò a 0°. La deviazione avvenne in senso tale da confermare ciò che è detto sopra intorno all'andamento della corrente. L'esperienza dell'Hoorweg è dunque pienamente verificata, ma poco prudente è fondare sopra di essa dei ragionamenti teorici eguali a quelli che valgono per i fenomeni termoelettrici nei corpi solidi. È probabile che in causa del variare della temperatura nei contatti e delle alterazioni che ne conseguono intervengano nel fenomeno delle forze elettromotrici non termoelettriche, alla cui influenza prevalente può esser dovuta la corrente che viene osservata.

Dal Laboratorio di Fisica della R. Università.
Torino, 17 giugno 1886.

AZIONE
DEGLI
ACIDI BIBASICI ORGANICI
E DELLE LORO ANIDRIDI
SUI SENFÖLE [1] E SULLA TIOSINNAMINA

del Dott. F. Moine

I.

Azione degli acidi organici bibasici sui senföle.

A. W. Hofmann, nelle sue ricerche sugli eteri isosolfocianici, ha studiata l'azione dell' acido solforico diluito e concentrato sull'etilsenföl, e quella dell'acido acetico sul fenilsenföl. Nelle sue esperienze sull'etilsenföl con acido solforico diluito e concentrato ebbe nei due casi formazione di etilamina e sviluppo di ossisolfuro di carbonio (2).

Dall'azione dell'acido acetico sul fenilsenföl ottenne la diacetanilide, acido solfidrico e anidride carbonica secondo l'equazione seguente :

$$CSNC_6H_5 + 2\,C_2H_4\,O_2 = (C_2H_3O)^2N.C_6H_5 + CO_2 + H_2S.$$

Secondo Claus e Völtskon (1882) si forma pure in questa reazione dell'acetanilide.

(1) Per brevità ho conservato il nome tedesco *senföle*. Sinonimi di senföle sono: *eteri tiocarbamidici, essenze di senape, eteri isosolfocianici, solfocarbimidi.* Alcuni preferiscono tradurre in italiano la parola *senföle* con *senapoli.*

(2) Bull. Soc. Chimique, 1869, vol. XII, pag. 364.

Era interessante di vedere in qual modo si comportano gli acidi organici bibasici.

Dalle esperienze che verrò esponendo risulta che l'azione da essi manifestata sui senföl ha luogo secondo l'equazione seguente:

$$C^n H^m \begin{matrix} COOH \\ COOH \end{matrix} + CS.NR' = C^n H^m \begin{matrix} CO \\ CO \end{matrix} > NR' + COS + H_2O \ ,$$

formasi cioè un'*imide sostituita*; in alcuni casi insieme con altri prodotti.

Molto probabilmente la reazione succede in due fasi che si possono rappresentare nel seguente modo:

$$1^a - \quad C^n H^m \begin{matrix} COOH \\ COOH \end{matrix} + CSNR' = C^n H^m \begin{matrix} CONH.R' \\ COOH \end{matrix} + COS$$

acido ammico sostituito

in cui formasi l'acido ammico sostituito.

$$2^a - \quad C^n H^m \begin{matrix} CONH.R' \\ COOH \end{matrix} = C^n H^m \begin{matrix} CO \\ CO \end{matrix} > NR' + H_2O$$

imide sostituita

in cui l'acido ammico si scompone in acqua ed imide sostituita.

Le mie esperienze furono fatte cogli acidi ftalico, succinico, malonico e canforico sull'allilsenföl e sul fenilsenföl.

Azione dell'acido ftalico sull'allilsenföl. — Misi a reagire una miscela di acido ftalico e di allilsenföl, in proporzioni molecolari, a bagno d'olio in piccolo palloncino con tubo di sviluppo per gaz; acido ftalico grammi 15,50, allilsenföl grammi 9,25.

Verso 145° il miscuglio comincia a reagire e così continua man mano che l'acido si fonde svolgendo bolle di *COS*.

A completo sviluppo di gaz (circa 900^{cc}) che segna il fine della reazione, sospendo l'azione del calore, e sottopongo la massa, rappresasi col raffreddamento, alla distillazione col vapor d'acqua. Depositasi dal liquido distillato (le ultime porzioni col raffreddamento) una sostanza bianca cristallina fusibile a 71-72°. Il prodotto ottenuto pesa grammi 8,30. Questa sostanza ridistillata

col vapor d'acqua, seccata all'aria e in istufa (a 50°) diede all'analisi i seguenti risultati:

I. Gr. 0,2136 di sostanza fornirono gr. 0,5576 di CO_2 e 0,096 di H_2O.

II. Gr. 0,2838 di sostanza diedero $18^{cc},8$ di N a $21°,4$ e $738^{mm},6$.

Da cui si ha:

	I.	II.
$C =$	71,19	—
$H =$	4,97	—
$N =$	——	7,37 .

Questi numeri conducono alla formola dell'*allilftalimide*

$$C_6H_4 \begin{matrix} C \\ CO \end{matrix} \Big\rangle \begin{matrix} =NC_3H_5 \\ O \end{matrix}$$

per la quale si calcola:

$$C = 70,50$$
$$H = 4,81$$
$$N = 7,48 .$$

L'allilftalimide ottenuta è ben cristallizzata in lamine splendenti fusibili a 71-72°, identica a quella ottenuta da Wallach e Kamenski dall'azione diretta dell'acido ftalico sull'allilamina (1). Sciolta nel solfuro di carbonio, assorbe già a freddo il bromo, trasformandosi in una sostanza cristallizzata, che purificata per cristallizzazione dell'alcool fonde a 108-109°. Un dosamento di bromo diede il seguente risultato:

Gr. 0,3298 di sostanza diedero gr. 0,3598 di bromuro di argento.

Da cui:

$$Br. \text{ p. } 100 = 46,42$$

corrispondente alla quantità p. c. di $Br.$ contenuta nel *Bromuro di allilftalimide*

$$C_6H_4 \begin{matrix} C \\ CO \end{matrix} \Big\rangle \begin{matrix} =N.C_3H_5.Br^2 \\ O \end{matrix}$$

per il quale si calcola:

$$Br. \text{ p. } 100 = 46,11 .$$

(1) Wallach e Kamenski, *Ber. d. deut. chem. Gesell.*, 1882, vol. 14, p. 171.

Azione dell'anidride ftalica sull' allilsenföl. — Nelle stesse condizioni sopraindicate, anidride ftalica e allilsenföl non reagiscono.

Azione dell'acido succinico sull'allilsenföl. — Misi a reagire una miscela di acido succinico e allilsenföl pure in proporzioni molecolari in piccolo palloncino con apparecchio a ricadere; acido succinico gr. 10,72, allilsenföl gr. 9,00.

La miscela reagisce già poco al disopra di 100° e prosegue bene fino a completa fusione dell'acido, sviluppando circa 1500^{cc} di gas. La massa che rimane finita la reazione, anche dopo 24 ore, si mantiene sotto forma di un liquido denso, oleoso, di odore un po' analogo a quello della essenza di senapa.

Getto quella massa su filtro e lavo con etere per esportare la parte oleosa e separare l'acido succinico rimasto inalterato, e siccome la parte oleosa rimasta dopo evaporazione dell'etere ha tuttavia reazione acida per traccie di acido succinico, tratto con latte di carbonato baritico fino a saturazione dell'acido libero. Aggiungo quindi un egual volume di alcool assoluto per la precipitazione completa del succinato neutro di bario del carbonato eccedente, e filtro lavando sul filtro coll'alcool. Raccolto il filtrato in capsula e scacciati a B. M. l'alcool e l'acqua, rimane un liquido denso, che distillo raccogliendo ciò che passa a 244-245°, temperatura a cui il liquido bolle costantemente. Ottengo un prodotto quasi incoloro del peso di circa 5 grammi. Con maggior quantità di sostanze, cioè con gr. 30 di allilsenföl e gr. 35,75 di acido succinico ottengo circa gr. 22 di prodotto bollente pure costantemente a 244-245°.

Questo liquido perfettamente disseccato lasciandolo molti giorni sull'acido solforico, diede all'analisi i seguenti risultati:

I. Gr. 0,3705 di sostanza fornirono gr. 0,8232 di CO_2 e gr. 0,226 di H_2O.

II. Gr. 0,4419 di sostanza diedero 39^{cc} di N a 15,5° e 741^{mm},65.

Da cui:	I.	II.
$C =$	60,59	—
$H =$	6,74	—
$N =$	—	10,08.

Questi numeri conducono alla formola dell'*allilsuccinnimide* $C_2H_4 \begin{matrix} CO \\ CO \end{matrix} > N . C_3H_5$ per la quale si calcola:

$$C = 60,43$$
$$H = 6,47$$
$$N = 10,07 .$$

L'*allilsuccinnimide* ottenuta si presenta sotto l'aspetto di un liquido incoloro o appena giallastro, mobile, oleoso, di odore speciale non sgradevole, bollente a 244-245° sotto 730^{mm}. Il suo peso specifico è relativamente all'acqua a + 4°:

a	0°	1,1543
»	12°	1,1432
»	50°	1,1112
»	100°	1,0677 .

L'*allilsuccinnimide* è poco solubile in acqua, solubile in alcool ed etere. Ha reazione neutra, però quando si distilla subisce una lieve scomposizione verso il fine della distillazione, sviluppando un po' di NH_3. Si può purificare agitandola con acqua acidulata con acido solforico neutralizzando con carbonato baritico ed estraendo con etere. Assorbe il bromo trasformandosi in una sostanza semisolida attaccaticcia di odore particolare; questa sostanza non fu studiata.

Azione dell'acido succinico sul fenilsenföl. — Feci una miscela di acido succinico e fenilsenföl in proporzioni molecolari: acido succinico gr. 4,50, fenilsenföl gr. 5,15; e misi a reagire nel solito apparecchio.

Verso 140° comincia lo sviluppo di gas che procede regolarmente fino a completa reazione. Cessata l'azione del calore, la massa prima liquida cristallizza rapidamente in aghi raggiati. Tratto con acqua bollente, lascio raffreddare e filtro per esportare l'acido succinico che non ha reagito, essendo questo assai bene solubile in acqua, mentre la sostanza ottenuta, solubile un poco a caldo, si depone quasi tutta col raffreddamento.

Ripiglio la parte rimasta sul filtro con molta acqua bollente, in cui, salvo una piccola porzione, si scioglie completamente e filtro a caldo la soluzione acquosa, lavando ripetutamente con

acqua bollente. Sciolgo poi con poco alcool bollente la piccola porzione rimasta sul filtro. Dalla soluzione acquosa col raffreddamento depositasi una sostanza cristallizzata in aghi fusibili a 253-255°, che l'aspetto, le proprietà, il punto di fusione dimostrano essere la *fenilsuccinnimide* $C_2H_4 \begin{matrix} CO \\ CO \end{matrix} > NC_6H_5$. Dalla soluzione alcoolica deponesi una tenue quantità di sostanza bianca cristallina fusibile a 226-227°, il cui punto di fusione e la proprietà di essere insolubile in acqua bollente e solubile in alcool dimostrano essere *succinanilide* $C_2H_4 \begin{matrix} CONH.C_6H_5 \\ CONH.C_6H_5 \end{matrix}$.

Questo prodotto secondario formasi pure in piccola quantità insieme alla fenilsuccinnimide nell'azione dell'acido succinico sull'anilina.

Azione dell'acido malonico sul fenilsenföl. — Nello stesso modo ho fatto reagire acido malonico gr. 5, fenilsenföl gr. 6,50.

Non reagiscono che dopo completa fusione dell'acido sviluppando circa 900^{cc} di gas. Ricavo, finita la reazione, una sostanza liquida densa con forte odore di acido acetico prodottosi senza dubbio per scomposizione dell'acido malonico. Saturo con carbonato baritico l'acido libero ed estraggo con etere. L'etere evaporato lascia un residuo cristallino che sciolto in acqua bollente e filtrato fornisce col raffreddamento una sostanza bianca cristallizzata in lamine splendenti fusibili a 108-110°. Seccata in istufa e sottoposta all'analisi diede i seguenti risultati:

Grammi 0,2406 di sostanza fornirono gr. 0,6269 di CO_2 e gr. 0,1456 di H_2O.

Da cui:

$$C = 71{,}03 \ \%$$
$$H = 6{,}73 \ »$$

numeri corrispondenti a quelli dell'*acetanilide* $C_2H_3ONH.C_6H_5$ per la quale si calcola:

$$C = 71{,}11 \ \%$$
$$H = 6{,}67 \ » .$$

Rimane una piccola quantità di sostanza insolubile in acqua bollente, solubile in alcool, dal quale cristallizza in aghi fusibili

a 220-225°; questa sostanza è probabilmente identica colla *malondianilide* $CH_2 \begin{matrix} CONHC_6H_5 \\ CONHC_6H_5 \end{matrix}$ di Freund (1) la quale fonde a 223°.

Azione dell'acido canforico $C_8H_{14} \begin{matrix} COOH \\ COOH \end{matrix}$ *sull' allilsenföl.* — Operai nell'identico modo già descritto, con acido canforico gr. 10, allilsenföl gr. 5 e ottenni 700^{cc} di gas.

Sottoposta la massa densa, semisolida, alla distillazione col vapor d'acqua, ottenni una sostanza la quale dopo raffreddamento e sfregamento del liquido contro le pareti del vaso, cristallizza in lamelle poco colorate fusibili sotto 50°. Filtrata ed esaurita l'acqua madre con etere, questo dopo evaporazione in presenza di poca acqua ben raffreddata mi diede una nuova quantità dello stesso prodotto meno puro, fusibile sotto 50°.

Purificati questi prodotti dall'alcool diluito, ottenni cristalli bianchi fusibili a 48-49°, che seccati prima all'aria e quindi sull'acido solforico diedero alla analisi i seguenti risultati:

Grammi 0,2641 di sostanza fornirono gr. 0,6763 di CO_2 e gr. 2071 di H_2O.

Da cui:

$$C = 69,82$$
$$H = 8,70$$

numeri che conducono alla formola dell' *allilcanforimide* $C_8H_{14} < \begin{matrix} CO \\ CO \end{matrix} > NC_3H_5$, per la quale si calcola:

$$C = 70,58$$
$$H = 8,59 .$$

L'*allilcanforimide* fonde a 48-49°, è quasi insolubile in acqua, perfettamente solubile in alcool, solubilissima in etere, da cui per evaporazione si separa sotto forma di goccioline oleose che fregate in presenza di acqua fredda si solidificano.

---

(1) Ber., XVII, p. 136.

II.

Azione delle anidridi di alcuni acidi organici bibasici sulla tiosinnamina.

Azione dell' anidride ftalica sulla tiosinnamina — Feci una miscela di anidride ftalica, fusibile a 127°, preparata per distillazione e successiva sublimazione dell'acido ftalico, con tiosinnamina, in proporzioni molecolari, cioè tiosinnamina gr. 5, anidride ftalica gr. 6,38, e scaldai a bagno d'olio in piccolo palloncino. La miscela reagisce già verso 155°; a completo sviluppo di gaz sospendo, lascio raffreddare e tratto la massa solidificatasi col vapor acqueo.

Il liquido distillato lascia deporre una sostanza cristallizzata bianca fusibile a 71-72°. Il prodotto ottenuto pesa gr. 2,55; esso è affatto identico coll' *allilftalimide* ottenuta dall'azione dell'acido ftalico sopra l'allilsenföl. Concentro il liquido esaurito col vapor d'acqua, decoloro e filtro a caldo. Col raffreddamento depongonsi dei cristalli setacei, giallicci, che purificati dall'alcool, si hanno incolori, sublimabili, fusibili a 231-232°. Un dosamento di azoto diede il seguente risultato:

Gr. 0,3181 di sostanza fornirono $27^{cc},20$ di N, a 24°8 e $742^{mm},60$.

Da cui: $N = 9,482$ %

corrispondente alla quantità di azoto della ftalimide per la quale si calcola: $N = 9,65$.

La *ftalimide* ottenuta è identica a quella ricavata dallo ftalato ammonico.

Molto probabilmente succedono le due reazioni seguenti:

$$\text{I.}\ldots \left\{ \begin{array}{l} C_6H_4 \begin{matrix} CO \\ CO \end{matrix} > O + CS < \begin{matrix} NH.C_3H_5 \\ NH_2 \end{matrix} \\ = C_6H_4 \begin{matrix} C \\ CO \end{matrix} \Big\rangle O = N.C_3H_5 + CSO + NH_3 \end{array} \right.$$

allilftalimide

$$\text{II.}\ldots\ C_6H_4\begin{matrix}CO\\CO\end{matrix}>O+NH_3=C_6H_4\left\langle\begin{matrix}C\\CO\end{matrix}\right\rangle\begin{matrix}=NH+H_2O\\O\end{matrix}$$

ftalimide.

Azione dell'anidride canforica sulla tiosinnamina. — L'anidride canforica impiegata fu ottenuta per distillazione dell'acido canforico, e successiva purificazione, mediante soluzione in alcool a 95° a caldo, decolorazione e cristallizzazione. Gr. 60 di acido fornirono gr. 53 di anidride canforica in cristalli perfettamente bianchi fusibili a 220°.

Opero nel modo indicato per l'anidride ftalica con gr. 12,55 di anidride canforica e gr. 8 di tiosinnamina, mantenendo la temperatura a 170° ove reagiscono le due sostanze, fino a completo sviluppo di gaz (circa 400^{cc}). Tratto quindi la massa che rimane col vapor d'acqua che lascia deporre una sostanza dall'apparenza oleosa, la quale raffreddata e fregata con bastoncino di vetro cristallizza.

Questo prodotto purificato dall'alcool fonde a 48-49°, ed è perfettamente identico all'*allilcanforimide* ottenuta dall'azione dell'acido canforico sull'allilsenföl. Concentro il liquido esaurito col vapor d'acqua, e purifico i cristalli ottenuti per ricristallizzazioni dall'alcool. Ottengo così dei cristalli bianchi fusibili a 242-244° che all'analisi diedero i seguenti risultati:

I. Grammi 0,3225 di sostanza diedero gr. 0,7770 di CO_2 e gr. 0,249 di H_2O.

II. Gr. 0,2682 di sostanza fornirono 18^{cc},6 di N a 16°,5 e 736^{mm},80.

III. Gr. 0,2827 di sostanza fornirono 20^{cc},9 di N a 21° e 741^{mm},30.

IV. Gr. 0,2333 di sostanza diedero gr. 0,558 di CO_2 e gr. 0,1677 di H_2O.

Da cui:

	I.	II.	III.	IV.
$C=$	65,61	—	—	65,2
$H=$	8,57	—	—	7,97
$N=$		7,80	8,17	—

corrispondenti alla *canforimide* per la quale si calcola:

$$N = 66,3$$
$$H = 8,28$$
$$N = 7,73 .$$

Il prodotto ottenuto è identico a quello ricavato dal canforato d'ammonio.

Anche in questo caso è probabile che succedano le due reazioni:

$$1^a \ldots \left\{ \begin{array}{l} C_8 H_{14} \begin{matrix} CO \\ CO \end{matrix} > O + CS < \begin{matrix} NH . C_3 H_5 \\ NH_2 \end{matrix} \\ = C_8 H_{14} \begin{matrix} CO \\ CO \end{matrix} > N . C_3 H_5 + CSO + NH_3 \end{array} \right.$$

allilcanforimide

$$2^a \ldots C_8 H_{14} \begin{matrix} CO \\ CO \end{matrix} > O + NH_3 = C_8 H_{14} < \begin{matrix} CO \\ CO \end{matrix} > NH + H_2 O$$

canforimide.

La canforimide ottenuta in questa reazione ha tutte le proprietà della canforimide che il Prof. Guareschi ha ottenuto trattando l'urea, la solfurea, il solfocianato d'ammonio, ecc. con acido canforico e scaldando l'urea con anidride canforica.

Torino, R. Università. Aprile 1886.

Dal Laboratorio del Prof. Guareschi.

SULLA
NATROLITE DI MONTECATINI
(VAL DI CECINA)

dell' Ingegnere Ettore Mattirolo

Nel suo discorso *su la vita ed i lavori scientifici di Quintino Sella* letto nell'adunanza solenne della R. Accademia dei Lincei li 11 giugno 1885, il professore A. Cossa trattando delle ricerche del Sella sulla così detta *savite* (1), riassunse la storia di questo minerale colle seguenti parole:

« Un venerato nostro collega, il prof. Meneghini dell'Uni-
« versità di Pisa, scopriva nel 1852 nelle roccie serpentinose
« di monte Caporciano in Toscana un minerale che egli, basan-
« dosi sui risultati dell'analisi eseguita dal prof. Bechi, descrisse
« come una specie nuova assegnandogli il nome di *savite* (2).
« Questo minerale fu da principio ritenuto come dimetrico; ma
« Sella avendo avuto l'occasione di misurare dei cristalli di
« savite della Toscana fece conoscere che questa sostanza è tri-
« metrica ed affatto isomorfa colla natrolite. L'opinione del Sella
« fu generalmente accettata dai mineralisti (3), e confortata
« anche dal risultato di nuove determinazioni di alcune proprietà
« fisiche di questo minerale eseguite dal prof. D'Achiardi (4).

(1) *Nuovo Cimento*, vol. 7° (1858), pag. 225-228. – Lettera al cav. Sismonda letta all'Accademia delle Scienze di Torino il 2 marzo 1856.

(2) *Mineralogical Notices*. A lettre lo J. D. Dana (New Haven). — Silliman, *American Journ. of Science*. Serie 2ª, vol. 14°, pag. 64.

(3) Dana, *System of Mineralogy*, 5ª ediz. (1864), pag. 426.

(4) *Mineralogia della Toscana* (Pisa, 1873), vol. 2°, pag. 141.

« Se si confronta però la composizione della savite, tale « quale risulta dall'analisi del Bechi, con quella della natrolite, « vi si nota una differenza relativamente considerevole inquan- « tochè nel minerale della Toscana gran parte della soda sarebbe « sostituita dalla magnesia.

« Per spiegare questo divario di composizione, Sella riteneva « che la savite fosse una natrolite magnesiaca, oppure che la « magnesia derivasse da serpentina contaminante il campione del « minerale analizzato da Bechi. Il prof. D'Achiardi (1) non « ammette questa seconda ipotesi, che per me è la più probabile, « perchè una nuova analisi della savite eseguita dal dott. Fran- « cesco Stagi sopra cristalli puri, condusse a risultati che con- « fermarono l'analisi precedente. Senza voler punto infirmare « l'esattezza delle indagini analitiche finora eseguite, credo che « lo studio chimico della savite merita di essere nuovamente « intrapreso, giacchè finora la scienza non possiede alcun « fatto ben accertato che provi che un metallo bivalente come « il magnesio possa sostituire il sodio in composti isomorfi ».

Coll'intento di dissipare l'incertezza intorno alla composizione della savite, ho eseguito alcune indagini chimiche interessando pel materiale necessario la cortesia degli ingegneri A. Schneider direttore delle miniere di Montecatini, e B. Lotti del R. Corpo delle miniere, che mi facevano dono di alcuni esemplari di quel minerale.

La savite donatami si presentava in prismi sottili ed assai allungati impiantati irregolarmente nelle cavità d'una roccia decomposta, friabile, rossigna macchiata di verde, che al microscopio riconobbi per una diabase molto alterata (gabbro-rosso). Era accompagnata da cristallini di calcite e di analcime e possedeva tutti i caratteri fisici della natrolite, caratteri che credo inutile qui ricordare. Dei prismetti pochissimi raggiungevano in lunghezza quasi due centimetri, colla larghezza di un millimetro circa. I più grandi però, come generalmente avviene nei minerali cristallizzati, non erano così ben definiti come i minori; si mostravano molto solcati dalle striature nel senso della lunghezza e principalmente verso la estremità impiantata nella roccia, erano più o meno lattiginosi e tendenti talora leggermente al roseo per

(1) L. c.

inclusioni di particelle della roccia stessa. Solo i prismetti più piccoli si presentavano limpidi ed incolori ed è su questi che ho instituito le mie ricerche. Anche in tali cristallini tuttavia e per lo più alle estremità, che perciò non sempre si presentavano ben terminate, si notavano inclusioni della sostanza della roccia ed al microscopio si vedevano qua e là aderenti al cristallo e come inclusioni, piccolissimi granelli rossastri.

Scelsi dapprima colla lente di tali cristallini per un peso di circa un decigrammo; li lavai agitandoli con acqua onde esportare meccanicamente quel po' di pulviscolo della roccia che loro aderiva, ed eseguii su di essi un'analisi qualitativa. Rinvenni i componenti proprii e costanti della natrolite con quantità minime e non ponderabilmente valutabili di ferro, calce e magnesia dovute per certo ad un po' di sostanza inquinante il minerale. Anche allo spettroscopio non ebbi indizio della presenza di potassa.

Dopo ciò, usando della maggior diligenza eseguii una seconda cernita di materiale al microscopio, ed operando su gr. 0,076 di cristallini ben puri, ho ripetuto le ricerche qualitative nelle quali non incontrai più le traccie di ferro e magnesia ed appena accennata la presenza della calce; la quale è dovuta probabilmente a ciò che essendo il minerale accompagnato da calcare cristallizzato, che per essere pure incoloro è difficile separare perfettamente, una quantità minima di questo rimase aderente a qualche prismetto.

Infine, servendomi sempre del microscopio, ho scelto cristallini ben puri per un peso di gr. 0,2846 che impiegai per l'analisi quantitativa nella quale ottenni i risultati seguenti:

Silice	48, 07
Allumina.	27, 05
Calce	*traccie*
Soda	16, 56
Acqua.	9, 62
	101, 30

Pertanto ritengo esser attendibile l'opinione che fa dipendere il divario fra la composizione del minerale risultante dalla analisi del Bechi e quella propria della natrolite, da sostanze contaminanti il materiale analizzato dal Bechi.

Qualora però venisse dimostrato che realmente esiste un minerale la di cui composizione risponde all'analisi del Bechi, in tal caso le mie ricerche varranno a far constatare la presenza della natrolite propriamente detta fra i minerali di Montecatini. Questa natrolite risponde assai bene alla formola $Na^2 Al^2 Si^3 O^{10} + 2 H^2 O$, secondo la quale la composizione teorica del minerale sarebbe così espressa:

Silice	47, 36
Allumina.	26, 86
Soda	16, 32
Acqua.	9, 46
	100, 00 (1).

Torino — Laboratorio Chimico
della R. Scuola d'Applicazione per gl' Ingegneri
Giugno 1886.

(1) Per calcolare la composizione teorica del minerale mi sono valso dei valori dei pesi atomici proposti da Meyer e Seubert.

SULLE

MONOCLOROPROPILBENZINE

E SUL

METILBENZILCARBINOL

del Dottor Giorgio Errera

In una Memoria pubblicata negli *Atti* di quest'Accademia (volume XX) notai come per l'azione del cloro sulla propilbenzina bollente si formi un cloruro $C_6H_5 \cdot C_3H_6Cl$ di costituzione sconosciuta, il quale trattato con potassa alcoolica, o sottoposto a prolungata ebollizione, si decompone completamente in acido cloridrico ed α - fenilpropilene $C_6H_5 \cdot CH : CH \cdot CH_3$.

Studiando il comportamento del cimene con cloro nelle medesime condizioni (1), avea già precedentemente trovato che si formava invece un miscuglio di tre monocloroderivati, l'uno per sostituzione di idrogeno nel metile, gli altri due per sostituzione di idrogeno nel propile, ma di questi l'uno perdeva facilmente acido cloridrico trasformandosi nell'idrocarburo non saturo

$$C_6H_4 \begin{cases} CH : CH \cdot CH_3 \\ CH_3 \end{cases} \text{(2)},$$

l'altro molto più stabile resisteva all'azione della potassa alcoolica.

Accennai allora alle ragioni che mi indussero a ritenere anche in questo caso che l'idrogeno sostituito dal cloro appartenesse alle catene laterali, non al nucleo benzinico.

(1) Gazzetta Chimica Italiana, XIV, 278.
(2) Ibidem, XIV, 504.

Scopo del presente lavoro è lo studio dei tre monoclorederivati isomeri che si possono considerare come risultanti dalla propilbenzina per sostituzione dell'idrogeno del propile col cloro, studio diretto da una parte a stabilire la struttura del cloruro risultante per azione del cloro sull'idrocarburo, dall'altra a sperimentare la loro stabilità relativa e ad avere quindi una qualche luce sul caso più complesso del cimene.

Come si vedrà da ciò che segue, mentre si potè dimostrare che al cloroderivato ottenuto direttamente dalla propilbenzina compete la formula $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CHCl \cdot CH_3$, il secondo scopo non venne raggiunto.

Per preparare questi clorocomposti di costituzione conosciuta ho dovuto partire dagli alcoli corrispondenti e sostituire l'ossidrile mediante l'alogeno.

I.

Alcool fenilpropilico od idrocinnamico

$$C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2OH.$$

Quest'alcool già descritto da Miller (1) e da Rügheimer (2) si trova nello stirace, come etere dell'acido cinnamico, e si può ottenere artificialmente per riduzione dell'alcool cinnamico, quando questa si faccia in presenza di molta acqua.

Per prepararlo sono partito dalla stiracina greggia contenente cioè ancora l'etere cinnamico dell'alcool fenilpropilico, l'ho saponificata, facendola ricadere per pochi minuti con potassa acquosa concentratissima (60 parti di potassa, 40 d'acqua) ed ho ridotto direttamente, senza prima rettificarlo, il liquido oleoso ottenuto per distillazione con vapor d'acqua e costituito dal miscuglio dei due alcoli cinnamico ed idrocinnamico.

Secondo le indicazioni di Rügheimer, ho sospeso il liquido da ridurre in una quantità d'acqua piuttosto considerevole, due litri di questa per cento grammi di quello, e vi ho fatto agire l'amalgama di sodio al 5 %, tenendo il pallone sempre immerso

(1) Ann. Ch. Pharm., CLXXXVIII, 202.
(2) Ann. Ch. Pharm., CLXXII, 123.

nell'acqua bollente. Durante la riduzione dovetti sostituire talvolta con nuova acqua la soluzione di idrato sodico che andava formandosi, e che troppo concentrata reagiva male sull'amalgama di sodio.

Trascorse due settimane, dopo le quali giudicai che la riduzione dell'alcool cinnamico potesse essere completa, sottoposi a distillazione frazionata il prodotto, evitando l'uso del cloruro di calcio per asciugarlo, temendo che questo, come avviene talora in casi analoghi, ne determinasse la decomposizione, eliminandosi acqua.

Accanto ad una quantità considerevole di α-fenilpropilene (allilbenzina) ottenni un liquido bollente da 237°-239° (colonna immersa nel vapore) il quale mi diede all'analisi numeri concordanti con quelli richiesti dall'alcool fenilpropilico.

Da gr. 0,2750 di sostanza risultarono gr. 0,7975 di CO_2 e gr. 0,2324 di H_2O

e in 100 parti

	trovato	calcolato per $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2OH$
C	79, 09	79, 41
H	9, 39	8, 82
O	11, 52	11, 77
	100, 00	100, 00

Rügheimer asserisce che nella riduzione dell'alcool cinnamico, accanto al fenilpropilico risultano solo piccole quantità di allilbenzina. Io ne ottenni invece in quantità ragguardevole; tale differenza nei risultati dipende probabilmente da qualche leggiera diversità nel modo di operare, sapendosi quanto influiscano le condizioni dell'esperienza nel modo di agire dell'idrogeno nascente sull'alcool cinnamico (1).

(1) Hatton, Hodgkinson, Journ. of the Chemical Society, **39**, 319.

Cloruro di idrocinnamile

$$C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2Cl.$$

L'acido cloridrico gazoso non reagisce sull'alcool fenilpropilico, nè alla temperatura ordinaria, nè a quella di 100°, anche se in presenza di sostanze disidratanti come i cloruri di calcio e di zinco fusi. L'alcool discioglie una certa quantità di gaz con sviluppo di calore, ma non si vede eliminarsi acqua.

Operai allora la trasformazione in cloruro riscaldando a 130° per tre ore l'alcool in tubo chiuso insieme ad una soluzione acquosa d'acido cloridrico satura a zero; estrassi con etere e dopo scacciato il solvente, sottoposi a distillazione evitando di disseccare su cloruro di calcio. Il liquido passò quasi tutto verso i 220° sviluppando un po' d'acido cloridrico; bollito a ricadere per qualche ora lo svolgimento d'acido cloridrico, sensibile in principio, andò scemando poco a poco per poi cessare affatto. Distillato di nuovo il composto passò alla stessa temperatura di prima lasciando nel pallone un piccolo residuo denso, oscuro, bollente a temperatura molto elevata. Analizzato diede i numeri richiesti dal cloruro di idrocinnamile.

Gr. 0,3033 di sostanza diedero gr. 0,2811 di $AgCl$.

Gr. 0,3564 di sostanza diedero gr. 0,9087 di CO_2 e gr. 0, 2428 di H_2O

e in 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2Cl$
Cl	22, 93	22, 98
C	69, 53	69, 90
H	7, 56	7, 12
	100, 02	100, 00

Il cloruro di idrocinnamile è un liquido di odore aggradevole che ricorda il cimene, di colore leggermente giallognolo, più denso dell'acqua, bollente da 219°-220° (colonna nel vapore). È molto stabile, quando è puro non si decompone affatto per

ebollizione, anzi, come si è visto, si può trar profitto di questa proprietà per liberarlo da altri prodotti clorurati più facilmente decomponibili; resiste anche bollito con cloruro di zinco fuso. Questa stabilità è tanto più rimarchevole inquantochè gli altri due cloruri isomeri, dei quali parlerò in seguito, si decompongono per l'azione del calore ed anche la cloroetilbenzina $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CH_2\,Cl$, descritta da Fittig (1) e che possiede costituzione analoga, non si può distillare impunemente.

Il cloruro di idrocinnamile allungato con acido acetico non reagisce sull'acetato d'argento neppure alla temperatura di ebollizione.

Etere idrocinnamiletilico

$$\left.\begin{array}{r} C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \\ C_2H_5 \end{array}\right\rangle O.$$

Il cloruro di idrocinnamile bollito per una o due ore con potassa alcoolica concentrata perde tutto il cloro, ma invece di formarsi l'idrocarburo non saturo, la vera allilbenzina

$$C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CH : CH_2,$$

risulta l'etere misto idrocinnamiletilico.

All'analisi si ebbero i seguenti risultati:

Da gr. 0,2684 di sostanza si ottennero gr. 0,7924 di CO_2 e gr. 0,2446 di H_2O

e su 100 parti

	trovato	calcolato per $\left.\begin{array}{r} C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \\ C_2H_5 \end{array}\right\rangle O$
C	80, 51	80, 48
H	10, 12	9, 76
O	9, 37	9, 76
	100, 00	100, 00

L'etere idrocinnamiletilico è un liquido bollente alla temperatura di 220°-222° (colonna nel vapore), incoloro, di odore aggrade-

1) Ann. Ch. Pharm., CLVI, 240.

vole di frutta, insolubile nell'acqua. La sua formazione è analoga a quella degli eteri benziletilico (1) $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot O \cdot C_2H_5$ e cumile tilico (2)

$$C_6H_4 \begin{cases} C_3H_7 \\ H \cdot C_2 \cdot OC_2H_5 \end{cases}$$

dai cloruri di benzile e di cumile con potassa alcoolica. Questo fatto di essersi formato l'etere invece dell'idrocarburo non saturo è in relazione colla grande stabilità del cloruro.

Sarebbe interessante il poter passare dall'alcool fenilpropilico o dal cloruro corrispondente alla vera allilbenzina (isoallilbenzina di Chojnackj (3)) ottenuta in piccolissima quantità per via sintetica e non studiata; mi propongo di fare qualche tentativo in proposito.

II.

Metilbenzilcarbinol

$$C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CHOH \cdot CH_3 .$$

Per avere quest'alcool incominciai col preparare il metilbenzilchetone (fenilacetone), seguendo il metodo di Radzizewski (4), distillando cioè un miscuglio a parti uguali di acetato e fenilacetato di calcio. L' operazione si fece in storta di rame su 100 grammi di miscuglio per volta; insieme al fenilacetone risultò una quantità abbastanza considerevole del dibenzilchetone $(C_6H_5 \cdot CH_2)_2 CO$ il quale fu dapprima isolato per distillazione frazionata, poi cristallizzato dagli eteri del petrolio bollenti da 30°-40°.

Il fenilacetone fu ridotto con amalgama di sodio al 5 % per porzioni di 25 grammi sciolti in 250 grammi d'alcool e 250 di acqua. Siccome dopo qualche tempo, diventando la soluzione troppo alcalina, si rallentava assai lo sviluppo di idrogeno, fu

(1) Nuovo Cimento, III, 397.
(2) Gazzetta Chimica Italiana, XIV, 278.
(3) Comptes rendus, LXXVI, 1413
(4) Berichte der deutschen chem. Gesellschaft, III, 198.

necessario eliminare l'idrato sodico formatosi. Perciò si scacciò l'alcool a bagno-maria, si separò lo strato oleoso formatosi alla superficie della soluzione sodica, si aggiunse ad esso di nuovo l'alcool distillato e dopo aver diluito con acqua fino ad intorbidamento leggerissimo si continuò la riduzione. Si dovette ripetere questo trattamento, il quale durò circa due settimane, finchè la sostanza non si combinò più col bisolfito sodico, indizio questo che l'acetone era scomparso e quindi la riduzione completa.

Il prodotto, divenuto intensamente bruno, venne asciugato su cloruro di calcio e sottoposto a distillazione frazionata. Dopo ripetute rettificazioni, si ottenne un liquido bollente da 214°,5-215°,5 (colonna nel vapore) il quale diede all'analisi numeri concordanti con quelli richiesti dal metilbenzilcarbinol.

Da gr. 0,4651 di sostanza risultarono gr. 1,3478 di CO_2 e gr. 0,3752 di H_2O

e in 100 parti

	trovato	calcolato per $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CHOH \cdot CH_3$
C	79, 07	79, 41
H	8, 96	8, 82
O	11, 97	11, 77
	100, 00	100, 00

Il metilbenzilcarbinol è un liquido appena colorato in giallo, di odore gradevole, più leggiero dell'acqua, non elimina acqua nè alla distillazione nè portato in tubo chiuso a 300°.

Non è l'alcool il prodotto principale della riduzione del chetone, accanto ad esso si formano in quantità considerevole delle sostanze bollenti a temperatura molto elevata, da 280° a 400° fra le quali vi sarà probabilmente il pinacone corrispondente al metilbenzilchetone. Ogni tentativo di isolarlo andò però a vuoto, i liquidi bollenti ad alta temperatura vennero distillati più volte frazionatamente, ma, anzichè ottenere un prodotto passante a temperatura costante, si ebbe a notare una continua e lenta decomposizione per la quale si andavano formando sostanze gazose, liquide e solide.

Si dispose l'apparecchio in modo da poter raccogliere i gaz sul mercurio. Tra questi si potè constatare la presenza dell'ani-

dride carbonica assorbibile dalla potassa, dell'ossido di carbonio assorbibile dal cloruro ramoso in soluzione acida, e finalmente d'un idrocarburo che rimaneva, dopo aver eliminati gli altri due gaz coi suddetti reattivi, saturo perchè non veniva assorbito dal bromo, capace di bruciare con fiamma poco luminosa. La quantità troppo piccola di questo idrocarburo non mi permise di poterlo caratterizzare più esattamente.

I prodotti liquidi di decomposizione si riconobbero essere acqua ed α-fenilpropilene (allilbenzina), questo constatato mediante il suo bibromuro caratteristico

Finalmente la sostanza solida la quale passava verso i 300° e che si rapprendeva già lungo il tubo dell'apparecchio distillatore in una massa bianca cristallina, venne spremuta alla pompa e compressa tra carta bibula per liberarla dall'olio che la impregnava, quindi cristallizzata dall'alcool nel quale era molto più solubile a caldo che a freddo.

L'analisi diede i seguenti risultati:

Da gr. 0,3292 di sostanza risultarono gr. 1,1229 di CO_2 e gr. 0,2029 di H_2O

e su 100 parti

	trovato		calcolato per $C_6H_5 \cdot CH \parallel C_6H_5 \cdot CH$
C	93, 03		93, 33
H	6, 85		6, 67
	99, 88		100, 00.

Da una determinazione di densità di vapore fatta col metodo di Meyer nei vapori di antrachinone (p. e. 368°) si ebbe:

P = gr. 0,0947
H_0 = $733^{mm},7$
t = 14^0
V_t = $13^{cc},4$

Trovato $D = 6, 05$

Calcolato per $C_6H_5 \cdot CH \parallel C_6H_5 \cdot CH$ $D = 6, 22$

I dati forniti dall'analisi e dalla determinazione di densità di vapore, il punto di fusione 121°-123°, il presentarsi dello idrocarburo da me ottenuto in laminette bianche, la sua poca solubilità nell'alcool freddo, non lasciano alcun dubbio sulla sua identità collo stilbene. Anche il corrispondente bibromuro preparato secondo le indicazioni di Limpricht e Schwanert (1) e cristallizzato dallo xilene, fonde alla temperatura richiesta di 237°.

Riassumendo, come prodotti di decomposizione dei liquidi bollenti al disopra di 280° e provenienti dalla riduzione del metilbenzilchetone si formano, un idrocarburo saturo gazoso, ossido di carbonio, anidride carbonica, acqua, α-fenilpropilene, stilbene.

Supponendo che la sostanza la quale va decomponendosi sia il pinacone e che l'idrocarburo gazoso sia metano, non è difficile trovare una equazione la quale interpreti approssimativamente la detta decomposizione. Siccome però essa riesce troppo complicata, non credo abbia una qualche probabilità di rispondere al vero e stimo opportuno tralasciarla.

Cloruro di metilbenzilcarbinile

$$C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CHCl \cdot CH_3 .$$

Come per l'alcool fenilpropilico, l'acido cloridrico gazoso non reagisce sul metilbenzilcarbinol, vi si discioglie soltanto con sviluppo di calore senza che si veda separarsi acqua.

Ricorsi allora all'azione del pentacloruro di fosforo, e perciò ad una molecola d'alcool aggiunsi poco a poco una molecola di pentacloruro di fosforo tenendo ben raffreddato per evitare un innalzamento troppo forte di temperatura. Versai rapidamente nell'acqua il prodotto della reazione, per decomporre l'ossicloruro di fosforo, e distillai quindi in corrente di vapore; nel pallone non rimase alcun residuo, indizio questo dell'assenza di eteri dell'acido fosforico. L'analisi ed il potere decolorante rispetto all'acqua di bromo dimostrarono però che il cloruro distillato col vapor d'acqua non era puro, ma conteneva una certa quantità

(1) Ann. Ch. Pharm., CXLV, 336.

di idrocarburo non saturo proveniente dall'azione disidratante sull'alcool dell'ossicloruro o dello stesso pentacloruro di fosforo.

Adoperando l'alcool ed il pentacloruro nelle proporzioni di quattro molecole del primo per una del secondo si ottennero risultati peggiori; la formazione dell'idrocarburo non saturo viene favorita dal riscaldamento necessario a completare la reazione.

Dopo vari tentativi infruttuosi per separare il cloruro dall'α-fenilpropilene, separazione resa difficile dal fatto che il cloruro si decompone lentamente alla distillazione, il che rende impossibile un frazionamento molto ripetuto, e con apparecchi alti, pensai di ricorrere alla rettificazione nel vuoto. In questo modo, essendo resa minima la decomposizione, riuscii a separare nettamente il miscuglio in due parti, l'una bollente a più bassa temperatura e costituita da α-fenilpropilene, l'altra a temperatura più elevata che non decolorava quasi più l'acqua di bromo e che mi diede all'analisi una quantità di cloro vicina a quella richiesta dal cloruro.

Da gr. 0,3749 di sostanza risultarono gr. 0,3428 di $Ag\ Cl$.

e su 100 parti

	trovato	calcolato per $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CHCl \cdot CH_3$
Cl	22, 62	22, 98.

Questo cloruro, come me ne sono accorto più tardi, si può ottenere più facilmente collo stesso metodo adoperato per l'alcool fenilpropilico, vale a dire riscaldando il metilbenzilcarbinol in tubo chiuso per tre ore a 135° col doppio volume di soluzione acquosa d'acido cloridrico satura a 0°. Questo metodo dà un rendimento molto migliore che quello col pentacloruro di fosforo.

Il cloruro di metilbenzilcarbinile è un liquido leggermente giallo, di odore analogo a quello del cimene, più pesante dell'acqua e in essa insolubile, distilla da 204°-207° (non corretto) decomponendosi parzialmente in acido cloridrico ed α-fenilpropilene. Questa decomposizione avviene molto rapidamente in presenza di cloruro di zinco od anche di zinco metallico. Bollito con potassa alcoolica dà α-fenilpropilene.

Come avviene pel cloruro di idrocinnamile, la sua soluzione nell'acido acetico, anche se fatta bollire, non reagisce sull'acetato di argento.

III.

Etilfenilcarbinol

$$C_6H_5 \cdot CHOH \cdot CH_2 \cdot CH_3 .$$

Il chetone necessario ad ottenere l'alcool fu preparato col metodo di Barry (1) distillando per porzioni di 100 grammi per volta un miscuglio di propionato e benzoato di bario (per ogni 2 parti del primo circa 3 del secondo). Il distillato si lavò con carbonato sodico e si frazionò; risultarono tre porzioni principali, la prima bollente a bassa temperatura e costituita probabilmente da dietilchetone, la seconda intermedia la quale era il chetone richiesto, la terza finalmente passante a temperatura assai elevata e costituita con ogni probabilità da difenilchetone.

La parte intermedia dopo varie rettificazioni passò da 213°-214° (colonna nel vapore) e diede all'analisi i seguenti numeri abbastanza vicini a quelli richiesti dalla teoria.

Gr. 0,4006 di sostanza dettero gr. 1,1902 di CO_2 e gr. 0,2771 di H_2O

e per 100

	trovato	calcolato per $C_6H_5 \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3$
C	80, 96	80, 60
H	7, 67	7, 46
O	11, 37	11, 94
	100, 00	100, 00

La trasformazione del chetone in alcool si fece coll'amalgama di sodio seguendo lo stesso metodo impiegato pel metilbenzilcarbinol. La riduzione però si prolungò per un tempo assai maggiore, circa un mese, non avendo in questo caso la reazione col bisolfito sodico ad indicarci la scomparsa totale del chetone.

Il prodotto estratto con etere, asciugato su cloruro di calcio e distillato, insieme ad un forte residuo denso e bruno costituito

(1) Berichte der deutschen chem. Ges., VI, 1007.

forse dal pinacone, diede un liquido bollente dopo molte rettificazioni da 215°-217° (colonna nel vapore).

I risultati dell'analisi sono quelli richiesti dalla teoria per l'etilfenilcarbinol.

I. Gr. 0,3121 di sostanza diedero gr. 0,9099 di CO_2 e gr. 0,2522 di H_2O.

II. Gr. 0,3676 di sostanza diedero gr. 1,0660 di CO_2 e gr. 0,2949 di H_2O.

III. Gr. 0,3384 di sostanza diedero gr. 0,9814 di CO_2 e gr. 0,2751 di H_2O

e su 100 parti

	trovato				calcolato
	I	II	III	per $C_6H_5 \cdot CHOH \cdot CH_2 \cdot CH_3$	
C	79, 51	79, 09	79, 09		79, 41
H	8, 97	8, 91	9, 03		8, 82
O	11, 52	12, 00	11, 88		11, 77
	100, 00	100, 00	100, 00		100, 00.

Quest'alcool, già descritto dal Barry (1), è un liquido quasi incoloro, di odore gradevole, più leggiero dell'acqua.

Cloruro di etilfenilcarbinile

$$C_6H_5 \cdot CHCl \cdot CH_2 \cdot CH_3.$$

A differenza di ciò che avviene per i due alcoli precedentemente descritti, l'acido cloridrico gazoso reagisce sull'etilfenilcarbinol a temperatura ordinaria. Il liquido si riscalda molto e dopo pochi minuti si intorbida per separazione d'acqua la quale va poi a raccogliersi al fondo del recipiente. Dopo il raffreddamento si sospende la corrente d'acido cloridrico, si lava con acqua contenente un po' di carbonato sodico, poi con acqua pura, si estrae quindi con etere e si distilla, evitando, come sempre, l'uso del cloruro di calcio per disseccare il composto.

(1) Loco citato.

La maggior parte del prodotto passa da 200°-205° (non corretto), ma avviene mentre si distilla una forte decomposizione con sviluppo di acido cloridrico e formazione di α-fenilpropilene. Il liquido ottenuto non è quindi il cloruro puro, ma un miscuglio di questo con α-fenilpropilene, come lo dimostra il potere decolorante rispetto all'acqua di bromo e la analisi seguente:

Gr. 0,3480 di sostanza diedero gr. 0,9068 di CO_2 e gr. 0,2398 di H_2O.

Gr. 0,4106 di sostanza diedero gr. 0,3602 di $Ag\ Cl$

e su 100 parti:

C	71, 06
H	7, 65
Cl	21, 70
	100, 41.

Un miscuglio di cinque parti di idrocarburo non saturo $C_6H_5 \cdot CH : CH \cdot CH_3$ e 95 di cloruro $C_6H_5 \cdot CHCl \cdot CH_2 \cdot CH_3$ richiede per cento:

C	70, 98
H	7, 19
Cl	21, 83
	100, 00.

Vista la facilità colla quale questo cloruro si decompone, rinunziai ad averlo allo stato di purezza. Così com'è, costituisce un liquido giallastro, più denso dell'acqua, di odore affatto analogo a quello dei cloruri corrispondenti all'alcool fenilpropilico e al metilbenzilcarbinol. Bollito con cloruro di zinco, o con un pezzetto di zinco, si decompone molto rapidamente, scaldato a ricadere con potassa alcoolica dà α-fenilpropilene.

Acetato di etilfenilcarbinile

$$\begin{array}{l} C_6H_5 \cdot CH \cdot CH_2 \cdot CH_3 \\ \quad\quad\quad\ \ | \\ CH_3 \cdot CO_2 \end{array}$$

A differenza degli altri due, il cloruro di etilfenilcarbinile reagisce vivamente in soluzione acetica, all'ebollizione, coll'acetato di argento.

Aggiunsi la quantità calcolata di acetato d'argento ad una soluzione del cloruro in tre volumi d'acido acetico, e scaldai a ricadere per una mezz'ora; separai alla pompa il cloruro d'argento formatosi, lo lavai ripetutamente con acido acetico, aggiunsi al prodotto tutti i liquidi di lavatura, precipitai con acqua ed estrassi con etere.

Distillai frazionatamente la soluzione eterea lavata prima con carbonato sodico, ed accanto a poco α-fenilpropilene, preesistente nel cloruro impuro, che caratterizzai trasformandolo in bibromuro, ottenni l'acetato.

Dall'analisi ebbi i risultati seguenti:

Gr. 0,3376 di sostanza diedero gr. 0,9152 di CO_2 e gr. 0,2445 di H_2O

e su 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{11}H_{14}O_2$
C	73, 93	74, 16
H	8, 05	7, 86
O	18, 02	17, 98
	100, 00	100, 00

L'acetato di etilfenilcarbinile è un liquido colorato leggermente in giallo, di odore di frutta, insolubile nell'acqua, bollente da 227°-228° (colonna nel vapore) senza decomporsi.

CONCLUSIONE.

Come dissi nel principio di questa Memoria, uno degli scopi del presente lavoro è stabilire la costituzione del cloruro ottenuto facendo agire direttamente il cloro sulla propilbenzina bollente, e da me descritto in una precedente Nota (1).

Siccome questo cloruro dà α-fenilpropilene tanto da solo per prolungata ebollizione, quanto per azione della potassa alcoolica, resta escluso che esso possa essere identico al cloruro di idro-

(1) *Sull' α-fenilpropilene e sull' α-paratolilpropilene.* Atti della R. Acc. Vol. XX.

cinnamile $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2Cl$ il quale non viene decomposto affatto dal calore e dà con potassa alcoolica l'etere idrocinnamiletilico $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot O \cdot C_2H_5$. Rimane il dubbio tra gli altri due.

Lasciando da parte la piccola differenza nei punti di ebollizione, differenza della quale non si può tener conto trattandosi di corpi che distillati si decompongono, rimane a distinguerli una proprietà bene spiccata, vale a dire il diverso modo di comportarsi coll'acetato d'argento. Il cloruro di etilfenilcarbinile $C_6H_5 \cdot CHCl \cdot CH_2 \cdot CH_3$, come già fu detto, sciolto in acido acetico e bollito con acetato di argento si trasforma in acetato; il cloruro di metilbenzilcarbinile $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CHCl \cdot CH_3$ nelle stesse condizioni non reagisce affatto. Ora neppure il cloruro ottenuto per sostituzione diretta dell'idrogeno della propilbenzina, sciolto in acido acetico reagisce all'ebollizione coll'acetato d'argento, è dunque identico al cloruro di metilbenzilcarbinile e possiede quindi la formula $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CHCl \cdot CH_3$.

L'altro scopo del presente lavoro era il vedere anche, se tra questi prodotti qui descritti, ve ne fosse uno, il quale, trattato con potassa alcoolica, non perdesse il cloro, come avviene pel cimene (1). L'esperienza diede risultati negativi, tutti e tre i cloruri da me esaminati si decompongono colla potassa alcoolica abbandonando tutto il loro cloro.

Tale diversità di comportamento nei cloroderivati del cimene e della propilbenzina non deve però meravigliarci perchè si osserva in altri casi di idrocarburi omologhi. Infatti, ad esempio, se noi consideriamo i due cloroderivati della etilbenzina

$$C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CH_2Cl \quad \text{e} \quad C_6H_5 \cdot CHCl \cdot CH_3$$

descritti l'uno da Fittig (2), l'altro da Engler e Bethge (3), vediamo che ambedue si decompongono fortemente alla distillazione; nel caso invece della propilbenzina i due cloruri

$$C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CHCl \cdot CH_3 \quad \text{e} \quad C_6H_5 \cdot CHCl \cdot CH_2 \cdot CH_3$$

---

(1) Gazzetta Chimica Italiana, XIV, 278.
(2) Ann. Ch. Pharm., CLVI, 240.
(3) Berichte der deutschen chem. Gesellschaft, VII, 1127.

non distillano inalterati, il terzo $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2Cl$ che corrisponde per costituzione alla cloroetilbenzina di Fittig non si decompone neppure bollito con cloruro di zinco.

Ne viene che ciò che vale per un idrocarburo non può dirsi con sicurezza dell'altro, e che quindi non è da stupirsi che nel cimene vi sia un cloroderivato il quale si comporti in modo diverso del corrispondente della propilbenzina, nella stessa maniera che uno dei derivati di questa differisce nel comportamento dal corrispondente nella etilbenzina.

Torino,
Laboratorio di Chimica della R. Università.
Giugno, 1886.

RICERCHE

SULLE

RIGATE ELLITTICHE

DI QUALUNQUE ORDINE

del Dott. CORRADO SEGRE

Le rigate razionali d'ordine n di uno spazio qualunque si possono tutte ottenere come proiezioni di quelle *appartenenti* ad S_{n+1}; da questa proposizione, che si dimostra facilmente, io dedussi in altro lavoro (*) una teoria di quelle rigate ed in particolare, per quelle appartenenti allo spazio ordinario, alcuni risultati del CLEBSCH relativi alla loro classificazione ed alla loro rappresentazione piana. Ora nasce la questione se un metodo analogo si possa usare per le rigate di genere p qualunque. Nella 1ª parte di questo scritto dimostro che ciò accade infatti per le rigate di genere $p=1$ e 2, le quali si possono tutte ottenere come proiezioni di quelle appartenenti risp. ad S_{n-1} e S_{n-2} (e non già di quelle appartenenti ad S_n e S_{n-1}, come l'analogia potrebbe far credere; poichè queste ultime sono coni); mentre per $p>2$ $\left(\text{e } \leq \frac{n}{2}\right)$ non solo le rigate appartenenti ad S_{n-p+1} sono coni, ma neppure quelle appartenenti ad S_{n-p} (od S_{n-p-1}, . . .) non possono dare come proiezioni tutte le rigate d'ordine n e genere p degli spazi inferiori.

Passo poi ad applicare il risultato ottenuto sulle rigate ellittiche allo studio di esse come proiezioni di quelle appartenenti ad S_{n-1}. Ne trovo così una distinzione in specie a seconda dell'or-

(*) *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (Atti di questa R. Acc., vol. XIX).

dine minimo delle curve (semplici) in esse contenute, ordine che è sempre $\leq \frac{n+1}{2}$, e dimostro varie proprietà di ciascuna specie relative sovratutto alle curve dei vari ordini $< n$ contenute nelle rigate. Mediante una proiezione conveniente di una rigata di S_{n-1} sullo spazio ordinario quella si trasforma in un cono cubico e così ottengo varie rappresentazioni di tutte le rigate ellittiche sul cono cubico ordinario (che è la superficie d'ordine minimo su cui esse si possano rappresentare univocamente).

Tutti i risultati sulle rigate ottenuti in questo lavoro sembrano nuovi; per brevità non mi fermerò nè ad applicarli a rigate d'ordini particolari, nè a dedurre da quelli relativi alle rigate ellittiche altre proposizioni che si presenterebbero facilmente come conseguenze di essi.

Generalità sulle rigate di genere qualunque e specialmente su quelle ellittiche.

1. Cominciamo con qualche osservazione assai semplice, ma che ci occorrerà in seguito, relativa alla generazione delle superficie rigate mediante curve punteggiate univocamente.

Abbiasi in uno spazio S_r una rigata qualunque d'ordine n (*). Conducendo spazi S_{r-1} per delle generatrici (in numero ≥ 0) si possono ottenere sulla rigata delle curve (**) semplici d'ordine $\leq n$. Considerando due curve γ^μ, γ^ν di ordini μ, ν così ottenute, è chiaro che esse si tagliano in $\mu+\nu-n$ punti, poichè l'S_{r-1} con cui si ottenne γ^μ e che contiene inoltre $n-\mu$ generatrici taglia γ^ν in ν punti di cui $n-\mu$ stanno su quelle e i rimanenti saranno precisamente i punti comuni a γ^μ, γ^ν. Le generatrici della rigata punteggiano univocamente queste due curve, in modo che quei punti comuni corrispondono a se stessi, cioè sono punti uniti.

(*) Intorno alle rigate che considero in questo lavoro supporrò sempre che non si scindano in altre rigate e di più (quando non dirò il contrario) che non siano coni.

(**) Per *curva* di una rigata intenderò sempre una curva che non sia composta di sole generatrici, ma sia incontrata da tutte le generatrici (*direttrice*).

Viceversa due curve γ^μ, γ^ν di S_r, le quali siano punteggiate univocamente ed abbiano $\mu+\nu-n$ punti uniti (*), generano una rigata del loro stesso genere e d'ordine n. Di qui segue in particolare che su una rigata d'ordine n non possono esservi due curve semplici incontrate da ogni generatrice in un punto solo ed i cui ordini diano una somma minore di n.

2. Consideriamo una rigata d'ordine n e di genere $p \geq 1$ e $< \frac{n}{2}$ (**), la quale *appartenga* ad un S_r. Un S_{r-1} di questo la taglierà in una curva d'ordine n e genere p appartenente ad esso: sarà quindi, per una ben nota proposizione, $r-1 \leq n-p$. Dunque il massimo numero di dimensioni di uno spazio a cui appartenga una rigata d'ordine n e genere p è $n-p+1$. Orbene dico che *se una rigata d'ordine* n *e genere* p *appartiene ad un* S_{n-p+1}, *essa sarà un cono.* Invero in tal caso, se la rigata non fosse un cono, un S_{n-p} condotto convenientemente per una sua generatrice taglierebbe ancora la rigata in una curva C^{n-1} corrispondente univocamente alla serie delle generatrici e quindi anch'essa di genere p. Quella curva starebbe perciò, in virtù d'una proposizione dianzi ricordata, in un S_{n-p-1}; e quindi o gli S_{n-p} passanti per questo taglierebbero ancora la rigata in una generatrice variabile, sicchè la rigata sarebbe razionale, oppure uno di quegli S_{n-p} la conterrebbe tutta, sicchè essa non apparterrebbe all'S_{n-p+1}: assurdo in ambi i casi.

Le rigate d'ordine n e genere p appartenenti ad S_{n-p+1} sono dunque i coni che proiettano le C^n di genere p *normali*, cioè appartenenti ad S_{n-p}, da punti esterni a questi. Il loro studio riducendosi perciò (almeno per certe proprietà) allo studio di quelle curve, una vera teoria delle rigate d'ordine n e genere p potrà cominciarsi con quelle appartenenti ad S_{n-p}.

3. Dal risultato ora ottenuto si trae una proposizione notevole intorno alle curve normali. Supponiamo che tra due curve normali A^n e B^n d'ordine n e genere p appartenenti risp. a due

---

(*) Quando genereremo una rigata mediante due curve punteggiate univocamente, supporrò sempre che gli spazi cui queste appartengono non abbiano comune uno spazio di maggior numero di dimensioni che quello risultante dalle condizioni esplicitamente imposte alle curve.

(**) Supporrò sempre nel seguito che il numero p considerato soddisfi a queste due condizioni.

spazi U_{n-p} e V_{n-p} vi sia una corrispondenza univoca tale che esistano due gruppi corrispondenti di n punti di esse i quali stiano in due S_{n-p-1} e siano proiettivi. Si potrà allora con un'omografia trasformare V_{n-p}, e quindi B^n, in modo che gli n punti considerati di B^n vadano a coincidere coi corrispondenti di A^n, e V_{n-p} vada a stare in uno stesso S_{n-p+1} con U_{n-p} senza però coincidere con questo. A^n e la B^n trasformata verranno ad essere in corrispondenza univoca con n punti uniti (nell'S_{n-p-1} d'intersezione dei loro spazi U_{n-p}, V_{n-p}): le rette congiungenti i punti corrispondenti genereranno perciò (n. 1) una rigata d'ordine n e genere p appartenente all'S_{n-p+1}, la quale sarà quindi (n. 2) un cono. La corrispondenza tra A^n e B^n era dunque proiettiva, vale a dire: *La condizione necessaria e sufficiente perchè una corrispondenza univoca tra due curve normali d'ordine* n *e genere* $p < \frac{n}{2}$ *di due* S_{n-p} *sia proiettiva è che esistano risp. in esse due gruppi corrispondenti di* n *punti situati in due* S_{n-p-1} *e proiettivi.*

In particolare ponendo $p=1$ e notando che due gruppi di n punti situati in due S_{n-2} sono sempre (in generale) proiettivi, abbiamo che *se due curve normali ellittiche d'ordine* n *sono in tale corrispondenza univoca che vi siano due gruppi corrispondenti di* n *punti appartenenti rispettivamente a due* S_{n-2}, *quella corrispondenza sarà proiettiva* (*).

4. Proponiamoci ora di dimostrare che *tutte le rigate ellittiche d'ordine* n, *le quali non siano coni e quindi* (n. 2) *appartengano a spazi di meno che* n *dimensioni, sono proiezioni di rigate d'ordine* n *appartenenti ad* S_{n-1}. A tal fine stabiliremo anzitutto la seguente proposizione:

In S_{n-2} *il cono ad* n − r *dimensioni che proietta da un* S_{n-r-2} *una curva ellittica qualunque* γ^{n-1} *d'ordine* n—1 *appartenente ad*

(*) Alla fine della mia Nota *Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes* (Math. Ann. XXVII, p. 296-314), procedendo in ordine inverso a quello ora tenuto, stabilii direttamente questa proposizione relativa alle curve ellittiche (mediante la loro rappresentazione parametrica) e ne trassi l'altra che le rigate ellittiche d'ordine n appartenenti ad S_4 sono coni. — Rimanderò a quel lavoro per alcuni risultati sulle curve ellittiche di cui ci serviremo e per le citazioni relative (alle quali citazioni sono però da aggiungere, per quanto riguarda le trasformazioni univoche delle curve ellittiche normali di 3° e 4° ordine in se stesse, quelle dei noti lavori del sig. Schur pubblicati nei *Math. Ann.*, vol. XVII p. 1, e vol. XX p. 254).

un S_{r-1} (*che non incontra l'* S_{n-r-2}) *contiene* $\infty^{(n-1)(n-r-1)}$ *curve ellittiche normali d'ordine* $n-1$, *sì che per* $n-1$ *punti del cono posti su altrettanti* S_{n-r-1} *generatori diversi e non situati in uno stesso* S_{n-3} *ne passa una determinata.*

Per questo supporrò solo noto che la γ^{n-1} considerata di S_{r-1} è la proiezione di una certa curva normale A^{n-1} di un R_{n-2} (passante per quello) fatta da un O_{n-r-2} (non incontrante S_{r-1}), ossia è sezione di un secondo cono il quale proietta da O_{n-r-2} la A^{n-1}. Ora se nel primo cono vi è realmente una curva ellittica normale C_{n-1} e facciamo corrispondere in A^{n-1} e C^{n-1} due punti che siano proiettati nello stesso punto di γ^{n-1}, agli $n-1$ punti di A^{n-1} posti in un S_{n-3} passante per O_{n-r-2} corrisponderanno evidentemente in C^{n-1} $n-1$ punti posti in un S_{n-3} passante per l'S_{n-r-2}; il che prova (n. 3, alla fine) che la corrispondenza considerata tra A^{n-1} e C^{n-1} farà parte di un'omografia tra R_{n-2} ed S_{n-2}, da essa individuata, e in cui O_{n-r-2} e l'S_{n-r-2} saranno corrispondenti e sostegni di forme in cui si corrispondono due S_{n-r-1} proiettanti uno stesso punto qualunque di S_{r-1}. Viceversa un'omografia tra R_{n-2} ed S_{n-2} in cui O_{n-r-2} e l'S_{n-r-2} si corrispondano in quel modo farà corrispondere ad A^{n-1} una C^{n-1} del primo cono. Ma un'omografia qualunque tra R_{n-2} ed S_{n-2} è determinata da $n(n-2)$ condizioni: dal corrispondersi degli O_{n-r-2}, S_{n-r-2} e delle forme che li hanno per sostegni se ne hanno già $r(n-r-1)+(r+1)(r-1)$, sicchè l'omografia considerata resta determinata da $(n-1)(n-r-1)$ nuove condizioni; ed altrettante appunto si avranno se per $n-1$ punti di A^{n-1} si fissano i corrispondenti ad arbitrio sugli S_{n-r-1} del primo cono corrispondenti a quelli del secondo che passano per quei punti. E si vede anche facilmente che tutte quelle condizioni che così si hanno sono indipendenti, cioè che esiste una determinata omografia soddisfaciente a tutte, purchè gli $n-1$ punti scelti in ciascun cono non stiano in un S_{n-3}. Da ciò segue pel primo cono la proposizione enunciata.

5. Abbiasi ora una rigata ellittica qualunque d'ordine n appartenente ad un S_r, dove $r<n-1$. Scelto ad arbitrio un S_{n-r-2} che non abbia alcun punto comune con questo, dico che all'S_{n-1} che li congiunge appartiene una rigata ellittica d'ordine n avente per proiezione su S_r fatta da quell'S_{n-r-2} la rigata data. Invero conduciamo in S_r per una generatrice di questa due S_{r-1} i quali la taglino ancora in due curve ellittiche γ^{n-1} d'ordine $n-1$:

queste avranno comuni (n. 1) $n-2$ punti appartenenti ad un S_{r-2}. I due coni che proiettano quelle due γ^{n-1} dall'S_{n-r-2} appartengono risp. ai due S_{n-2} che proiettano da questo i due S_{r-1} considerati; essi hanno comuni gli $n-2$ S_{n-r-1} proiettanti quegli $n-2$ punti: orbene prendiamo su quegli S_{n-r-2} risp. $n-2$ punti qualunque *indipendenti*, cioè appartenenti all'S_{n-3} d'intersezione dei due S_{n-2}. In ciascuno dei due coni per quegli $n-2$ punti (ed un altro punto arbitrario del cono, posto fuori di quell'S_{n-3}) si conduca una C^{n-1} ellittica normale (n. 4). Le due C^{n-1} saranno punteggiate univocamente alle due γ^{n-1}, le quali sono punteggiate univocamente tra loro dalle generatrici della rigata data; dunque anche le due C^{n-1} saranno tra loro punteggiate univocamente con $n-2$ punti uniti. Esse genereranno (n. 1) una rigata ellittica d'ordine n appartenente ad S_{n-1} ed avente per proiezione su S_r la rigata data. — Il teorema propostoci al principio del n. 4 è dunque dimostrato.

6. Se si volesse applicare un ragionamento analogo al precedente per vedere se le rigate d'ordine n e genere p (non coni) si possano tutte ottenere con proiezioni da quelle appartenenti ad S_{n-p}, si troverebbe anzitutto in modo simile a quello tenuto al n. 4 che in S_{n-p-1} il cono che proietta una curva d'ordine $n-1$ e genere p di uno spazio qualunque S_{r-1} da un $S_{n-p-r-1}$ contiene *almeno* (e non più, come prima per $p=1$, *esattamente*) $\infty^{(n-p)(n-p-r)}$ curve normali d'ordine $n-1$ e genere p, sì che per $n-p$ punti non posti in un S_{n-p-2} e giacenti su S_{n-p-r} generatori diversi ne passa *almeno* una. Ma non sarebbe più possibile valersi di ciò come al n. 5 tranne che (per $p=1$, caso già considerato, e) per $p=2$. Adunque *tutte le rigate d'ordine* n *e genere* 2 *sono proiezioni di quelle appartenenti ad* S_{n-2}; il che fornisce un modo di studiare tutte quelle rigate analogo a quello di cui ci serviremo per le rigate ellittiche.

Il fatto che per $p>2$ il ragionamento dei n. 4, 5 non si può più estendere si spiega con ciò che appunto allora le rigate d'ordine n e genere p *non sono* più tutte proiezioni di quelle appartenenti ad S_{n-p}; anzi possiamo dimostrare più in generale, estendendo il ragionamento fatto al n. 2, che: *le rigate d'ordine* n *e genere* p, >2 *e* $<\frac{n}{2}$, *appartenenti ad* S_{n-p-i}, *dove* i *è* ≥ 0 *e minore di un certo numero* (che risulterà dal ragionamento), *non danno come proiezioni le rigate più generali d'or-*

dine n *e genere* p. Invero, se una tal rigata appartiene ad S_{n-p-i}, si potrà, supposto $2(i+2) \leq n-p-i$, cioè $i < I\frac{n-p-1}{3}$, per $i+2$ sue generatrici condurre un $S_{n-p-i-1}$, il quale taglierà ancora la rigata in generale secondo una curva d'ordine $n-i-2$ e genere p, che sarà semplice nel caso più generale (oppure se i è minore di un nuovo limite dipendente dalle particolarità della rigata), e starà, se $n-i-2 \geq 2p$, cioè $i < n-2p-1$, in un $S_{n-p-i-2}$. Il fascio degli $S_{n-p-i-1}$ passanti per questo taglierà la rigata in una serie lineare di gruppi di $i+2$ generatrici variabili. L'esistenza di una tal serie prova che il sistema delle generatrici della rigata non è generale tra i sistemi algebrici semplicemente infiniti di genere p, se $i+2 < I\frac{p+3}{2}$ (*); donde segue appunto l'asserto. — Si vede che i deve essere minore dei numeri $I\frac{n-p-1}{3}$, $n-2p-1$, $I\frac{p-1}{2}$.

In particolare per $i=0$ otteniamo che *le rigate d'ordine* n *e genere* $p \geq 2$ *e* $\leq \frac{n}{2}-1$ *appartenenti ad* S_{n-p} *sono iperellittiche* (cioè contengono serie lineari di coppie di generatrici) (**).

Sulle curve ellittiche.

7. Facciamo una nuova applicazione della proposizione dimostrata al n. 4 a determinare in un modo assai semplice il numero delle costanti da cui dipendono le curve ellittiche d'ordine n di uno spazio qualunque.

A tal fine notiamo anzitutto che le curve ellittiche normali d'ordine n, o, come d'or innanzi diremo per brevità, le C^n di

(*) V. Riemann, *Theorie der Abel'schen Functionen*, § 5 (Crelle's J., 54; Ges. Math. Werke, p. 101), ed inoltre Brill u. Nöther, *Ueber die algebraischen Functionen* u. s. w., Math. Ann. VII, p. 293.

(**) Qui si presenterebbero alcune questioni importanti. Le rigate d'ordine n e genere $p \leq \frac{n}{2}-1$ iperellittiche appartenenti a spazi di meno che $n-p$ dimensioni sono esse tutte proiezioni di quelle appartenenti ad S_{n-p}? Le rigate d'ordine n e genere $p < \frac{n}{2}$ appartenenti ad S_{n-p-i} dànno esse, quando i supera il limite superiore sopra trovato per i (o qual altro limite?), colle loro proiezioni tutte quelle appartenenti a spazi inferiori? Ma di queste questioni non mi occupo nel presente lavoro.

S_{n-1} sono ∞^{n^2}. Invero è noto che, se due tali curve hanno lo stesso *modulo* (invariante assoluto), esse sono proiettive (in un numero finito di modi): dunque corrispondentemente alle ∞^{n^2-1} omografie di S_{n-1} e agli ∞^1 valori che può assumere il modulo si hanno appunto $\infty^{n^2} C^n$. Ora ogni curva ellittica d'ordine n dello spazio S_r si può ottenere (n. 4, dove n ed r si aumentino di 1) come proiezione fatta da un S_{n-r-2} fisso di $\infty^{n(n-r-1)}$ tra le $\infty^{n^2} C^n$ dell'S_{n-1} congiungente quei due spazi. Dunque *le curve ellittiche d'ordine* n *appartenenti ad* S_r *sono* $\infty^{(r+1)n}$. — In particolare per le curve ellittiche di ordine n dello spazio ordinario si trova così che esse sono ∞^{4n}, proposizione nota.

8. In ogni C^n di S_{n-1} gli S_{n-2} di questo determinano ∞^{n-1} gruppi di n punti tali che dati $n-1$ punti di un gruppo è individuato il rimanente: li diremo *gruppi di* n *punti associati* o semplicemente *gruppi associati* della C^n.

Consideriamo ora in generale una curva ellittica d'ordine n, γ^n, appartenente ad uno spazio qualunque S_r, dove $r < n-1$. Essa si può considerare in infiniti modi come proiezione di C^n appartenenti a spazi S_{n-1} passanti per S_r fatta da S_{n-r-2} contenuti in quelli; e nel ragionamento fatto al n. 4 abbiamo visto che se in due qualunque di quelle C^n si considerano come corrispondenti due punti proiettati nello stesso punto di γ^n, la corrispondenza tra le due C^n è proiettiva, cioè tale che a gruppi di n punti associati dell'una corrisponderanno gruppi associati nell'altra. Ne segue che su γ^n la serie ∞^{n-1} dei gruppi di n punti proiezioni dei gruppi associati di una qualunque delle infinite C^n di cui γ^n è proiezione non muta cambiando quella C^n, vale a dire dipende unicamente da γ^n: la diremo pure la serie dei *gruppi associati* di n punti di γ^n. Essa è pure *lineare*, cioè tale che dati $n-1$ punti di un gruppo è individuato il rimanente. — Due gruppi qualunque di punti di γ^n i quali presi insieme costituiscano un gruppo di n punti associati li diremo *residuali*.

Comunque si trasformi una curva ellittica d'ordine n mediante proiezioni in spazi inferiori in un'altra tal curva, è chiaro che i gruppi di n punti associati si muteranno sempre in gruppi di n punti associati (*).

(*) In generale in questo lavoro evito, come si vede, la rappresentazione con funzioni ellittiche (o con funzioni algebriche) nello studio delle curve e

9. Se tra due curve ellittiche di ordini qualunque si può stabilire una corrispondenza univoca (vale a dire se esse hanno lo stesso modulo), se ne potranno stabilire infinite formanti due sistemi di ∞^1; poichè è noto che una curva ellittica normale, e quindi anche una curva ellittica qualunque, ammette ∞^1 trasformazioni univoche in se stessa formanti due sistemi. E come ognuna di queste ultime trasformazioni è caratterizzata dal valore di una costante, così si può dire che le ∞^1 corrispondenze univoche tra due curve ellittiche aventi lo stesso modulo corrispondono ai valori di una quantità, che chiameremo l'*invariante* delle corrispondenze.

Consideriamo due curve ellittiche γ^n dello stesso ordine n appartenenti a due spazi qualunque: risulta dalla proposizione vista alla fine del n. 3 che, se tra esse vi è una corrispondenza univoca tale che ad un particolare gruppo di n punti associati dell'una corrisponda nell'altra un gruppo pure associato, ciò accadrà sempre, vale a dire ad ogni gruppo di n punti associati di ognuna corrisponderà nell'altra un gruppo di n punti associati. Una tale corrispondenza tra le due γ^n si dirà una corrispondenza univoca *speciale*. Come tra due C^n aventi lo stesso modulo si possono stabilire $2n^2$ corrispondenze proiettive, così più in generale fra le ∞^1 corrispondenze univoche che possono determinarsi tra due curve ellittiche qualunque d'ordine n aventi lo stesso modulo vi saranno $2n^2$ corrispondenze speciali.

Le varie specie di rigate ellittiche.

10. D'or innanzi ci occuperemo dello studio di una rigata ellittica d'ordine n appartenente ad S_{n-1}, che chiameremo sempre F; e dalle proprietà che ne otterremo potremo sempre dedurre immediatamente (colla proiezione) enunciati relativi a rigate ellittiche d'ordine n di qualunque spazio S_r, ed in particolare dello spazio ordinario.

---

delle rigate ellittiche, poichè il metodo sintetico si adatta benissimo a quest'oggetto. Osserverò tuttavia che quelli che ho chiamato *gruppi associati* di n punti di γ^n sono caratterizzati dal fatto che in una conveniente rappresentazione parametrica di questa la somma dei parametri degli n punti di un tal gruppo è un periodo. Se γ^n è piana, quegli n punti sono i punti d'intersezione variabili di γ^n con una delle sue ∞^{n-1} curve *aggiunte* d'ordine $n-2$.

Ogni curva semplice di F d'ordine $<n$ è intersezione parziale di F con un S_{n-2} ed è quindi ellittica. Possiamo anzi vedere facilmente che *una curva qualunque di* F, *semplice o composta, d'ordine* $\nu<$n *appartiene ad un* $S_{\nu-1}$; giacchè essa non appartiene certo ad un S_ν, altrimenti (essa e quindi) F sarebbe razionale; e non sta in un $S_{\nu-2}$, altrimenti per questo ed $n-\nu-1$ punti di F si potrebbe condurre un S_{n-3} contenente quella curva e le generatrici passanti per quei punti, cioè una curva composta d'ordine $n-1$ e allora gli S_{n-2} passanti per quell'S_{n-3} taglierebbero F in una generatrice variabile e quindi ancora F sarebbe razionale. — Supponendo in particolare che la curva considerata sia semplice avremo: *ogni curva semplice di* F *d'ordine* $<$n *è una curva ellittica normale.*

Anche le curve semplici d'ordine n contenute in F, siano esse sezioni di F con degli S_{n-2}, ovvero appartengano ad S_{n-1}, sono ellittiche. Dunque: *le curve di qualunque rigata ellittica d'ordine* n (*appartenente a qualunque spazio*) *i cui ordini non superano* n *sono ellittiche; quelle di ordini* $<$ n *incontrano ogni generatrice in un sol punto.*

11. L'ipotesi che su F esista un punto doppio da cui partano due generatrici conduce facilmente a conchiudere l'esistenza di una linea doppia: vediamo dunque come possa F avere una tal linea. In ogni S_{n-2} non potrà esservi più di un punto doppio di F, poichè altrimenti la curva d'intersezione con questa sarebbe razionale: quindi se F ha una linea doppia, questa sarà una retta. Ora se una retta doppia di F non fosse direttrice, cioè incontrata da tutte le generatrici, conducendo un S_{n-2} per una di queste si otterrebbe come intersezione residua con F una C^{n-1} con punto doppio, il che è impossibile. E se poi quella retta doppia fosse nello stesso tempo direttrice e generatrice, allora per ogni suo punto passerebbe una sola generatrice variabile, sicchè F sarebbe razionale. Dunque *se* F *ha punti doppi, essa ha una retta direttrice doppia, per ogni punto della quale passano due generatrici variabili.*

Una tal rigata F non contiene alcuna C^ν dove $\nu<n-2$, poichè altrimenti per l'$S_{\nu-1}$ di questa e la retta doppia passerebbe un $S_{\nu+1}$ contenente F. Essa contiene invece infinite C^{n-2}, le quali si ottengono tutte come intersezioni residue della rigata cogli S_{n-2} che passano per una coppia fissa di generatrici uscenti da uno stesso punto della retta doppia (senza passare per questa),

e sono perciò ∞^{n-4}. Da ciò si deduce una costruzione di una rigata di questa specie, cioè mediante le rette congiungenti i punti corrispondenti di una C^{n-2} e di una retta doppia (non incontrante l'S_{n-3} cui quella appartiene) punteggiate univocamente.

Altre proprietà si hanno notando che in tal caso F sta in un cono a 3 dimensioni ellittico d'ordine $n-2$ che proietta dalla retta doppia tutte quelle infinite C^{n-2}: se in queste (come sempre nelle curve poste sulle rigate che consideriamo) diciamo *corrispondenti* i punti posti su una stessa generatrice, segue che tutte quelle C^{n-2} sono tra di loro in corrispondenza non solo univoca ma proiettiva. In ognuna delle C^{n-2} si ha poi una corrispondenza univoca involutoria determinata dalle coppie di generatrici uscenti dai punti della retta doppia: l'invariante di questa corrispondenza ed il modulo delle C^{n-2}, cioè di F, (vale a dire il rapporto anarmonico dei 4 punti della retta doppia da cui escono generatrici coincidenti) sono i due soli invarianti (assoluti) di una tal rigata, come si vede subito dalla sua costruzione.

Una prima specie di rigate ellittiche d'ordine n *(di uno spazio qualunque) si compone di rigate aventi una retta direttrice doppia. Ogni rigata di tale specie contiene (come curve d'ordine più basso dopo quella retta) una serie lineare di* ∞^{n-4} *curve ellittiche d'ordine* $n-2$, *di cui due qualunque si tagliano in* $n-4$ *punti per cui ne passa un fascio. Tutte quelle curve sono tra loro in corrispondenza univoca speciale. Ogni tal rigata si genera mediante una curva ellittica d'ordine* $n-2$ *ed una retta doppia le quali siano in corrispondenza univoca.*

12. Escluderemo d'or innanzi, se non diremo appunto il contrario, il caso ora esaminato in cui F ha una linea doppia: su F non potrà dunque più esservi alcuna retta direttrice (come non vi è mai alcuna conica) (*).

Conduciamo un S_{n-2} per $I\frac{n-1}{2}$ generatrici di F, cosa sempre possibile: esso taglierà ancora F in una curva d'ordine

(*) Benchè F non abbia linee doppie, le sue proiezioni potranno averne (quelle dello spazio ordinario ne avranno certamente). Orbene nell'applicare i nostri risultati relativi alle rigate proiezioni di F ogni curva d'ordine μ multipla secondo k, e quindi proiezione di una curva d'ordine $k\mu$ di F, si dovrà sempre considerare come costituente una curva dello stesso ordine $k\mu$ (ed ellittica se quella curva di F è tale).

$I\frac{n}{2}+1$, la quale può in particolare scindersi in un certo numero di generatrici ed una curva semplice d'ordine inferiore. Però se n è pari si trova facilmente su F una curva d'ordine $\frac{n}{2}$ o minore. In fatti, supposto n pari, $\frac{n}{2}-1$ generatrici fissate ad arbitrio staranno certo in un S_{n-3} e gli S_{n-2} passanti per questo tagliano ancora F in $C^{\frac{n}{2}+1}$ aventi comuni i 2 punti in cui incontrano quell' S_{n-3} fuori delle $\frac{n}{2}-1$ generatrici: tra quegli S_{n-2} i due che passano risp. per le generatrici uscenti da quei 2 punti contengono curve semplici di F d'ordine $\frac{n}{2}$ o minore. Adunque indicando con m l'ordine minimo delle curve di F, sicchè C^m indicherà una di quelle curve *minime*, sarà $2<m\leq I\frac{n+1}{2}$. Vedremo che esistono effettivamente rigate ellittiche F per cui m ha tutti i valori compresi tra quei limiti, e vedremo ciò deducendo dallo studio delle loro proprietà la loro costruzione (*).

13. Sia anzitutto $m\leq I\frac{n-1}{2}$. In tal caso F ha evidentemente una sola curva minima C^m e nessun'altra curva d'ordine $<n-m$: orbene dimostriamo che essa conterrà allora infinite C^{n-m}. Se esiste su F una C^{n-m}, un S_{n-2} per essa taglia ancora F in m generatrici incontranti la C^m nei suoi m punti d'intersezione con quell' S_{n-2}, cioè in m punti associati; e viceversa, fissate ad arbitrio m generatrici incontranti la C^m in un gruppo di punti associati, qualunque C^{n-m} di F starà con quelle in un S_{n-2}. Quelle m generatrici fisse passando per m punti di un S_{m-2} staranno in un S_{2m-2}; e gli apparterranno (giacchè se stessero in un S_{2m-3}, per questo e la C^m passerebbe un S_{2m-2} contenente una curva composta d'ordine $2m$, il che è impossi-

(*) In modo affatto analogo si giunge al risultato seguente: *ogni rigata d'ordine* n *e genere* 2 *(di uno spazio qualunque) contiene almeno una curva il cui ordine è* $\leq I\frac{n}{2}+1$, *sicchè per tali rigate l'ordine delle curve minime semplici varia dal valore* 4 *a quel limite superiore.*

sibile (n. 10)). Per quell' S_{2m-2} e per $n-2m$ punti di F scelti fuori della C^m su altrettante generatrici diverse dalle m fisse si conduca un S_{n-2}: esso taglierà F oltre che in queste m generatrici in una curva d'ordine $n-m$ passante per quegli $n-2m$ punti e che non si scinderà se le $n-2m$ generatrici su cui si scelsero quei punti non soddisfano ad una certa condizione. Notisi in fatti che se quella curva fosse composta, si scinderebbe nella C^m e quelle $n-2m$ generatrici, cioè vi sarebbe un S_{n-2} passante per la C^m, per le m generatrici fisse e per queste $n-2m$; ma per la C^m, le m generatrici fisse e $n-2m-1$ di queste (insieme d'ordine $n-1$) passa un S_{n-2} determinato (n. 10) il quale taglia ancora F in una certa generatrice che viene in tal modo determinata da quelle $n-2m-1$. Le generatrici di F dànno così una serie lineare ∞^{n-2m-1} di gruppi di $n-2m$ generatrici provenienti dall'intersezione residua di F cogli S_{n-2} passanti per l' S_{2m-1} che congiunge le m generatrici fisse alla C^m; e segue dal nostro ragionamento che se gli $n-2m$ punti testè considerati di F sono scelti ad arbitrio purchè non stiano su $n-2m$ generatrici di un tal gruppo, per essi passerà una C^{n-m} non degenere. Dal fatto poi che tutte le C^{n-m} sono determinate su F dagli S_{n-2} passanti per l' S_{2m-2} delle m generatrici fisse segue che esse sono ∞^{n-2m} e formano una serie lineare tale che le ∞^1 C^{n-m} passanti per $n-2m-1$ punti dati di F hanno ancora comune 1 stesso punto (n. 1), cioè formano *fascio*. Otteniamo così dei gruppi speciali di $n-2m$ punti su F che non individuano una C^{n-m}, ma un fascio; le $n-2m$ generatrici passanti per tali $n-2m$ punti stanno in un S_{n-2} passante per l' S_{2m-2} considerato, cioè formano appunto un gruppo della serie lineare ∞^{n-2m-1} considerata.

Quegli ∞^{n-2m-1} gruppi di $n-2m$ generatrici costituenti colla C^m delle C^{n-m} degeneri e provenienti, come s'è visto, dagli S_{n-2} condotti per la C^m e le m generatrici fisse si possono anche definire mediante una C^{n-m} dicendo che essi sono i gruppi delle generatrici incontranti una C^{n-m} di F nei gruppi di $n-2m$ punti residuali al gruppo dei punti della C^{n-m} posti sulle generatrici che escono da un gruppo qualunque di m punti associati della C^m (*).

(*) Si noti che qui non solo non facciamo uso del *Restsatz*, ma che anzi esso viene dimostrato dal nostro ragionamento per le due serie di gruppi

Notiamo infine che tutte le C^{n-m} sono punteggiate proiettivamente dalle generatrici della rigata, poichè gli S_{n-2} passanti per la C^m tagliano ancora la rigata in gruppi di $n-m$ generatrici che incontrano le C^{n-m} in gruppi di $n-m$ punti associati. Da ciò e dalla costruzione di F mediante la C^m ed una C^{n-m} si trae facilmente che essa ha due soli invarianti (assoluti), cioè il suo modulo e l'invariante della corrispondenza tra la C^m ed una qualunque delle C^{n-m}.

14. Proiettando otteniamo dal n. precedente i risultati seguenti.

Ogni rigata ellittica d' ordine n *con una curva minima d'ordine* $m \leq \frac{n-1}{2}$ *si può generare mediante due curve ellittiche di ordini* m, n — m *in corrispondenza univoca. Essa contiene* ∞^{n-2m} *curve d'ordine* n — m *formanti una serie lineare sì che per* n — 2 m *punti qualunque della rigata ne passa una sola (e pegli* n — 2 m *punti d'intersezione di due tali curve ne passa un fascio). Due qualunque di quelle curve sono in corrispondenza univoca speciale. I gruppi di* m *punti di una tal curva d'ordine* n — m *corrispondenti ai gruppi di* m *punti associati della curva minima hanno per gruppi residuali la serie lineare degli* ∞^{n-2m-1} *gruppi di* n — 2 m *punti in cui la prima curva è incontrata dalle altre curve d'ordine* n — m *ed in particolare dagli* ∞^{n-2m-1} *gruppi di* n — 2 m *generatrici che con la curva minima costituiscono le curve degeneri della serie di curve d'ordine* n — m.

In particolare nel caso estremo notevole in cui $m = \frac{n-1}{2}$ avremo:

Su una rigata ellittica d' ordine impari n *dotata di una curva minima d'ordine* $\frac{n-1}{2}$ *vi sono* ∞^1 *curve d'ordine* $\frac{n+1}{2}$,

---

di m ed $n-2m$ punti della C^{n-m} che qui compaiono come residuali l'una dell'altra. Ed anche per la corrispondenza univoca tra la C^m e la C^{n-m} otteniamo la proposizione che ai gruppi associati della C^m corrispondono nella C^{n-m} i gruppi di una serie lineare residuale di un'altra; ecc. Si ha qui nella considerazione delle rigate generate da curve punteggiate univocamente un metodo fecondo per trovare con procedimento affatto sintetico le proposizioni relative alla geometria sulle curve ellittiche (e probabilmente anche sulle curve di qualunque genere).

le quali hanno comune un punto fisso; per ogni altro punto della rigata ne passa una sola, che però se esso sta sulla generatrice uscente dal punto fisso degenera nella generatrice stessa e nella curva minima. Nella corrispondenza tra la curva minima ed una qualunque delle curve d'ordine $\frac{n+1}{2}$ *ai gruppi associati di* $\frac{n-1}{2}$ *punti della prima corrispondono nella seconda i gruppi residuali del punto fisso.*

15. $m=\frac{n}{2}$. Cerchiamo se su F in tal caso oltre alla C^m supposta, che dirò A^m, ve ne può essere un'altra. Perciò si osservi che quanto dicevamo al principio del n. 13 intorno ad una C^{n-m} vale ancora, cioè per m generatrici fisse incontranti A^m in m punti associati arbitrari di questa si può condurre un S_{n-2} contenente anche quell'altra C^m. Ora nel caso presente quelle m generatrici non possono stare in un S_{n-4} (altrimenti per esse ed A^m passerebbe un S_{n-3} contenente una curva composta d'ordine n di F); quindi o per esse passa un solo S_{n-2} o ne passa un fascio. Ogni tale S_{n-2} taglia F oltre che nelle m generatrici fisse in una C^m, la quale però potrebbe in particolare coincidere con A^m. Dunque se $m=\frac{n}{2}$ F ha in generale due curve minime C^m, distinte o coincidenti; e può anche avere una serie lineare di ∞^1 C^m sì che per ogni punto (senz'eccezione) ne passa una sola. Nel primo caso le due C^m non sono punteggiate proiettivamente; nel secondo invece due qualunque delle C^m sono punteggiate proiettivamente e le generatrici formano gruppi di m situate in S_{n-3} e incontranti tutte le C^m in gruppi di punti associati.

Da questo risultato segue subito l'esistenza e la costruzione di F quando ha due C^m distinte e quando ne ha infinite. Per vederne la costruzione nel caso in cui abbia una sola curva minima A^m ricordiamo che allora deve accadere che per m generatrici di F incontranti A^m in m punti associati passi un solo S_{n-2} e che questo contenga anche A^m. Ora si vede subito (conducendo S_{n-2} per $m-1$ generatrici) che in questo caso F conterrà infinite C^{m+1}: una di queste ha comune con A^m un punto ed è tagliata dall'S_{n-2} considerato passante per A^m in altri m punti associati con quello ed ai quali corrispondono m punti associati

di A^m. Orbene viceversa prendansi una C^m ed una C^{m+1} aventi un punto comune ed in corrispondenza univoca tale che quel punto sia unito e che ad un gruppo di m punti della C^{m+1} residuale di questo corrisponda sulla C^m un gruppo di punti associati: la rigata d'ordine n generata dalle due curve sarà appunto della specie voluta, cioè avrà per unica curva minima la C^m.

F avrà due invarianti se ha due sole curve minime distinte o coincidenti, cioè il suo modulo e l'invariante della corrispondenza tra queste curve; mentre ha unicamente per invariante il proprio modulo se contiene infinite curve minime.

In uno spazio qualunque avremo: *Una rigata ellittica d'ordine pari* n *con curva minima d'ordine* $\frac{n}{2}$ *può presentare due casi*: 1° *avere due sole tali curve, distinte od infinitamente vicine, ed allora la corrispondenza univoca tra queste non è speciale* (*è questa la specie più generale di rigate ellittiche d'ordine pari* n); 2° *contenere infinite tali curve sì che per ogni punto senz'eccezione ne passi una sola ed allora la corrispondenza univoca tra due qualunque di esse è speciale. A seconda adunque che per generare la rigata si prenderanno due curve ellittiche d'ordine* $\frac{n}{2}$ *in corrispondenza univoca generale o speciale, si presenterà il* 1° *od il* 2° *caso. Per generare poi la rigata nel* 1° *caso sì che abbia le due curve minime infinitamente vicine si può far uso di due curve ellittiche di ordini* $\frac{n}{2}$ *e* $\frac{n}{2}+1$ *punteggiate univocamente con un punto unito e in modo che ai gruppi associati di* $\frac{n}{2}$ *punti della prima corrispondano nella seconda i gruppi residuali del punto unito.*

16. $m=\frac{n+1}{2}$. In questo caso $\frac{n-1}{2}=m-1$ generatrici qualunque di F appartengono ad un S_{n-2}, poichè se stessero in un S_{n-3}, questo taglierebbe ancora le C^m intersezioni residue di F cogli S_{n-2} passanti per quello in un punto fisso e l'S_{n-2} congiungente quell'S_{n-3} alla generatrice passante per questo punto taglierebbe ancora F in una C^{m-1}. Ogni S_{n-2} che così viene individuato da uno qualunque degli ∞^{m-1} gruppi di $m-1$ generatrici determina su F come intersezione residua una C^m;

viceversa gli ∞^{m-2} S_{n-2} passanti per una C^m di F determinano su questa una serie lineare ∞^{m-2} di gruppi di $m-1$ generatrici. Ne segue che nel caso presente F avrà ∞^1 curve minime C^m: vedremo poi, come caso particolare di un'altra proposizione (n. 18), che per ogni punto di F ne passano in generale due. Notiamo inoltre che la corrispondenza tra due qualunque C^m di F non può essere proiettiva, poichè altrimenti si vedrebbe subito l'esistenza di un S_{n-3} contenente $m-1$ generatrici e quindi, come dianzi s'è visto, di una C^{m-1} su F; viceversa la rigata generata da due C^m in corrispondenza univoca non proiettiva aventi un punto unito non può contenere una C^{m-1}, e quindi appartiene alla specie che ora esaminiamo.

Da ciò si può dedurre che F ha in questo caso un solo invariante, cioè il modulo.

Proiettando avremo:

Una rigata ellittica qualunque d'ordine impari n, *appartenente alla specie più generale, cioè a quella per cui le curve minime sono d'ordine* $\frac{n+1}{2}$, *contiene* ∞^1 *tali curve sì che per ogni punto della rigata ne passano due. Ad ognuna di esse corrisponde una serie lineare* $\infty^{\frac{n-3}{2}}$ *di gruppi di* $\frac{n-1}{2}$ *generatrici, sì che ogni altra è incontrata da quella curva e da uno qualunque di questi gruppi in* $\frac{n+1}{2}$ *punti associati; in particolare la prima curva è incontrata da quei gruppi di generatrici nei gruppi di* $\frac{n-1}{2}$ *punti residuali al suo punto di contatto colla curva inviluppata da tutte le curve minime. La corrispondenza tra due qualunque di queste non è speciale, e la rigata si genera appunto mediante due curve ellittiche d'ordine* $\frac{n+1}{2}$ *in corrispondenza univoca non speciale con un punto unito* (*).

(*) Dalle rigate corrispondenti ad $m=\frac{n+1}{2}$ e $m=\frac{n}{2}$ si potrebbero dedurre come casi particolari quelle corrispondenti a valori inferiori di m; ma mi parve preferibile l'esaminare anche queste direttamente. — Si osservi inoltre che dalle costruzioni date delle rigate delle varie specie in qualunque spazio si trae immediatamente il numero dei parametri da cui esse dipendono.

Alcune proprietà.

17. È importante veder bene, qualunque sia la specie di F, a quali condizioni deve soddisfare un numero k affinchè k generatrici di F siano indipendenti, cioè appartengano ad un S_{2k-1}. Indicando sempre con m l'ordine delle curve minime, e supponendolo anzitutto $\leq \frac{n-1}{2}$ è chiaro che la C^m e k generatrici appartengono ad un S_{m+k-1} se $k < n-m$, cosicchè se inoltre $k > m$ le k generatrici non sono indipendenti; esse apparterranno allora appunto ad un S_{m+k-1} contenente la C^m. Se $k = m$ e le m generatrici incontrano la C^m in m punti associati, esse non saranno indipendenti, ma apparterranno ad un S_{2m-2} (v. n. 13). Se poi $k \leq m$ e, ove fosse precisamente $k = m$, se i punti d'incontro delle k generatrici con la C^m non sono associati, le k generatrici sono indipendenti, poichè se stessero in un S_{2k-2}, siccome i k punti comuni a questo ed alla C^m sarebbero indipendenti, vi sarebbe un S_{m+k-2} contenente la C^m e le k generatrici, il che è impossibile (n. 10). — Nel caso di $m = \frac{n}{2}$ (v. n. 15) m generatrici qualunque sono indipendenti, tranne se incontrano una C^m in punti associati, chè allora, secondo che si ha la 1ª o la 2ª delle due specie di F considerate in quel caso, quelle generatrici appartengono ad un S_{n-2} o ad un S_{n-3}; quindi, per $k < m$, k generatrici sono sempre indipendenti. — Quest'ultimo fatto vale anche nel caso di $m = \frac{n+1}{2}$ (v. il principio del n. 16). — Concludendo: *Se* $k < m$, k *generatrici di* F *sono sempre indipendenti, cioè appartengono ad un* S_{2k-1}. *Se* $k = m$, *esse sono ancora indipendenti in generale per* $m \leq \frac{n}{2}$ *ed appartengono ad un* S_{2k-1} *passante per la curva minima; però se esse incontrano una curva minima in punti associati esse appartengono ad un* S_{2m-2}, *e solo se in questa stessa ipotesi si ha la* 2ª *delle due specie corrispondenti ad* $m = \frac{n}{2}$ *esse appartengono ad un* S_{2m-3}. *Se* $k > m$ *le* k *generatrici non sono più indipendenti ed appartengono ad uno spazio contenente ogni curva minima.*

Da ciò segue quest'altra proposizione: *Un* S_{n-3} *passante per* k *generatrici di* F *incontra ancora questa in generale in* $n-2k$ *punti isolati*, *se* $k<m$, *ed anche se* $k=m$ *purchè* $\left(m<\frac{n-1}{2}\ e\right)$ *quelle generatrici incontrino la* C^m *in punti associati*. Infatti allora lo spazio a cui appartengono le k generatrici non conterrà alcuna curva di F e un S_{n-2} condotto ad arbitrio per l'S_{n-3} considerato darà come intersezione con F oltre alle k generatrici una curva d'ordine $n-k$ incontrante l'S_{n-3} oltre che in k punti di quelle in altri $n-2k$ punti isolati.

18. Possiamo vedere facilmente quali curve d'ordine $<n$ contenga F a seconda della sue specie, oltre a quelle già considerate. Se è $m=2$, cioè se vi è una retta doppia, quelle curve sono, oltre alle ∞^{n-4} C^{n-2} trovate, le ∞^{n-2} C^{n-1} che si ottengono segando F con S_{n-2} passanti per una generatrice variabile.

Sia poi $m>2$, e indichiamo con μ un numero qualunque minore di n ma maggiore di $n-m$. Una C^μ di F appartenendo ad un $S_{\mu-1}$ starà con $n-\mu-1$ generatrici fisse in un S_{n-2} determinato, il quale taglierà ancora F in una certa generatrice. Adunque per avere tutte le C^μ di F basta condurre tutti gli S_{n-2} passanti per quelle $n-\mu-1$ generatrici fisse ed una variabile. Siccome $n-\mu$ generatrici sono indipendenti e ogni S_{n-2} condotto per esse non contiene più in generale altre generatrici, tranne quando lo spazio a cui quelle appartengono contiene ancora un'altra generatrice, il che si verifica solo per $m=\frac{n}{2}$, 2ª specie, se $\mu=m+1$, così escludendo questo caso, ogni gruppo costituito dalle $n-\mu-1$ generatrici fisse e da un'altra generatrice ci dà realmente $\infty^{2\mu-n-1}$ C^μ e quindi in totale vediamo che, se μ soddisfa alle dette condizioni, vi sono su F $\infty^{2\mu-n}$ C^μ.

Per $2\mu-n$ punti qualunque di F passano in generale due C^μ, le quali si costruiscono così. Conducasi un S_{n-3} per le $n-\mu-1$ generatrici fisse e per quei punti: esso taglierà ancora F (n. 17) in 2 punti; i due S_{n-2} passanti per quell'S_{n-3} e rispettivamente per le generatrici uscenti da questi 2 punti taglieranno ancora F secondo le due C^μ cercate. — Considerando anche le curve d'ordine n sezioni di F cogli S_{n-2} e proiettando abbiamo:

Una rigata ellittica qualunque d'ordine n *dotata di curve minime d'ordine* m *contiene, oltre alle curve già considerate nei n^i* 14, 15, 16, *una serie quadratica di* $\infty^{2\mu-n}$ *curve ellittiche d'ordine* μ *per ogni valore di* μ *minore di* n *e maggiore di* n — m, *escludendo però nel caso delle rigate aventi infinite curve minime d'ordine* $\frac{n}{2}$ *il valore* $\mu = \frac{n}{2} + 1$. *In tal modo si hanno tutte le curve d'ordine* $<$n *della rigata. Vi sono poi inoltre su questa* ∞^{n-1} *curve ellittiche d'ordine* n *incontranti ogni generatrice in un sol punto e formanti una serie lineare, sì che per* n—1 *punti qualunque della rigata ne passa in generale una sola, mentre due qualunque di esse si tagliano in* n *punti pei quali ne passa un fascio. Ogni curva d'ordine* $<$n *della rigata è tagliata da tutte quelle curve d'ordine* n *nella serie dei suoi gruppi di punti associati.*

19. Per conoscere tutte le curve d'ordine $< n$ situate sulle rigate ellittiche d'ordine n ci resta da cercare se su F oltre alle curve d'ordine n già considerate, sezioni di F cogli S_{n-2}, non vi siano anche curve d'ordine n appartenenti ad S_{n-1}, cioè ellittiche normali, vale a dire delle C^n. Si vede anzitutto facilmente (valendosi ad esempio della proposizione nota che ogni C^n è l'intersezione completa di infinite M_{n^2-2}) che, se vi è su F una C^n, questa dovrà esser incontrata da ogni generatrice di F in due punti, sicchè su essa le generatrici di F determineranno una corrispondenza univoca. Ora (*) in una C^n le rette congiungenti punti che si corrispondano in una corrispondenza univoca formano una rigata ellittica d'ordine n nel solo caso in cui la corrispondenza univoca sia una *corrispondenza di* 2ª *specie* (involutoria, cioè) *principale* e la rigata ellittica che in tal caso si ottiene ha per curve minime, se n è pari, due $C^{\frac{n}{2}}$ distinte punteggiate *non* proiettivamente dalle generatrici, e se n è impari (non potendo contenere una curva d'ordine $\leq \frac{n-1}{2}$, poichè altrimenti sulle generatrici poste in un S_{n-2} passante per questa si avrebbe un numero $\geq \frac{n+1}{2}$ di coppie di punti della C^n) infinite $C^{\frac{n+1}{2}}$; essa ha poi sempre un solo invariante, cioè quello della C^n.

(*) Veggasi il mio lavoro sulle curve ellittiche già citato.

Supponiamo anzitutto n pari. Noi vediamo che allora F non contiene in generale alcuna C^n, e solo quando F appartiene alla specie più generale, cioè ha due sole curve minime distinte d'ordine $\frac{n}{2}$, essa, ove i suoi invarianti soddisfino ad una certa condizione, viene a contenere una C^n. Essa ne contiene anzi in tal caso una serie lineare ∞^1, la quale si ottiene da una delle C^n stesse trasformandola colle ∞^1 omografie aventi per *assi* (di punti doppi ed S_{n-2} doppi) gli $S_{\frac{n}{2}-1}$ cui appartengono le due $C^{\frac{n}{2}}$ (*). Da tutto ciò si è condotti alla proposizione seguente:

Le rigate ellittiche d'ordine pari n *non contengono in generale altre curve ellittiche d'ordine* n *che le* ∞^{n-1} *già considerate; solo se una tal rigata ha due sole curve minime distinte d'ordine* $\frac{n}{2}$ *essa può particolarizzandosi venir a contenere una curva ellittica d'ordine* n *incontrante in due punti ogni generatrice. Allora essa contiene* ∞^1 *tali curve d'ordine* n *(tra cui si possono anche considerare le due curve minime contate doppiamente) sì che per ogni punto della rigata ne passa una sola e che sulle varie generatrici le coppie di punti d'intersezione con quelle curve costituiscono varie involuzioni proiettive (coi punti doppi sulle curve minime).*

Poniamo ora che n sia impari e che F appartenga alla specie più generale. Le ∞^1 curve minime d'ordine $\frac{n+1}{2}$ che F conterrà in tal caso formeranno evidentemente una serie ellittica (poichè corrispondono univocamente ai punti in cui incontrano una qualunque di esse). Facendo corrispondere in questa serie due curve qualunque che s'incontrino su una generatrice fissa di F si ha una corrispondenza di 1ª specie, e così le ∞^1 generatrici dànno le ∞^1 corrispondenze di 1ª specie. Invece considerando nella stessa serie di curve una corrispondenza di 2ª specie principale e ricordando che questa, pure essendo involutoria come tutte le

(*) Ciò si accorda col fatto che tanto una C^n (n. 7) quanto la rigata F più generale dipendono da n^2 parametri; sicchè, se n è pari, F deve soddisfare ad una condizione affine di contenere una C^n, appunto perchè se ne contiene una ne contiene infinite.

corrispondenze di 1ª specie, non ha elementi doppi (mentre ciascuna di quelle ne ha 4), si vede che il luogo dei punti d'intersezione delle curve corrispondenti sarà una curva semplice incontrata da ognuna delle curve minime in un sol punto e da ogni generatrice in due punti (cioè nei due punti doppi della corrispondenza (2, 2) che su quella retta è determinata dalle intersezioni colle coppie di curve corrispondenti, e per conseguenza, come se ne deduce facilmente, una C^n. Viceversa si scorge pure subito che facendo corrispondere due curve minime che variino incontrandosi sempre su una C^n di F, si ha una corrispondenza di 2ª specie principale nella serie ellittica delle curve minime. Dunque su F esistono tre sole C^n, le quali sono prodotte dalle tre corrispondenze di 2ª specie principali. Proiettando:

Le rigate ellittiche d'ordine impari n *contengono oltre alle* ∞^{n-1} *già considerate altre curve ellittiche d'ordine* n, *solo quando appartengono alla specie più generale, cioè hanno per curve minime infinite curve d'ordine* $\frac{n+1}{2}$. *Una tàl rigata contiene allora tre (sole) curve ellittiche d'ordine* n *incontranti in due punti ogni generatrice ed in un sol punto ogni curva minima; ciascuna di quelle tre curve è il luogo dei punti d'intersezione delle curve minime corrispondenti in una delle tre corrispondenze di* 2ª *specie principali della serie ellittica costituita dalle curve minime* (*).

Rappresentazione delle rigate ellittiche sul cono cubico.

20. Fissiamo su F k generatrici g qualunque, essendo k un numero soggetto alle condizioni che s'incontreranno; e conduciamo un S_{n-2} per esse e per altre 3 generatrici (donde una prima condizione, cioè che $k+3$ generatrici stiano in un S_{n-2}).

(*) Aggiungiamo ancora riguardo a quella rigata che *l'inviluppo delle infinite curve minime è una curva ellittica d'ordine* $2n-1$ *incontrata da tutte le generatrici della rigata in quaterne di punti aventi per rapporto anarmonico il modulo della rigata (o della curva).*

Esso taglierà ancora F in una curva d'ordine $n-k-3$, semplice o composta, che indicherò con A^{n-k-3} e che con le g apparterrà ad uno spazio R_{n-4}. Conduciamo entro questo uno spazio O_{n-5} passante per le g: taglierà ancora A^{n-k-3} in $n-2k-3$ punti P posti fuori di quelle. Orbene dico che proiettando F da O_{n-5} su uno spazio ordinario R'_3, la proiezione sarà generalmente univoca, vale a dire un S_{n-4} proiettante un punto di F posto fuori di R_{n-4} non conterrà in generale un altro tal punto. Supponiamo infatti che un S_{n-4} passante per O_{n-5} e diverso da R_{n-4} contenga due punti di F posti fuori di O_{n-5}. L'S_{n-3} congiungente quell'S_{n-4} ad R_{n-4} non può contenere di F una curva composta d'ordine $>n-2$; ma esso contiene A^{n-k-3} e le k generatrici g, e dovrebbe inoltre contenere le generatrici passanti pei due punti considerati di F: dunque questi staranno su una stessa generatrice, giacente nell'S_{n-4} ed incontrante perciò A^{n-k-3} in un punto di O_{n-5}, vale a dire in uno dei punti P. Dunque effettivamente la proiezione che così si ottiene di F su R'_3 è univoca, fatta solo eccezione per le $n-2k-3$ generatrici p di F passanti pei punti P, ciascuna delle quali è proiettata in un sol punto P'.

Ora un S_{n-3} condotto ad arbitrio per O_{n-5} taglia F oltre che nelle k generatrici g in $n-2k$ punti (purchè k soddisfi ad una certa condizione; v. n. 17): di questi $n-2k-3$ sono nei punti fissi P, e solo i rimanenti 3 sono variabili. Di più le generatrici di F incontrando tutte A^{n-k-3}, e quindi R_{n-4}, sono tutte proiettate su R'_3 secondo rette passanti pel punto A' intersezione di R'_3 con R_{n-4}. Dunque *la rigata* F *viene così proiettata univocamente su un cono cubico, al cui vertice* A' *corrisponde sulla rigata la curva* A^{n-k-3}.

Le condizioni a cui deve soddisfare k (cioè di non superare un certo limite, dipendente dalla specie di F) risulterebbero subito da questo ragionamento, valendosi dei risultati del n. 17; così per la specie più generale di F corrispondente ad n dispari, cioè per $m=\frac{n+1}{2}$, il massimo valore che possa raggiungere k è $\frac{n-7}{2}$, mentre per la specie più generale corrispondente ad n pari e quindi $m=\frac{n}{2}$ il massimo di k è $\frac{n}{2}-3$.

21. Considerando ogni rigata ellittica d'ordine n di qualunque spazio come proiezione di F, noi ne abbiamo in tal modo varie

rappresentazioni univoche sul cono cubico ordinario, e possiamo trovare immediatamente le loro proprietà. Così: *Sulla rigata vi sono* (come su F) $n-2k-3$ *punti fondamentali* P *a cui corrispondono sul cono cubico altrettante generatrici* p', *mentre su queste vi sono* $n-2k-3$ *punti fondamentali* P' *del cono ai quali corrispondono sulla rigata le generatrici* p *passanti pei punti* P; *inoltre è fondamentale per la rappresentazione il vertice del cono poichè gli corrisponde sulla rigata una curva d'ordine* $n-k-3$.

La rappresentazione è d'ordine $n-k$. Più precisamente: alle cubiche sezioni piane del cono corrispondono in F le C^{n-k} intersezioni residue cogli S_{n-2} passanti per O_{n-5} e quindi più in generale in qualunque rigata ellittica d'ordine n delle curve d'ordine $n-k$ passanti pegli $n-2k-3$ punti fondamentali P. Alle ∞^{n-1} curve d'ordine n della rigata incontranti ogni generatrice una volta sola (cioè alle sezioni di F con S_{n-2}) corrispondono nel cono curve d'ordine $n-k$ passanti pegli $n-2k-3$ punti fondamentali P' ed aventi nel vertice del cono un punto multiplo secondo $n-k-3$: queste curve ellittiche formano un sistema tale che per $n-1$ altri punti del cono ne passa in generale una sola. In particolare, se si considera la rappresentazione di una rigata ellittica dello spazio ordinario, le sue sezioni piane saranno rappresentate da un sistema lineare ∞^3 di quelle curve d'ordine $n-k$ del cono cubico.

Si scorge poi subito come si rappresentano le curve d'ordine $<n$ della rigata sul cono cubico, e in generale dalle proprietà già dimostrate della rappresentazione si trarrà facilmente quali curve sulla rigata o sul cono cubico corrispondano a curve date del cono cubico o della rigata, ed inoltre quali particolarità si presentano in certe rappresentazioni d'ordine minimo (corrispondenti al valor massimo di k), ecc., ecc.

Torino, maggio 1886.

Nota. — In un prossimo lavoro mostrerò come si estendano vari risultati di questo alle curve ed alle rigate di genere qualunque. Da esso si vedrà che al n. 6, lin. 7 e 10 in luogo di *almeno* ci voleva ancora *esattamente*, e alla lin. 13 in luogo di S_{n-2} ci voleva S_{n-3}; per conseguenza nella nota alla fine del n. 12 in luogo di $I\frac{n}{2}+1$, leggasi $I\frac{n+1}{2}+1$. Infine anche nella 2ª parte del n. 6 occorrerebbe qualche modificazione. (Luglio 1886).

SULLA RAPPRESENTAZIONE

DELLE

FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA

PER MEZZO DI ESPRESSIONI ANALITICHE INFINITE

del Dott. G. Morera

È oggidì ben noto che le serie ed i prodotti infiniti, quand'anche costituiti con funzioni analitiche della variabile indipendente complessa, non sono sempre atti a rappresentare dovunque nel loro campo di convergenza funzioni analitiche (*).

Di qui la necessità di stabilire criteri sufficienti affinchè le espressioni analitiche infinite rappresentino effettivamente *funzioni nel senso Riemanniano*, cioè funzioni *monogene* nel senso di Cauchy (**).

In questo breve scritto mi occupo appunto di tale questione, presentando alla R. Accademia risultati, che, se non erro, sono notevoli per semplicità di deduzione e generalità.

§ 1.

Un teorema utilissimo nelle ricerche che ho in vista è *quello reciproco del teorema di Cauchy*, da me pubblicato nei Rendiconti dell' Istituto Lombardo per l'annata corrente colla mia nota: *Un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di una variabile complessa.*

(*) Cfr. Weierstrass, *Zur Functionenlehre* (Monatsberichte der Berliner Akademie. August 1880). Questa memoria trovasi ristampata a p. 67 delle *Abhandlungen aus der Functionenlehre* dello stesso matematico.

(**) Cfr. *La teorica delle funzioni di variabili complesse* del sig. Casorati, specialmente al § 29.

Credo opportuno di qui riferire questo teorema.

Se una variabile complessa w *è legata in tal guisa alla variabile complessa indipendente* z, *che in un certo campo* T *per la* z, *dove la prima resta monodroma, continua e finita, l'integrale*

$$\int w\, dz\ ,$$

esteso all'intero contorno di una porzione qualsivoglia di T *risulta sempre nullo, allora* w *è funzione di* z *dovunque in* T.

Se T non è semplicemente connesso lo potremo rendere tale con un certo numero di tagli, o più generalmente, imaginiamo per mezzo di tagli di avere scomposto T in un certo numero di parti tutte semplicemente connesse. Sia C una di queste parti e z_0 un punto fisso nell'interno di C. Allora, dinotando con z un punto variabile di C, l'integrale

$$W = \int_{z_0}^{z} w\, dz$$

esteso a partire da z_0, lungo una linea qualunque tracciata in C, fino al punto z, è una *funzione* di z. Infatti: il valore di W è indipendente dalla linea d'integrazione, giacchè estendendo l'integrazione ad una linea chiusa si ottiene per supposto sempre zero; inoltre, essendo w continuo, si ha senz'altro:

$$\frac{dW}{dz} = w\ .$$

Dunque W è in C una funzione monodroma, continua e finita, e questo basta per concludere che essa ammetterà per derivate di tutti gli ordini altrettante funzioni monodrome, continue e finite. In particolare w sarà una tale funzione. Si vede così che w è funzione di z dovunque in T.

Consideriamo ora una variabile complessa dipendente w definita come *limite di un'espressione analitica*. Per esempio:

$$w(z) = \lim_{n=\infty} \varphi\,(n_1, n_2, \ldots; z)$$

dove le n sono, per fissare le idee, numeri interi e positivi che crescono indefinitamente secondo l'ordine naturale:

$$1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè il limite considerato w esista è notoriamente (*) che, assegnato un arbitrariamente piccolo σ, sia possibile di determinare certi numeri N_1, N_2, ... per le n_1, n_2 .... tali che risulti:

$$\left|\varphi(N_1+p_1+q_1,\ N_2+p_2+q_2,\ \ldots;\ z)-\varphi(N_1+p_1,\ N_2+p_2,\ \ldots;\ z)\right|<\sigma$$

qualunque sieno gli interi positivi:

$$p_1,\ q_1;\ p_2,\ q_2;\ \ldots\ldots$$

Se inoltre, *facendo variare a piacimento la* z *nel campo* T *si possono ancora trovare dei numeri fissi* N_1, N_2 ....., *che godono della proprietà indicata per ogni valore della* z, *allora si dice che l'espressione* $\varphi(n_1, n_2, \ldots; z)$ *è uniformemente convergente in* T.

Ciò premesso, coll'uso del teorema inverso di quello di Cauchy si dimostra facilmente il seguente *teorema generale*:

Se le espressioni $\varphi(n_1, n_2, \ldots; z)$ *restano monodrome, continue e finite in un campo* T, *almeno per tutti i valori delle* n_1 *al di là di certi numeri finiti, e se inoltre in* T *l'espressione* $\varphi(n_1, n_2, \ldots; z)$ *converge uniformemente, allora*

$$w=\lim_{n=\infty}\varphi(n_1,\ n_2,\ \ldots;\ z)$$

rappresenta una funzione monodroma, continua e finita della z *nell'interno di* T.

Si vede molto facilmente che nelle condizioni indicate la variabile complessa w varia con continuità al variare della z.

Infatti, scelti per N_1, N_2, N_3 ..... numeri opportunamente grandi, si potrà avere:

$$w(z)=\varphi(N_1,\ N_2,\ \ldots;\ z)+\sigma_{N_1,N_2,\ldots}(z) \qquad \ldots(1),$$

dove

$$\left|\sigma_{N_1,N_2\ldots}(z)\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

qualunque sia z nel campo T e comunque piccolo siasi assunto ε.

(*) Cfr. P. Du Bois-Reymond, *Die allgemeine Functionentheorie* (Tübingen, 1882), a pag. 6 e 258.

Allora essendo $\varphi(N_1, N_2, \ldots\ldots; z)$ una funzione continua si può sempre assegnare un limite superiore r al modulo dell'accrescimento h della z, in guisa che per $|h| \leq r$ risulti:

$$\left| \varphi(N_1, N_2, \ldots; z+h) - \varphi(N_1, N_2, \ldots; z) \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

e così per $|h| \leq r$ avrà sempre luogo la disuguaglianza

$$\left| w(z+h) - w(z) \right| < \varepsilon .$$

E con questo la continuità di w resta provata.

Se s designa la lunghezza del contorno di una porzione qualsiasi di T, che supponiamo finita, integrando lungo tutto questo contorno dalla (1) si ha ovviamente:

$$\left| \int w\, dz \right| < \frac{\varepsilon}{3} \int \left| dz \right| ,$$

ossia

$$< \frac{s\,\varepsilon}{3} :$$

ma ε è arbitrariamente piccolo, dunque

$$\int w\, dz = \lim_{n=\infty} \int \varphi(n_1, n_2, \ldots; z)\, dz = 0 .$$

Applicando alla w il teorema reciproco di quello di Cauchy, si conchiude immediatamente il teorema generale enunciato.

È quasi superfluo di notare che questo teorema contiene come casi particolarissimi i noti teoremi sulle serie e sui prodotti infiniti (*).

§ 2.

La considerazione degli integrali curvilinei conduce a teoremi importanti, che gettano molta luce nella nostra questione.

Ammettiamo solamente che *sul contorno del campo* T, nell'interno del quale le φ, almeno per valori delle n_i al di là di certi limiti finiti, sono funzioni monodrome, continue e finite,

(*) Cfr.: Weierstrass, l. c.;
Mittag-Leffler, *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes.* Acta mathematica, t. IV, fasc. 1, p. 31.

l'espressione $\varphi(n_1, n_2, \ldots\ldots; z)$ *sia uniformemente convergente.* Questo basta per dimostrare il *teorema* importante che:

$$\lim_{n=\infty} \varphi(n_1, n_2, \ldots\ldots; z)$$

rappresenta una funzione monodroma continua e finita dappertutto nell'interno di T.

Designando con x il valore variabile della z sul contorno di T e partendo da un'equazione analoga alla (1), si dimostra con tutta facilità che per un punto z interno di T si avrà:

$$\int \frac{w(x)\,dx}{(x-z)^{\mu+1}} = \lim_{n=\infty} \int \frac{\varphi(n_1, n_2, \ldots; x)\,dx}{(x-z)^{\mu+1}},$$

dove μ indica un intero positivo qualunque e l'integrazione si estende a tutto il contorno di T.

Ma per $\mu = 0$ si ha, per un notissimo teorema di Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{w(x)\,dx}{x-z} = \lim_{n=\infty} \varphi(n_s, n_z, \ldots; z),$$

ossia: *l'espressione* $\varphi(n_1, n_2, \ldots\ldots; z)$ *è convergente anche per tutti i punti interni del campo* T *e convergente uniformemente.* Posto:

$$w(z) = \lim_{n=\infty} \varphi(n_1, n_2, \ldots; z)$$

sarà:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{w(x)\,dx}{x-z};$$

ossia $w(z)$ è una funzione monodroma, continua e finita (*).

Nello stesso modo per μ qualunque si conclude:

$$\frac{d^\mu w(z)}{dz^\mu} = \lim_{n=\infty} \frac{d^\mu}{dz^\mu} \varphi(n_1, n_2, \ldots; z) \qquad \ldots \quad (2),$$

(*) L'essere $w(x)$ continua e finita e $|x-z|>0$ basta a legittimare l'asserzione qui fatta, ma non è lecito di concluderne che, quando la z si accosta al contorno, debba essere: $\lim_{z=x} w(z) = w(x)$. Invero i valori di una funzione di variabile complessa al contorno di T *non possono essere assunti arbitrariamente.*

e *tutte queste espressioni sono uniformemente convergenti nell'interno di* T a distanza comunque piccola dal contorno.

Di qui segue in particolare che qualunque *serie di funzioni* tutte monodrome, continue e finite in un campo T, sul contorno del quale la serie converge uniformemente, rappresenta una funzione monodroma, continua e finita nell'interno di T e che quanto alla differenziazione ed all'integrazione la serie può essere trattata come le somme di un numero finito di termini (*).

Del pari per un *prodotto infinito*, i cui fattori elementari sono funzioni monodrome, continue e finite dovunque in T ed il quale *converge uniformemente sul contorno di* T, si può concludere che: *nell'interno dello stesso campo* T *il prodotto infinito converge uniformemente e rappresenta una funzione monodroma, continua e finita.*

Sia

$$w = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

un prodotto infinito nelle condizioni testè definite; allora applicando il teorema generale espresso dalla formula (2) abbiamo:

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{n=\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{n} f_i(z) \times \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'(z)}{f_i(z)} \right\}$$

$$= w \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)} ,$$

sempre quando w e le $f_j(z)$ siano tutte diverse da zero: e però *la serie* $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j'}{f_j}$ *dovrà certamente convergere uniformemente* (**).

(*) Cfr. VOLTERRA, *Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa.* Annali di matematica, S. II, t. XI, al § XIX.

(**) Si noti che per la nostra definizione di convergenza può essere: $w = 0$, quand'anche tutti i fattori elementari siano diversi da zero. Ma pei prodotti infiniti conviene restringere la definizione in modo da evitare il limite zero, il che può farsi molto agevolmente per un'espressione infinita qualunque, definendo la convergenza per mezzo della condizione:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n_1+p_1,\ n_2+p_2,\ \ldots\ ;z)}{\varphi(n_1,\ n_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots ;z)} = 1 .$$

(Cfr. DU BOIS-REYMOND, l. c., a pag. 264).

Infine, la considerazione della convergenza uniforme delle successive ridotte per una frazione continua ci condurrà ad enunciare anche per queste espressioni un teorema analogo.

Il nostro processo di dimostrazione del teorema generale non richiede in fondo che l'integrabilità dell'espressione limite sul contorno del campo T, cioè che resti valida la formula:

$$\int \frac{w(x)\,dx}{x-z} = \lim_{n=\infty} \int \frac{\varphi(n_1, n_2, \ldots\ldots; z)}{x-z}\,dx\,.$$

Orbene, si riconosce agevolmente che il teorema può essere esteso; per esempio, a tutti quei casi *in cui la convergenza uniforme della φ venga a mancare in un gruppo di punti di* 1ª *specie* (*) *del contorno.*

Ma se nel campo T le $\varphi(n_1, n_2, \ldots; z)$ anche per valori grandissimi delle $n_1, n_2 \ldots$ non sono tutte finite, non si possono più trarre le conclusioni precedenti ed allora il limite può mancare, oppure rappresentare una funzione discontinua.

Per esempio: la ben nota serie

$$w(2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z}{(1+iz)(1+(i-1)z)} = \lim_{n=\infty} \frac{nz}{1+nz}$$

converge uniformemente lungo qualsivoglia contorno sul quale non cade il punto $z=0$, ma il polo dell'espressione $\frac{nz}{1+nz}$ al crescere indefinito di n si accosta indefinitamente al punto $z=0$. Sicchè la serie dianzi ricordata rappresenta certamente una funzione monodroma, continua e finita in qualunque campo in cui non cada il punto $z=0$. E questo è notissimo, giacchè w è sempre eguale ad 1 al di fuori del punto $z=0$, ma in questo punto essa è discontinua ed assume il valore 0.

Differenziando termine a termine la serie precedente, se ne ottiene un'altra dovunque convergente tranne il punto $z=0$, dov'essa diverge.

Può ancora presentarsi il caso che la $\varphi(n_1, n_2, \ldots\ldots; z)$ ammetta parecchi campi di convergenza uniforme *senza alcuna*

(*) Cfr. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* (Pisa, 1878), sovratutto a proposito dell'integrazione per serie (p. 384 e seg.).

connessione fra loro. In tal caso $w(z) = \lim_{n=\infty} \varphi(n_1, n_2, \ldots; z)$ rappresenta in ciascuno dei detti campi una funzione monodroma, continua e finita della z, ma le funzioni così rappresentate saranno, generalmente parlando, affatto distinte le une dalle altre, cioè non saranno rami di una stessa funzione (*).

Pavia, 8 giugno 1886.

(*) Cfr. la già citata memoria del sig. WEIERSTRASS, *Zur Functionenlehre*.

DI UNA ANALOGIA

FRA LA

TEORICA DELLE VELOCITÀ

E LA

TEORICA DELLE FORZE

del Dott. Enrico Novarese

Die Geometrie der Streckensysteme ... als eines der kräftigsten Hülfsmittel der Mechanik angesehen werden muss.

Schell.

Il presente lavoro trae origine da un passo del *Cours de Mécanique et Machines* del Bresse uscito in luce l'anno scorso (Paris, Gauthier-Villars, 2 vol.). Il passo, a cui alludo, è il seguente (Tome I, p. 389): « Il est impossible de ne pas remarquer la complète analogie qui existe entre les théorèmes.... sur la composition des forces et des couples, et ceux qu'on a établis dans la Cinématique, sur la composition des mouvements d'un solide invariable. A chaque propriété des forces répond une propriété analogue des axes représentatifs des rotations, et chaque propriété des axes représentatifs des couples répond de même à une propriété semblable des translations. Ainsi, par exemple, les rotations représentées par des axes concourants ou parallèles se composent suivant les mêmes règles que les forces concourantes ou parallèles; les translations se composent comme les axes des couples; un système quelconque de forces et de couples est réductible à deux forces non situées dans un même plan, comme un système quelconque de mouvements se ramène à deux rotations n'ayant pas leurs axes dans un même plan; l'axe central des moments est l'analogue de l'axe central du mouvement, etc., etc.

Il ne semble pas d'ailleurs qu'on puisse établir cette analogie directement, au moyen de quelque raison philosophique, par laquelle on serait dispensé de faire une des deux théories après avoir fait l'autre ». Ora a me sembra che quest'analogia si possa benissimo stabilire *a priori* e spiegare in modo soddisfacente, col far vedere che le due teorie, onde si tratta, non sono già due teorie essenzialmente distinte, ma sibbene il risultato dell'applicazione a due diverse questioni meccaniche di una medesima teoria geometrica. Sicchè mi pare che non si dovrebbe già esporre una delle due teoriche, ed esimersi dal fare l'altra, deducendola dalla prima, ma piuttosto si dovrebbero ricavare entrambe dalla teoria geometrica accennata. È questa una parte di quella dottrina recente, che i Tedeschi chiamano *Geometrie der Streckensysteme*, e che io dirò la *Geometria dei sistemi di segmenti* (rettilinei); più precisamente è quel capitolo di essa, il quale studia l'*Equivalenza dei sistemi di segmenti*.

La maggior parte di questo scritto è dedicata appunto a svolgere il concetto che ho enunciato: l'ultimo paragrafo poi contiene una ricerca cinematica, che si collega intimamente con quanto precede, ed il cui risultato, d'altronde, può servir di base allo studio di un importante problema cinetico.

§ 1.

Anzitutto, mi sia concesso di stabilire alcune denominazioni e di riassumere i teoremi principali che appartengono alla teoria geometrica summentovata.

Di un *segmento di retta* (*) dato nello spazio considero la *lunghezza*, la *direzione*, il *verso* e la posizione di uno degli estremi, p. es. del *punto iniziale*. La retta indefinita, sulla quale giace il segmento, chiamo *linea di posizione* di esso. Dico *caratteristiche* del segmento rispetto a tre assi coordinati le sue tre proiezioni sugli assi, ed i suoi tre momenti rispetto agli assi medesimi; queste sei caratteristiche sono legate fra di loro da una ben nota relazione. Chiamo *sistema di segmenti* l'insieme

(*) D'ora innanzi dirò *segmento* senz'altro, sottintendendo sempre che si tratta di un segmento di retta.

di quanti si vogliano segmenti comunque disposti nello spazio; e chiamo *caratteristiche* di un dato sistema le somme algebriche delle caratteristiche omologhe di tutti i segmenti che lo costituiscono. Dico *equivalenti* due sistemi tali che le caratteristiche dell' uno siano rispettivamente uguali alle caratteristiche omologhe dell' altro; e dico *ridurre* un sistema dato ad un altro il sostituire a quello un sistema equivalente composto di un numero minore di segmenti. — Ciò premesso, ricordo che si dimostrano le seguenti proposizioni:

Due segmenti, i quali abbiano la stessa linea di posizione, la stessa lunghezza e lo stesso verso, sono equivalenti.

Un sistema di segmenti, le cui linee di posizione concorrano in un medesimo punto, è equivalente ad un segmento, la cui linea di posizione passi per quel punto, ed il quale sia equipollente alla somma geometrica de' segmenti proposti.

E questo è vero anche se quel punto di concorso sia all'infinito, fatta eccezione però pel caso contemplato nel capoverso seguente:

Un sistema di due segmenti uguali, paralleli e di versi opposti, cioè una *coppia di segmenti*, è irreducibile ad un segmento non nullo; esso si può per altro trasformare in infiniti modi in un'altra coppia (equivalente alla prima), purchè rimanga invariato in grandezza, direzione e verso il *segmento rappresentativo (axe représentatif, Axenmoment)* della coppia.

Un sistema qualunque di segmenti è riducibile in un numero infinito di modi ad un segmento *(principale)* e ad una coppia *(principale)*. Si può prendere ad arbitrio o un punto della linea di posizione del segmento principale, ovvero la *giacitura* del piano della coppia principale. Comunque si effettui questa riduzione, è costante il prodotto geometrico del segmento principale pel segmento rappresentativo della coppia principale. Questo prodotto costante denomino *invariante* del sistema.

Un sistema qualunque di segmenti è riducibile in un'infinità di maniere a due segmenti, le cui linee di posizione non giacciano in un medesimo piano. Si può scegliere ad arbitrio una di queste due rette, purchè non si prenda per essa un raggio del complesso lineare, di cui sarà fatto cenno più innanzi. Comunque si compia tale riduzione, è costante il volume del tetraedro avente per due spigoli opposti quei due segmenti; e il sestuplo di tal volume costante è misurato dall' invariante del sistema.

In particolare, se l'invariante è nullo, il sistema è riducibile o ad un segmento unico, o ad una coppia, o ad un segmento di lunghezza zero e ad una coppia di momento zero (sistema *equivalente a zero*, *equivalent Null*). In ognuno di questi casi dico che il sistema è *speciale*.

Ogni sistema di segmenti individua un complesso lineare di rette. La linea di posizione del segmento principale è un diametro del complesso, il piano della coppia principale è uno dei piani diametrali coniugati a tal diametro. Le linee di posizione dei due segmenti, ai quali può ridursi il sistema, sono rette coniugate rispetto al complesso. L'invariante del sistema rappresenta l'invariante del complesso: quando il sistema è speciale, il complesso è speciale, e viceversa.

Ho creduto bene di dare un riassunto generale della teorica dell'equivalenza dei sistemi di segmenti, invece di limitarmi ad un semplice accenno, non tanto perchè intenda di servirmi, in ciò che segue, di tutte queste proposizioni, quanto perchè, una volta dimostrata l'applicabilità di tale teorica alla Dinamica ed alla Cinematica, risulti più luminosamente che ne conseguono subito ed in tutte le loro parti le due teorie meccaniche, alle quali si riferiscono le riflessioni del Bresse. Vediamo dunque di stabilire tale applicabilità.

§ 2.

Per ciò che riguarda la teorica delle forze, la cosa è affatto ovvia. Invero, un sistema di forze applicate ai punti di un corpo qualsiasi, come le consideriamo in Meccanica razionale, non è altro che un sistema di segmenti. Abbiamo quindi il diritto di applicare senz'altro alle forze tutto quanto abbiamo detto intorno ai segmenti; non c'è che da fare qualche lieve cambiamento di linguaggio: dire *forza* invece di *segmento*, *punto d'applicazione* in luogo di *punto iniziale*, *linea d'azione* invece di *linea di posizione*, ecc., ecc. Nasce così una teoria dell'equivalenza dei sistemi di forze, intendendo per equivalenti due sistemi di forze i quali abbiano uguali le caratteristiche omologhe. Che se poi supponiamo che il corpo, sul quale operano le forze, sia rigido, codesta equivalenza acquista un cospicuo significato meccanico, che è ciò che ne forma l'importanza. Per convincersene, basta

osservare che tanto l'equilibrio quanto il movimento di un corpo rigido dipendono, non già dagli elementi che individuano le singole forze sollecitanti il corpo, ma dalle caratteristiche di esse; epperò non si alterano, comunque al sistema di quelle forze se ne sostituisca un altro equivalente (*). E allora la dottrina riassunta nel § precedente fornisce immediatamente tutti i teoremi noti sulla composizione delle forze concorrenti o parallele, sulla trasformazione e sulla composizione delle coppie, sulla riduzione di un sistema qualunque di forze, come si sogliono esporre nella Statica dei sistemi rigidi.

Invece, l'applicabilità alla Cinematica della Geometria dei sistemi di segmenti non è manifesta a prima giunta: per metterla in luce, fa d'uopo addivenire ad alcune investigazioni.

Consideriamo un corpo (sistema di punti invariabilmente connessi) avente un moto rotatorio intorno ad un asse; e consideriamo il *segmento rappresentativo* di questa rotazione per la fine del tempo t, cioè un segmento dell'asse di rotazione, la cui lunghezza rappresenti il valore della velocità angolare (alla fine del tempo t) ed il cui verso, scelto giusta opportuna convenzione, definisca il verso del moto (alla fine del tempo t). Denotiamo con a, b, c, l, m, n le caratteristiche rispetto a tre assi di questo segmento, con w_x, w_y, w_z le proiezioni sugli assi della velocità che, alla fine del tempo t, ha il punto (x, y, z) del corpo. Per formole note, avremo

$$w_x = l + bz - cy \ ,$$
$$w_y = m + cx - az \ ,$$
$$w_z = n + ay - bx \ ,$$

dove a, b, c, l, m, n non sono indipendenti fra di loro, ma legate dalla relazione

$$al + bm + cn = 0 \ .$$

Immaginiamo ora che il corpo abbia un moto composto di k rotazioni $R_1, \ldots, R_k$; e supponiamo date le caratteristiche $a, b, \ldots$ del segmento rappresentativo di ognuna di queste rotazioni per

(*) È quasi superfluo l'avvertire che, trattandosi del moto, il sistema primitivo di forze e quello che gli si sostituisce debbono essere equivalenti *ad ogni istante*.

la fine di un medesimo tempo t. Sia dippiù W la velocità corrispondente nel moto composto del punto (x, y, z). In virtù di un teorema che suppongo dimostrato, sarà

$$\left.\begin{aligned} W_x &= \Sigma w_x = \Sigma l + z\,\Sigma b - y\,\Sigma c \\ W_y &= \Sigma w_y = \Sigma m + x\,\Sigma c - z\,\Sigma a \\ W_z &= \Sigma w_z = \Sigma n + y\,\Sigma a - x\,\Sigma b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1).$$

Ma, d'altra parte, qualunque sia il movimento del corpo, è noto che le proiezioni sugli assi della velocità v di un punto (x, y, z) si possono, senza introdurre nessuna idea di composizione di moti, esprimere nel modo seguente

$$\left.\begin{aligned} v_x &= L + Bz - Cy \\ v_y &= M + Cx - Az \\ v_z &= N + Ay - Bx \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2),$$

dove A, B, C, L, M, N sono sei funzioni del tempo indipendenti fra di loro, e indipendenti dalle coordinate x, y, z. Ora, queste espressioni di v_x, v_y, v_z hanno precisamente la forma delle espressioni (1) di W_x, W_y, W_z, e coincidono con quelle quando le k rotazioni $R_1, \ldots, R_k$ siano tali che le sei somme Σa, $\Sigma b, \ldots$ risultino rispettivamente uguali ad A, $B, \ldots$ Vediamo così che la velocità di ogni punto di un corpo, mobile comunque, si può considerare come dipendente dalle caratteristiche di un certo sistema di segmenti. E se, per brevità di linguaggio, conveniamo di chiamare *caratteristiche* (*alla fine del tempo* t) *del sistema delle rotazioni* R le sei somme Σa, Σb, ecc., possiamo concludere il teorema seguente:

Qualunque sia il movimento di un corpo, ad un istante qualunque, la velocità di ogni suo punto è la stessa (in grandezza, direzione e verso) come se il corpo avesse un moto composto di k *rotazioni, il sistema delle quali, nell'istante considerato, avesse per caratteristiche le sei quantità* A, B, C, L, M, N, *che a quel movimento, in quell'istante, competono.*

Ovvero, in termini meno precisi ma più conformi al linguaggio consueto:

Ogni spostamento elementare di un corpo si può considerare come composto di k *rotazioni, il sistema delle quali abbia per caratteristiche* A, B, C, L, M, N.

Da questa proposizione segue immediatamente quest'altra:

Comunque al sistema delle k *rotazioni* R *se ne sostituisca un altro avente le stesse caratteristiche, la velocità* v *rimane la stessa.*

Giunti a questo punto, è evidente che basta applicare al sistema dei segmenti rappresentativi delle rotazioni R la teoria riassunta nel § 1 per ottenere l'intiera teoria della composizione delle rotazioni, di quella delle traslazioni, della riduzione di uno spostamento elementare a due rotazioni, ovvero ad una rotazione e ad una traslazione, ecc. Occorre però avvertire che, per aver diritto di parlare di traslazioni, si richiede ancora una dimostrazione: è necessario provare che la velocità di ogni punto di un corpo, il cui moto consista in una coppia di rotazioni, è la stessa come se il corpo avesse un moto progressivo nella direzione e pel verso dell'asse della coppia, con velocità uguale al momento della coppia. Infatti, a questo riguardo, la geometria dei sistemi di segmenti dice soltanto che una coppia è equivalente ad un segmento di lunghezza zero, posto all'infinito.

Vi è un altro punto della teoria dello spostamento elementare di un corpo, che esige un' investigazione ulteriore; ed è l'esistenza del complesso di Chasles delle normali alle traiettorie. È noto infatti che il complesso lineare individuato da un sistema di segmenti si suol definire come l'insieme delle rette dello spazio, rispetto alle quali è nullo il momento del sistema (somma de' momenti dei segmenti del sistema); e così appunto si definisce, nella Statica, il complesso lineare individuato da un sistema di forze. Quindi, in Cinematica, dovremmo considerare il complesso formato dalle rette, rispetto a cui è nullo il momento del sistema $\mathfrak{S}$ dei segmenti rappresentativi delle rotazioni R. Ora bisogna far vedere che questo complesso e quello suaccennato di Chasles coincidono, cioè, bisogna dimostrare che: Ogni retta, rispetto alla quale è nullo il momento del sistema $\mathfrak{S}$, è normale alla traiettoria di qualche punto del corpo nella posizione che esso punto occupa alla fine del tempo t; e, inversamente, ogni normale a questa traiettoria, nella posizione medesima, è una retta, rispetto a cui è nullo il momento del sistema $\mathfrak{S}$. A tale intento, diciamo x_0, y_0, z_0 le coordinate di un punto qualunque di uno dei raggi del complesso individuato dal sistema $\mathfrak{S}$; α, β, γ gli angoli che esso fa coi tre assi. Per espri-

mere che è zero il momento del sistema $\mathfrak{S}$ rispetto a questo raggio, avremo l'equazione

$$\left.\begin{array}{l}(\Sigma l - y_0 \Sigma c + z_0 \Sigma b)\cos\alpha + (\Sigma m - z_0 \Sigma a + x_0 \Sigma c)\cos\beta \\ \qquad + (\Sigma n - x_0 \Sigma b + y_0 \Sigma a) = 0\end{array}\right\} \quad \ldots (3).$$

Ora, in virtù delle (1), i trinomii tra parentesi sono proporzionali ai coseni di direzione della tangente nel punto (x_0, y_0, z_0) alla traiettoria del punto del corpo che, alla fine del tempo t, ha la posizione (x_0, y_0, z_0); dunque il raggio considerato è normale in (x_0, y_0, z_0) alla traiettoria medesima. Reciprocamente, ogni altra normale in (x_0, y_0, z_0) soddisferà all'equazione (3); dunque, ecc.

A questo medesimo risultato si può giungere per un'altra via che mi pare degna di menzione. Essa si appoggia al teorema seguente, facilissimo a stabilirsi, ma che non credo notorio:

Nel moto rotatorio intorno ad un asse, la proiezione della velocità di un punto, sopra una retta condotta per questo, è espressa dal prodotto della velocità angolare pel momento Cayleyano della retta e dell'asse di rotazione.

Sia r un raggio del complesso individuato dal sistema $\mathfrak{S}$; e sia $M(R, r)$ il momento rispetto ad r del segmento rappresentativo di una delle rotazioni R. Per definizione, avremo

$$\Sigma M(R, r) = 0 \ ,$$

ossia, designando con ω la velocità angolare della rotazione R e con $\mathfrak{M}(R, r)$ il momento Cayleyano dell'asse di essa e del raggio r,

$$\Sigma \omega \mathfrak{M}(R, r) = 0 \ .$$

Ma, in forza del teorema citato, $\omega \mathfrak{M}(R, r)$ è uguale alla proiezione w_r sulla retta r della velocità che un suo punto qualunque ha in virtù del moto rotatorio R; dunque

$$\Sigma w_r = 0 \ ,$$

ossia

$$W_r = v_r = 0 \ .$$

Cioè: *La velocità di ogni punto di un raggio del complesso è normale a questo raggio.* Quindi, ecc.

Aggiungerò un'osservazione relativa all'invariante I del sistema $\mathfrak{S}$. Il teorema, che ho riferito, intorno al moto rotatorio permette di dedurre colla massima facilità, dalle diverse definizioni geometriche dell'invariante di un sistema di segmenti, varii significati cinematici che si possono attribuire ad I. Così, per esempio, se l'invariante di un sistema di segmenti si definisce come il sestuplo volume del tetraedro avente per due spigoli opposti i due segmenti ai quali può ridursi il sistema, si ottiene tosto

$$I = \Omega U ,$$

essendo Ω la velocità angolare di una delle due rotazioni, a cui può ridursi uno spostamento elementare, e U la proiezione sull'asse di essa della velocità di uno qualunque dei punti di quest' asse (*). Più generalmente, se l'invariante di un sistema di segmenti si considera come la somma algebrica dei sestupli volumi di tutti i tetraedri aventi per due spigoli opposti due segmenti qualunque del sistema, si trova

$$I = \frac{1}{2} \Sigma \omega u ,$$

essendo u la proiezione sull' asse della rotazione R della velocità di un suo punto qualunque, ed estendendosi la somma Σ alle k rotazioni considerate (**). Ecc.

§ 3.

La teorica, che ho esposto per le velocità, si può estendere alle accelerazioni in un caso particolare, cioè per quegli istanti in cui le velocità de' singoli punti del corpo mobile sono nulle.

Supponiamo dapprima che il corpo abbia un moto rotatorio intorno ad un asse; e supponiamo che, per $t = t_0$, la velocità angolare ω sia zero. Denotiamo con a', b', c', l', m', n' le caratteristiche del segmento rappresentativo della rotazione per la fine del tempo t_0, intendendo ora per segmento rappresentativo un

(*) Cfr. Chasles, *Propriétés géom. relatives au mouvement inf. petit d'un corps solide libre dans l'espace*, Comptes rendus, T. XVI (1843), p. 1427.

(**) Cfr. Somoff, *Theoretische Mechanik*, I Th., p. 317, eq. (35).

segmento dell'asse, la cui lunghezza rappresenti il valore dell'accelerazione angolare (che si riduce a $\frac{d\omega}{dt}$), ed il cui verso definisca il verso del moto. Allora le proiezioni sugli assi coordinati dell'accelerazione h del punto (x, y, z) del corpo saranno:

$$h_x = l' + b'z - c'y \quad ,$$
$$h_y = m' + c'x - a'z \quad ,$$
$$h_z = n' + a'y - b'x \quad .$$

Supponiamo ora che il corpo abbia un moto composto di k rotazioni $R_1, \ldots, R_k$, delle quali ognuna, alla fine del tempo t_o, abbia velocità angolare nulla. Anche la velocità W del punto (x, y, z) nel moto composto sarà nulla. Dippiù, operando la composizione delle k rotazioni R mediante $k - 1$ successive composizioni di due moti, è facile vedere che le accelerazioni complementari saranno tutte zero; e che, per conseguenza, l'accelerazione H del punto (x, y, z) nel moto composto sarà la somma geometrica delle accelerazioni h. Avremo quindi

$$\left.\begin{aligned} H_x &= \Sigma l' + z\,\Sigma b' - y\,\Sigma c' \\ H_y &= \Sigma m' + x\,\Sigma c' - z\,\Sigma a' \\ H_z &= \Sigma n' + y\,\Sigma a' - x\,\Sigma b' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4) .$$

Ma, d'altra parte, se consideriamo un movimento qualunque del corpo alla fine di un tempo t_o, alla fin del quale la velocità v di ogni suo punto sia zero, l'accelerazione J del punto (x, y, z) sarà data da equazioni della forma (V. eq. (2))

$$J_x = L' + B'z - C'y \quad ,$$
$$J_y = M' + C'x - A'z \quad ,$$
$$J_z = N' + A'y - B'x \quad .$$

Ora queste coincidono colle (4) quando si scelgano le k rotazioni R in modo che $\Sigma a' = A'$, $\Sigma b' = B'$, ecc.; dunque possiamo dire che l'accelerazione J è la stessa come se il moto del corpo fosse composto di k rotazioni (aventi ognuna velocità angolare $= 0$) tali che il sistema dei segmenti rappresentativi di esse avesse per caratteristiche A', B', ecc. È anche lo stesso il valore della

velocità di ogni punto, poichè tanto v quanto W sono zero. E anche la stessa la direzione del moto per ogni punto, poichè (essendo $v = W = 0$) le accelerazioni J ed H sono tangenziali. Dunque:

Un movimento qualunque di un corpo, in un istante in cui le velocità de' singoli suoi punti sono zero, coincide, fino alle accelerazioni di 1° *ordine inclusive, con un moto composto di* k *rotazioni aventi ognuna velocità angolare nulla, e tali che il sistema dei segmenti rappresentativi di esse per l'istante considerato abbia per caratteristiche le quantità* A', B', C', L', M', N' *che a quel movimento, in quell'istante, competono.*

Mercè questa proposizione, applicando al sistema $\mathfrak{S}'$ dei segmenti rappresentativi (per la fine del tempo t_0) delle rotazioni R i teoremi geometrici sull'equivalenza dei sistemi di segmenti, avremo altrettanti teoremi cinematici. Nel fare la quale applicazione, importa avvertire che, se due delle k rotazioni considerate formano coppia, esse si riducono ad un moto progressivo nella direzione e pel verso dell'asse della coppia, con velocità eguale a zero, con accelerazione uguale al momento della coppia (*).

Per $t = t_0$, possiamo pure estendere alle accelerazioni ciò che

---

(*) Dimostrerò la verità di questa asserzione, sebbene la perfetta analogia che corre fra le accelerazioni per $t = t_0$ e le velocità per $t \lessgtr t_0$ potrebbe quasi dispensarmene:

Siano R_1, R_2 le due rotazioni formanti coppia, e sia μ il segmento rappresentativo di questa; siano inoltre a'_1, b'_1, ecc. le caratteristiche del segmento rappresentativo di R_1, a'_2, b'_2, ecc. quelle del segmento rappresentativo di R_2. Avremo:

$$a'_1 + a'_2 = 0, \qquad b'_1 + b'_2 = 0, \qquad c'_1 + c'_2 = 0,$$
$$l'_1 + l'_2 = \mu_x, \qquad m'_1 + m'_2 = \mu_y, \qquad n'_1 + n'_2 = \mu_z$$

e le equazioni (4) diverranno

$$H_x = \mu_x + \Sigma l' + z \Sigma b' - y \Sigma c'$$
$$H_y = \mu_y + \Sigma m' + x \Sigma c' - z \Sigma a'$$
$$H_z = \mu_z + \Sigma n' + y \Sigma a' - x \Sigma b',$$

intendendo adesso che le somme Σ si estendano alle rimanenti $k - 2$ rotazioni. Ora queste formole dicono che H è la somma geometrica di μ e dell'accelerazione del punto (x, y, z) nel moto composto delle rimanenti $k - 2$ rotazioni; dunque, ecc.

si è detto delle velocità relativamente al complesso delle normali alle traiettorie. Poichè le accelerazioni J dei varii punti del corpo sono tutte tangenziali, è manifesto che l'insieme delle normali condotte ad esse (nei rispettivi punti iniziali) sarà il complesso mentovato. Ed è facile provare che questo complesso coincide col complesso delle rette, rispetto a cui è nullo il momento del sistema $\mathfrak{S}'$.

SULL' INFLUENZA DELLA PRESSIONE

NELLA

FORMAZIONE DELL' ANIDRITE

del Socio Prof. Giorgio Spezia

Fra le varie ipotesi probabili emesse per spiegare la formazione dell'anidrite di origine marina vi è quella che la pressione sia sufficiente perchè il solfato di calcio si costituisca anidro invece di idrato, ed anzi fu indicata la quantità di pressione necessaria perchè il solfato di calcio delle acque marine si depositi come anidrite e non come gesso.

Infatti nel primo volume della recentissima opera *Unser Wissen von der Erde* (1) compilato da F. Hann e A. Pokorny si legge che la formazione dell'anidrite si spiega dal fatto che una pressione di 10 atmosfere, come si può avere in mare alla profondità di 107 metri, basta perchè il solfato calcico cristallizzi anidro.

Anche nella classica sua opera I. Roth (2) riporta che secondo Heidenhain l'anidrite si formi da una soluzione di solfato di calcio sotto una pressione di dieci atmosfere. Ma il Roth, con quella diligenza che tanto lo distingue nell'analizzare i lavori altrui, aggiunge, alla postilla di citazione dello scritto di Heidenhain, non essere indicato chi ha fatto l'esperienza.

Infatti il detto autore nel suo lavoro intitolato *Chemisch-geologische Betrachtung der Gypsvorkommnisse in der Zechstein-formation*, parlando dell'origine marina dell'anidrite così si esprime: *Die wasserfreie Ausbildung spricht nicht dagegen, das die neue-*

(1) Pag. 466.

(2) *Allgemeine und chemische Geologie*, 1879, vol. I, pag. 552.

ren Forschungen dargethan haben, dass, wenn die Abscheidung von schwefelsaurem Kalk aus einer Lösung unter einem Drucke von zehn Atmosphären geschieht, sich dieses Salz nicht wasserhaltig, sondern wasserfrei zeigt. Es genügt daher ein nur 320 *Fuss tiefes Meer den Bedingungen der Anhydritbildung* (1).

Io per quante ricerche abbia fatto non potei ritrovare chi abbia eseguito tale esperimento, e temo che sia un' asserzione proveniente da un equivoco.

Lo Zirkel (2) parlando delle circostanze nelle quali può prodursi gesso o anidrite dice: *Diese Umstände dürften nach Bischof in grösseren oder geringeren Druck zu suchen sei. Würde z. B. ein Druck von* 10 *Atmosphären hinreichen, das wasserfreie Salz zu erzeugen, so würde auf dem Boden eines* 320 *Fuss tiefen Sees der schwefelsaure Kalk als Anhydrit Krystallisiren.*

A me pare evidente che lo Zirkel abbia voluto solamente portare un esempio per meglio spiegare al lettore il concetto di Bischof, perchè sarebbe stato fuori posto il *zum Beispiel* se veramente un'esperienza avesse dimostrato giuste le cifre indicate.

D'altronde ho cercato nella *Geologia chimica* del Bischof e non rinvenni nessun numero che indicasse la quantità di pressione citata dal Heidenhain dopo la pubblicazione dello Zirkel.

Perciò credo che la non esatta interpretazione data allo scritto di Zirkel abbia originato l'equivoco che io suppongo; e sarei fortunato se qualcuno, con ricerche bibliografiche più accurate delle mie, potesse stabilire l'autore di tale esperienza onde annullare la mia supposizione.

Del resto, fatta anche astrazione della dubbiosa esperienza, la quale fisserebbe la quantità di pressione sufficiente per avere l'anidrite, risulta da altre osservazioni bibliografiche che l'ipotesi della pressione sia fra le prevalenti. E d'altronde essa non è contraria alle osservazioni geologiche ed anzi è suggerita.

Ora io da alcuni anni faccio esperienze sugli effetti della pressione a temperatura ordinaria nelle reazioni chimiche le quali possono interessare la mineralogia e la geologia. E siccome in tali esperienze ebbi occasione di ottenere la formazione del solfato di

---

(1) *Zeitschrift der deutschen geol. Gesellschaft*, vol. XXVI, 1874, pag. 278.
(2) *Lehrbuch der Petrographie*, vol. I, pag. 271.

calcio ad alta pressione, così credo opportuno di stralciare dalle mie osservazioni quei risultati i quali paiono dimostrare che non si possa ritenere la sola pressione come causa sufficiente della formazione dell'anidrite non solo a 10 ma neanco a 500 atmosfere.

Le esperienze le quali mi fornirono solfato calcico si basano sulla mutua azione di composti chimici sia per contatto immediato sia per lenta diffusione.

Non credo sia necessario che io faccia una dettagliata descrizione, con relativo disegno, dell'apparecchio da me ideato, perchè il buonsenso meccanico basta per immaginarne uno analogo quando si sappia che esso si fonda sulla pressione idraulica. Esso è costituito da un resistente vaso cilindrico di ferro nel quale si introduce il recipiente in cui avvengono le reazioni; poi viene chiusa l'apertura con una grande vite serrando la quale si può già ottenere una certa pressione; quindi con una seconda vite di minor diametro, la quale obbliga un cilindro di acciaio a penetrare nel liquido, si aumenta di molto la pressione. Questa viene trasmessa nell'interno del recipiente di vetro delle reazioni per mezzo di una membrana di gomma che lo copre e impedisce che il liquido esterno comunichi coll'interno delle reazioni. Nel recipiente delle reazioni si possono disporre altri piccoli congegni onde esperimentare in vari modi, p. es. con diffusione, con sviluppo di gas, ecc. Per liquido di pressione uso la glicerina onde impedire l'ossidazione del ferro dell'apparecchio quando rimane in azione per lungo tempo.

Naturalmente un manometro metallico unito all'apparecchio segna la pressione.

Fra le molte esperienze da me già fatte, quelle che diedero per risultato la formazione del solfato di calcio sono le seguenti:

1° Nel cercare l'azione del solfato di allumina sull'apofillite io lasciai alcuni cristalli di questo minerale della varietà incolora in una soluzione dell'indicato sale sotto la pressione di 300 atmosfere per tre mesi.

L'azione meccanica fu di suddividere i cristalli di apofillite in lamelle parallele alla faccia di sfaldatura, le quali però rimanevano unite dando al cristallo una deformazione quasi analoga al rigonfiamento che prende la vermiculite quando viene riscaldata. E per l'azione chimica i cristalli perdettero la trasparenza e divennero bianchi-opachi, e fra le lamine ed este-

riormente si formarono minuti cristalli di solfato calcico idrato ossia gesso.

2° In una esperienza dove i composti chimici contenenti calcio e acido solforico erano pezzi di calcite e solfato di allumina constatai pure che alla pressione di 95 atmosfere per due mesi si erano depositati sulla calcite cristalli di gesso.

3° Un pezzo di calcite tenuto in una soluzione di solfato di rame alla pressione di 95 atmosfere per tre mesi fu pure coperto da cristalli di gesso.

4° In una esperienza nella quale il solfato di magnesio e biborato sodico dovevano reagire lentamente con cloruro calcico per diffusione attraverso una soluzione satura di cloruro di sodio, ottenni dopo un mese, alla pressione di 100 atmosfere, cristalli di gesso geminati secondo 010.

5° Altra esperienza nella quale il solfato di magnesio da una parte e borato calcico e cloruro di magnesio dall'altra andavano a contatto per diffusione attraverso soluzione satura di cloruro di sodio, constatai pure dopo 45 giorni di pressione a 100 atmosfere cristalli di gesso.

In tali esperienze il gesso era un prodotto secondario riguardo lo scopo da me prefisso, perciò variavano le condizioni e realmente si potrebbe dire che non servono per stabilire che la pressione da sola non produca anidrite.

Perciò ultimamente ho sperimentato a solo scopo di ottenere solfato calcico.

Ho fatto reagire per diffusione solfato di magnesio con nitrato calcico; in una esperienza il mezzo di diffusione era acqua distillata, in un' altra era una soluzione satura di cloruro di sodio.

Ciascuna esperienza poi fu contemporaneamente eseguita a pressione atmosferica ed, avendo due apparecchi, alla pressione di 100 e 500 atmosfere. In tal modo le tre prove erano alla stessa temperatura dell'ambiente dove si trovavano.

Ora in tutte le esperienze trovai sempre formazione di soli cristalli di gesso. Il mezzo di diffusione influì solamente sullo sviluppo dei cristalli.

Nell'acqua distillata si formarono aggruppamenti sferoidali di minutissimi cristalli aciculari sempre però facilmente riconoscibili al microscopio per gesso. Nella soluzione di cloruro di sodio invece i cristalli erano più distinti, più separati gli uni dagli

altri e della grossezza taluni di due millimetri. E la causa naturalmente era che la diffusione attraverso la soluzione satura di cloruro di sodio avveniva con maggior lentezza, condizione necessaria per avere cristalli più distinti e sviluppati.

Dalle esperienze indicate mi sembra di potere asserire che la pressione, anche se arriva a 500 atmosfere, sia da sola insufficiente a produrre l'anidrite, e sieno invece necessarie altre cause concomitanti.

Ed io spero che questo mio scritto togliendo il fondamento di un'ipotesi facilmente ammessa forse in base di un'esperienza creduta fatta, quale quella della formazione a 10 atmosfere, servirà ad attivare sulla genesi dell'anidrite dei depositi marini altre ricerche, le quali s'intende possano accordarsi colle osservazioni geologiche e non sieno cioè di quelle che riesce assai difficile ammetterle come sono i modi di genesi dell'anidrite fondati sulla fusione ad alta temperatura indicati da Mitscherlich, Manross, Simmler e Gorgeu.

E forse sarà opportuno di prendere in maggior considerazione l'ipotesi di Reichardt (1) che l'anidrite provenga dalla disidratazione del gesso ritenendo per causa non l'azione esclusiva di altri sali, come voleva lo stesso autore, ma piuttosto l'influenza di una temperatura non superiore ai 100° unita ad una pressione di 40 o 50 atmosfere come suppose Bischof (2) nel suo lavoro sulle Saline di Stassfurt.

Massime che tale ipotesi è resa valida in parte dalle esperienze di Hoppe-Seyler (3) e da quelle di G. Rose (4), i quali constatarono che il gesso in una soluzione satura di cloruro di sodio alla temperatura da 120° a 130° si cambia in anidrite e che a temperatura più bassa succede la reazione inversa.

---

(1) *Verhandlungen der k. Leop. Carol. deutschen Akademie der Naturforscher*, 1860, vol. 27, pag. 653.

(2) *Die Steinsalzwerke bei Stassfurt.* Halle, 1875.

(3) *Poggendorffs Ann.*, 1866, vol. 127, pag. 161.

(4) *Monatsberichte der k. preussischen Ak. der Wiss. zu Berlin*, 1871, pag. 378.

SOPRA UNA PSEUDOMORFOSI

del Dott. Giuseppe Piolti

Nell'estate dello scorso anno, in un'escursione alla punta del *Grand Roc* (3115 m. s. l. d. m.), montagna situata nella valle del Thures, affluente della Ripa (che a sua volta va ad unirsi colla Dora del M. Ginevra a Cesana, per formare la Dora Riparia), a circa 300 m. dalla cima, mi venne fatto d'incontrare qualche frammento di un calcare profondamente alterato, presentante alla sua superficie e nell'interno parecchi minuti cristalli di colore nerastro, aventi l'aspetto di romboedri, con un diametro maggiore oscillante fra 1 e 2 millimetri.

Sarebbe stata mia intenzione il cercare dove si trovava *in situ* la roccia cristallifera, ma per la grande quantità di detriti fra i quali io ed il mio portatore ci trovavamo, mi fu impossibile di scoprire dove s'annidasse la roccia in posto, poichè essendo noi sopra un pendìo abbastanza ripido, tolti pochi detriti, altri dall'alto scendevano giù precipitosamente: sarebbe stato un vero lavoro di Sisifo l'ostinarsi a scavare fra quella congerie, epperciò vi rinunziai.

Il calcare inglobante i cristalli è assai magnesifero, si scioglie facilmente nell'acido cloridrico, lasciando un residuo insolubile costituito dai cristalli summentovati e da una polvere nerastra di sostanza carboniosa, nella quale un saggio qualitativo mi dimostrò la presenza della silice.

Nel filtrato cloridrico ho constatato la presenza dell'allumina, del sesquiossido di ferro e dell'acido solforico.

I cristalli rigano il vetro, non il quarzo: la polvere è grigio-scura ed imbiancasi quando sia portata ad alta temperatura col cannello a gas; con acido fluoridrico scompare quasi tutta, lasciando per residuo un deposito nero.

Varii preparati microscopici si comportano alla luce polarizzata come una sostanza anisotropa ed i vivi colori d'interferenza mi avevano fatto in sul principio supporre si trattasse non d'altro che di romboedri di quarzo.

Però tutti questi caratteri presi insieme non avendo un sufficiente valore per provarmi che i cristalli fossero costituiti da silice cristallizzata, risolsi di farne l'analisi che eseguii coadiuvato dai consigli del prof. Spezia (cui godo di esternare qui la mia riconoscenza) che mi fornì il suo prezioso appoggio nell'opera difficile, per la scarsa quantità di materiale (gr. 0,1834).

SiO^2	=	88,23
Al^2O^3	=	2,23
Fe^2O^3	=	1,82
$Ca\,O$	=	1,32
SO^3	=	1,96
Perdita per calcinazione	=	3,16
		98,72

L'analisi, come vedesi, distrugge l'ipotesi che si tratti di quarzo, in causa della troppo piccola quantità di silice; perciò sono costretto a ravvisare nei cristalli da me esaminati una pseudomorfosi.

Nulla di strano che l'allumina, il sesquiossido di ferro e l'acido solforico si trovino nei cristalli, dal momento che verificai la presenza di tali sostanze nel calcare.

Se poi riflettiamo che il calcare del *Grand Roc* trovasi a contatto coi *schistes lustrés* eminentemente alluminiferi, nei quali è scavata tutta la parte superiore della valle di Thures fino al colle di Turras (1), che inferiormente al *Grand Roc* havvi un enorme banco di gesso e poco distante da Ruilles (il cui nome probabilmente deriva da *rouille*) incontrasi una sorgente ferruginosa che piglia origine al disotto del *Grand Roc*, che sulla sponda destra del Thures ossia sul fianco occidentale della detta montagna, incontransi frequentemente frammenti d'ematite derivante da qualche filone finora inesplorato, riesce facile a capirsi la presenza dell'allumina, del sesquiossido di ferro e dell'acido

(1) Gastaldi, *Deux mots sur la géologie des Alpes Cottiennes.* Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Turin. Vol. VII, 28 avril 1872, p. 15.

solforico nel calcare del *Grand Roc*, tanto più che la calce nei cristalli deve trovarvisi allo stato di solfato, poichè teoricamente ad 1,32 % di CaO dovrebbero corrispondere 1,88 di SO^3, cifra poco dissimile da quella data dalla mia analisi, cioè di 1,96.

Nella quota di 3,16 data dalla perdita per calcinazione, 0,84 % sarebbero devoluti all'acqua di cristallizzazione del gesso e 2,32 % ad acqua igroscopica e sostanza carboniosa prese insieme.

Credo di non emettere un'ipotesi assurda nel supporre che i cristalli debbano considerarsi come romboedri di silice pseudomorfa di calcite.

Una misura goniometrica avrebbe risolto ogni dubbio, ma per quanti tentativi io abbia fatto col microscopio-goniometro di Hirschwald onde determinare gli angoli dei cristalli, ciò mi riuscì sempre impossibile in causa della loro superficie straordinariamente rugosa, piena di incavi e di sporgenze, come puossi meglio vedere dalla qui unita figura, gli spigoli poi avendo addirittura l'aspetto d'una sega, per la loro profonda corrosione.

Questa ipotesi sarebbe avvalorata dal fatto che nel Fichtelgebirge furono gia incontrati dal prof. Sandberger romboedri di silice pseudomorfa di calcite (1).

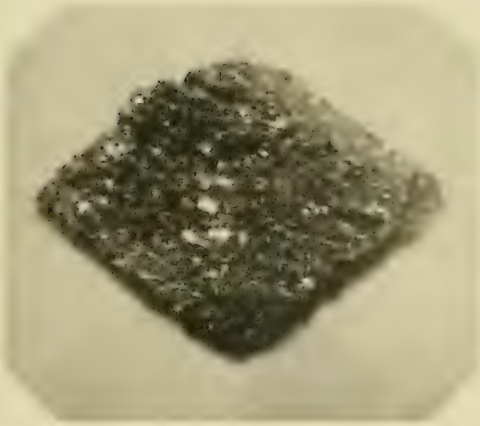
Io spero che ulteriori ricerche, che mi propongo di fare nel corrente anno, mi permetteranno di trovare altri cristalli, che, presentandosi meno alterati, si possano misurare: allora si potrà stabilire con sicurezza di quale sostanza essi fossero costituiti prima della loro pseudomorfosi.

---

(1) *Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie*, Jahrgang 1885, I Band, Zweites Heft. SANDBERGER, *Pseudomorphosen von Quarz und Albit nach Kalkspath*, p. 185.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Una faccia d'un romboedro: ingrandimento di 55 diametri.



Torino, Lit. Doyen

CONTRIBUTO ALLO STUDIO

DELLA

PATOLOGIA DEL RENE

del Dott. Eugenio di Mattei

Pochi osservatori hanno rivolto le loro ricerche sull'argomento della rigenerazione parziale del Rene in seguito a ferite od asportazioni del suo parenchima, e tutti gli studî in proposito si limitano in via sperimentale a quelli del Tillmanns e a quelli del Pisenti.

Tillmanns veniva alla conclusione che nelle ferite degli organi, le cellule epiteliali specifiche di essi non prendono parte alcuna alla formazione della cicatrice, come non prendono parte molto attiva nè alla formazione dei vasi nè alla formazione della detta cicatrice le cellule fisse dello stroma di essi visceri, e che il processo di cicatrizzazione dei medesimi è quasi interamente devoluto ai globuli bianchi del sangue.

Pisenti però ha trovato che in seguito a ferite o asportazioni gli elementi costitutivi del parenchima renale non rispondono in modo evidente allo stimolo meccanico della ferita: che nel connettivo cicatriziale di genesi pericanaliculare si osservano secondariamente fatti di neoformazione tubulare e glomerulare, e che tale neoformazione degli elementi proprî del rene ha origine da una trasformazione degli elementi del connettivo reticolare.

Queste conclusioni del Pisenti venivano a convalidare le conclusioni di altra serie di ricerche, fatte da lui stesso insieme al Prof. Tizzoni, relative all'ipertrofia compensatoria, in seguito alla nefrectomia unilaterale, nel quale studio gli autori stabili-

vano che nell'ipertrofico rene rimasto avvengono dei processi di neoformazione nei quali gli epitelî dei tubuli vecchi si comportano passivamente e che i canalicoli di nuova formazione hanno origine da una trasformazione degli elementi del connettivo reticolare interstiziale.

Si veniva così ad identificare la genesi neoformativa dei due processi.

Però consecutivamente le ricerche del Golgi dimostravano che nella ipertrofia compensatoria per nefrectomia unilaterale gli epitelî dei canalicoli uriniferi dell'ipertrofico rene rimasto, lungi dal comportarsi in modo affatto passivo, hanno una parte attiva, vale a dire in essi ha luogo un processo di proliferazione per scissione nucleare indiretta.

Dopo questi risultati, era allora importante di vedere come doveva definirsi la questione anche per il primo studio della rigenerazione dell'organo in seguito all'asportazione parziale del suo parenchima: e quindi ho voluto ritornare su tale argomento istituendo une serie di ricerche sperimentali.

Le mie esperienze vennero istituite sovra un numero rilevante di conigli. Nell'operazione ho badato alle cautele antisettiche.

Mettevo fuori il rene dalla regione lombare, e sulla superficie convessa dell'organo con un rasoio ben tagliente si praticava ora una semplice incisione ed ora se ne asportava un pezzo cuneiforme.

Gli animali sopportavano bene l'atto operativo e si tenevano in vita sino a varia epoca a cominciare da 3, 5, 8, 10, 15, 30, 40, 60, 90, 120, 210 giorni.

Ucciso l'animale si riandava col bistorì sulla ferita, si cercava di liberare il rene dagli attacchi fisiologici e dalle lievi aderenze consecutivamente alle operazioni contratte, ed indi con un rasoio molto bene affilato veniva tagliato per metà secondo il suo asse trasversale interessando così la lesione primitiva nel suo mezzo.

Una metà dell'organo per studiare la cariocinesi veniva messa direttamente nell'alcool assoluto e dopo conveniente indurimento al punto della lesione si facevano al microtomo delle sottili sezioni che venivano trattate col metodo iodo-cromico del Prof. Bizzozero.

L'altra metà per lo studio della lesione si metteva per parecchi giorni nel liquido del Müller e poi nell'alcool a concentrazione sempre crescente e infine in alcool assoluto.

Le sezioni di questi pezzi chiusi in paraffina si facevano al microtomo di Thoma, e venivano colorate parte al picro-carmino di Schrön, parte al carmino-allume e chiuse infine parte in glicerina, parte in balsamo del Canadà.

Per lo studio dei vasi sanguigni si spingeva nell'arteria dell'organo, appena estratto dall'animale, un'iniezione di bleu di Prussia.

Adesso io qui senza riportare il protocollo minuto di tutte le esperienze fatte nei diversi periodi con il relativo reperto macroscopico e microscopico, ho solo l'intendimento di far conoscere in complesso i miei risultati nei periodi più importanti del processo.

Nei primi giorni della praticata lesione gli epitelî dei tubuli in immediata vicinanza del punto emorragico tracciato dalla ferita erano in massima parte in evidente risveglio, dimostrando essi le varie forme della scissione nucleare indiretta. Negli epitelî dei tubuli della sostanza midollare prossimi alla lesione e negli epitelî di alcuni tubuli della sostanza corticale anche discretamente lontani dalla ferita si poterono notare fatti di mitosi.

In un caso di rene a 15 giorni ho notato ipertrofia della capsula e sclerosi degli strati esterni della sostanza corticale, e in corrispondenza della cicatrice, sclerosi del parenchima circostante e neoformazione aberrante di canalicoli che penetravano nella cicatrice istessa e fino nella capsula. Molto numerosi gli elementi in cariocinesi nei tubuli contorti e nei tubuli aberranti.

Nei reni di più lunga durata, 30, 60, 90 giorni, si nota la perdita di sostanza riempita dal connettivo pericanaliculare dei margini della ferita e dalle fibre del connettivo capsulare.

Disposti ai margini della ferita, isolati dal resto del parenchima normale dal connettivo pericanaliculare il quale colla sua proliferazione li spinge avanti nella massa cicatriziale, si trovano dei glomeruli che restando compressi fra questo connettivo e quello della capsula appaiono molto più piccoli di quelli normali, essi non hanno continuità nè coi tubuli, nè con le anse vascolari ed hanno l'aspetto di accumuli di elementi circoscritti da una robusta capsula fibrosa. Nel loro interno non è possibile scorgere integro un gomitolo vascolare, e gli elementi contenuti sono scarsi, poco colorati, piuttosto trasparenti e in via di degenerazione e fra essi una sostanza pallida, amorfa disseminata di finissime granulazioni. Mano mano che ci allontaniamo dai margini della ferita

per venire verso il tessuto glandulare normale questi glomeruli appaiono più grossi, meno strozzati dal cingolo di connettivo, e sebbene non abbiano tuttavia continuità colle anse e coi tubuli, pure mostrano una minore atrofia degli elementi del gomitolo, fino a che andando ancora più avanti si arriva al punto in cui si presentano solo un po' compressi e non mostrano più i fatti della degenerazione accennata.

Oltre a ciò nulla di notevole tranne dei soliti fatti d'atrofia di quei tubuli che sono spinti verso il connettivo cicatriziale, dalle cui fibre possono restar compressi

Non si notano forme aberranti di canalicoli neoformati.

Col metodo iodo-cromico abbiamo potuto notare, sebbene molto rara, qualche forma cariocinetica negli elementi dei tubuli limitanti la lesione.

A 120, 150, 210 giorni, i preparati presentano un minore interesse, mostrano solo più marcati i fatti di atrofia dei tubuli e glomeruli, limitrofi all'asportazione.

Studiando i vasi, nei reni iniettati si nota il loro nettamente arrestarsi all'apice del cono cicatriziale, qualcuno di essi ripiega in basso e si anastomizza con gli altri della rete midollare; a volte qualche ramo penetra fin nella massa di neoformazione senza introdursi in mezzo a speciali accumuli di elementi.

I fatti principali che derivano dalle esposte osservazioni si riducono ai seguenti: ad una neoformazione di tessuto cicatriziale che riempie la perdita di sostanza proveniente da una proliferazione del connettivo capsulare e pericanaliculare; ad una serie di fatti di regressione e d'atrofia dei tubuli e glomeruli in vicinanza ai margini dell'asportazione; ad un risveglio attivissimo per scissione nucleare indiretta e ad un'aberrante proliferazione atipica degli epitelî dei tubuli in vicinanza all'avvenuta asportazione.

Non si notarono mai nuovi tubuli provenienti dalla trasformazione delle cellule connettive in epiteliali: si notò invece che gli epitelî dei canalicoli scampati alla distruzione non si comportano passivamente, ma rispondono allo stimolo e si moltiplicano dando luogo ad una *rigenerazione elementare* di quegli epitelî che sono andati distrutti. Non si può quindi parlare in questi casi di una *vera e propria* rigenerazione di parti funzionanti costituenti l'organo.

Ho voluto intorno al rene estendere le mie ricerche per determinare il modo di comportarsi degli epitelî dei tubuli in seguito alle alterazioni che desta nel parenchima renale la legatura dell'uretere.

Legando l'uretere a cani e conigli e tenendoli in vita fino a vario periodo (7, 15, 30 giorni) ho potuto notare che nei reni di 15, 30 giorni, accanto ad epitelî alterati e in via di disaggregazione se ne osservano degli altri in scissione cariocinetica, specialmente nei tubuli contorti ed anse ascendenti di Henle; mentre non se ne constatarono mai nei reni di breve durata.

Ho voluto eziandio sotto questo punto di vista della mitosi studiare il comportarsi degli epitelî in talune nefriti destate negli animali sperimentalmente.

A tal uopo ho scelto la cantaridina, l'aloina, l'emoglobina. Iniettando sottocute (cantaridina, aloina) e nelle vene (emoglobina) di animali le dette sostanze in soluzione più o meno concentrata, a seconda che volevo ottenere un avvelenamento più o meno rapido, ho potuto in tutti casi constatare che nel 1° periodo (poche ore-giorni) dell'infiammazione, destata dalle sostanze sugli epitelî, questi pur mostrandosi più o meno alterati non fecero notare fatti di mitosi; mentre che in un 2° periodo di più lunga durata, oltre a constatarsi degli epiteli alterati se ne osservavano accanto a questi molti altri in scissione cariocinetica.

Queste esperienze confermano i fatti anatomo-patologici osservati dal Golgi in taluni stadî del morbo di Bright e si viene così a stabilire che la neoformazione epiteliale non deve considerarsi in questi casi come un fatto dipendente dallo stimolo infiammatorio, ma come una vera rigenerazione di elementi epiteliali per proliferazione di quegli altri elementi scampati alla distruzione e costretti ad iperfunzionare.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1ª — Asportazione cuneiforme — Durata 15 giorni — Suppurazione della ferita fino al tessuto pericapsulare — *AB* capsula molto inspessita — *CDEFMN* cordoni epiteliali aberranti tagliati variamente e decorrenti in vario senso nel connettivo di neoformazione che riempie il vuoto della perdita di sostanza e nel connettivo capsulare iperplastico. Alcuni di essi (*MN*) partono dai tubuli epiteliali preesistenti in vicinanza dei margini dell'asportazione (Hart. Ob. 4. Oc. 3).

» 2ª — Asportazione cuneiforme — Durata 30 giorni. *A*. Glomerulo di Malpighi stretto dal connettivo iperplastico: l'epitelio della capsula è distaccato, il gomitolo è piuttosto atrofico — *BCDE* tubuli dei margini della ferita variamente lesi, compresi fra il connettivo pericanaliculare proliferato e quello della neoformazione cicatriziale; essi sono assottigliati e il loro epitelio è depauperato nel protoplasma — *FG* tubuli contorti con epitelio in disaggregazione — *G'H* tubuli con epitelio normale e con qualche elemento in cariocinesi (Hart. Ob. 8, Oc. 3).

» 3ª — Asportazione cuneiforme — Durata 90 giorni — *AB* glomeruli atrofici sclerosati col gomitolo e suoi componenti in disaggregazione spinti nella massa cicatriziale — *C* altro glomerulo in vicinanza ai limiti nella ferita anch'esso aggrinzato e con gomitolo atrofico — *E* tubulo dei margini assottigliato con epitelio degenerato spinto verso la massa cicatriziale.

Fig. 1

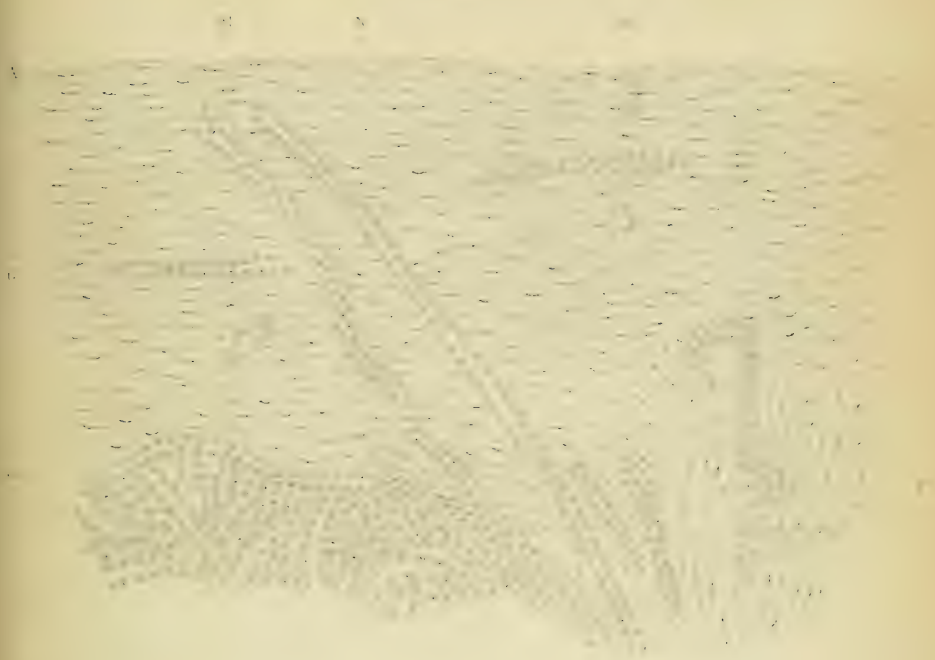


Fig. 2

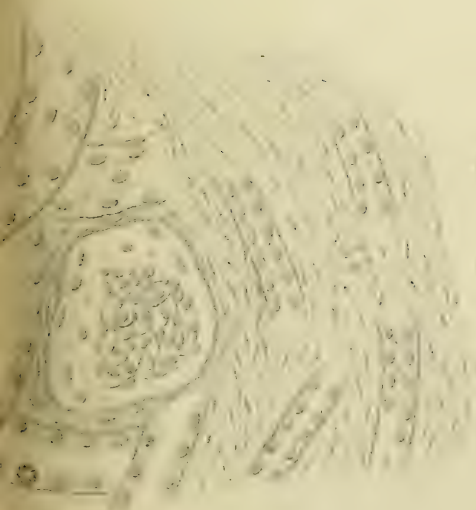
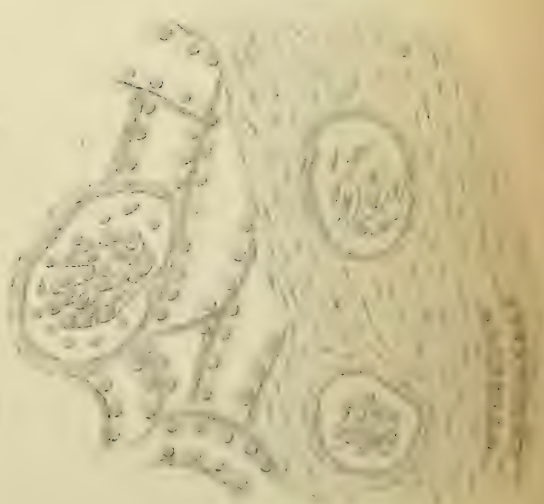


Fig. 3



INTORNO
AD
ALCUNE IMPRONTE ORGANICHE
DEI TERRENI TERZIARI DEL PIEMONTE

del Dott. Federico Sacco

Nell'autunno dello scorso anno 1885 ebbi occasione di perlustrare un po' diligentemente, per scopo geologico, gran parte di quella serie di colline che ricevettero in generale il nome di Langhe; in queste escursioni, specialmente lungo i rii che profondissimamente incidono tali regioni collinose, mi venne fatto di incontrare ripetutamente delle curiosissime impronte, di cui se alcune potevansi attribuire a traccie lasciate da Molluschi, Crostacei e specialmente Vermi, cioè alle così dette *Nemertiliti*, altre invece, che ricordano di lontano la reticolatura delle stimme della *Sigillaria Durnaisii* Brgn. oppure la superficie erosa di certi polipai a struttura esagonale, non potevansi assolutamente porre in tale categoria di impronte. È quindi naturale che appena reduce dalle escursioni tentassi di interpretare tali problematiche impronte e di cercare se altri ne avesse già tenuto parola; tali ricerche mi condussero alla conclusione: (1°) che le traccie sovraccennate e che andrò descrivendo in seguito, quantunque di origine ancora alquanto incerta, vennero già rinvenute in alcune località fuori del Piemonte, ma sempre in terreni assai più antichi di quelli in cui ebbi occasione di trovarle in Piemonte; (2°) che tali impronte presentano differenze abbastanza notevoli da quelle sinora descritte.

Credetti perciò utile di descrivere e figurare i fossili in questione rinvenuti in Piemonte, precisandone il luogo di ritrovamento e l'orizzonte geologico: ed ora passo senz'altro al loro esame.

PALEODICTYON Menegh.

Nel 1851 il chiarissimo Prof. G. Meneghini in appendice alla traduzione di un lavoro del Murchison indica che « fra i varii oggetti di origine certamente organica, ma di misteriosa natura, di cui vedonsi i resti sulla pietra a lastre di Nemertilite, non possiamo a meno di accennarne uno veramente singolare ed al quale osiamo dare un nome, senza osare decidere con precisione se realmente appartenga, come ci sembra, alla classe dei Fucoidi » (1).

Questo nome, proposto dal Meneghini, è *Paleodictyon*, genere nuovo di cui egli dà la seguente diagnosi: « *frons reticulata, areis pentagonis* », indicando come unica specie il *P. Strozzii*. A dir il vero nel fossile indicato dal Meneghini le aree non sono pentagone, come egli scrisse nella diagnosi e nella descrizione che fece della specie, ma bensì esagone, come risulta da disegni fatti in seguito dal Peruzzi nel lavoro che osserveremo fra breve; ma ad ogni modo è certo che fu il Meneghini il primo che si occupò e diede un nome a questi curiosi fossili retiformi e quindi è giusto resti loro il nome che egli diede.

Il Massalongo in un prodromo sulla flora fossile della Sinigaglia (2), a pag. 9, accenna ad impronte reticolari alquanto simili a quelle indicate dal Meneghini ma differenziantisi specialmente per avere le maglie più irregolari e molto più sottili e non rilevate, indicandole col nome di *Hydrodictyon*, genere tuttora vivente nelle acque lacustri e d'estuario.

Però nel suo magnifico studio su tale flora (3) a pag. 93 è costretto a distinguere tali impronte (di cui indica tre specie) con un nome diverso da quello delle specie ora viventi e dà loro il nome di *Hydrodictyopsis* di cui fa la seguente diagnosi: « *Fila tenuissima gelatinoso-mucosa reticulatim conjuncta, maculis regularibus irregularibusque efformantia* ».

---

(1) R. Murchison, *Memoria sulla struttura geologica delle Alpi, degli Apennini e dei Carpazi.* Traduzione ed appendice sulla Toscana dei Prof. Cav. P. Savi e G. Meneghini. Firenze, 1851.

(2) A. B. Massalongo, *Sulla flora fossile di Sinigaglia.* Lettera a G. Scarabelli. Verona, 1857.

(3) A. B. Massalongo e G. Scarabelli, *Studi sulla flora fossile e geologia stratigrafica del Senegallese.* Imola, 1859.

Tanto da questa diagnosi che dalle figure annesse al lavoro risulta quindi che tali fossili del terreno terziario del Senegalliese quantunque presentino qualche analogia col *Paleodictyon* di Meneghini, se ne distinguono genericamente senza dubbio per la piccolezza loro, per la tenuità dei fili, per il loro irregolare anastomizzarsi a formar solo qualche volta e senza ordine aree quadrangolari e pentagonali, e per non essere rilevati.

Nel 1865 il Prof. Heer in un suo lavoro sulla geologia della Svizzera (1), certamente non conoscendo il sovraccennato lavoro di Meneghini, a pag. 245 diede il nome di *Paleodictyon* ad impronte irregolari del Flysch che figura a tav. X, fig. 10, e che sono invece ben distinte da quelle indicate con tal nome dal Meneghini.

In seguito nel 1877 lo stesso Heer nel suo classico studio sulla flora fossile della Svizzera (2) meglio descrive queste impronte irregolari di cui indica diverse specie che esso attribuisce a qualche *Dictiotacea*, impronte trovate su lastre di terreni liassici, giurassici ed eocenici, sempre però controssegnandoli col nome di *Paleodictyon*, di cui a pag. 118 dà la seguente diagnosi: « *Fasciolae vel fila membranacea, in rete coadunata, areolis polymorphis, valde inaequalibus* ».

Sia dalla diagnosi che dalle figure risulta nettamente che i fossili indicati dall'Heer col nome di *Paleodictyon* sono ben diversi da quelli già molti anni prima controssegnati con tal nome dal Meneghini, ciò che obbligò in seguito il Peruzzi (3) a cangiare in *Eterodictyon* il nome generico indicante le impronte, che si trovano pure nei terreni eocenici italiani, corrispondenti alla ora accennata diagnosi data dall'Heer.

Nè nel trattato di Paleontologia vegetale dello Schimper (4), nè nella parte paleofitologica del trattato di Paleontologia dello Zittel (5) non troviamo alcun accenno alle impronte retiformi descritte dal Meneghini e dal Massalongo.

---

(1) O. Heer, *Die Urwelt der Schweiz*. Zürich, 1865.

(2) O. Heer, *Die Vorweltliche Flora der Schweiz - Dritte Lieferung - Die Pflanzen der Jura, der Kreide und des Eocene*. Zürich, 1877.

(3) G. Peruzzi, *Osservazioni sui generi Paleodictyon e Paleomeandron dei terreni cretacei ed eocenici dell'Apennino settentrionale e centrale*. Atti Soc. Tosc di Sc. Nat., vol. V, fasc. 1°, 1881.

(4) Ph. Schimper, *Traité de Paléontologie végétale*. Paris, 1869-1874.

(5) K. A. Zittel, *Handbuch der Paleontologie*. W. Ph. Schimper, II Band, I Lieferung. München, 1879.

Il Peruzzi nel 1881 col lavoro sopracitato ritornò all'esame delle impronte indicate dal Meneghini col nome di *Paleodictyon* e vi distinse tre specie, cioè il *P. Strozzii* MENEGH. del Cretaceo superiore e dell'Eocene, il *P. majus* MENEGH. dell'Eocene superiore e medio, ed il *P. giganteum* del Cretaceo superiore od Eocene inferiore, sempre dell'Apennino centrale; dalle figure unite al lavoro si vede assai bene come tali impronte sono molto somiglianti a quelle che rinvenni nei terreni terziari del Piemonte e che passerò ora a descrivere.

Infine possiamo notare come resti di *Paleodictyon* si trovarono pure non di rado in altre località italiane, specialmente nel Friuli, ma sempre solo in terreni eocenici.

Paleodictyon regulare SACC.

(FIG. 3).

Fila subcrassa, valde erecta, reticulatim conjuncta; maculae exagonae; exagona plerumque regularissima. Fila recta, altitudine 1-2 *millim., plerumque* 1 ¼ *millim., latitudine* 1 ½-2 *millim., longitudine* 4-5 *millim., plerumque aequalia. Frons ad marginem gradatim evanescens vel abrupte interrupta. Macularum latitudo inter fila parallela* 6-7 *millim., maxima* 9 *millim. Maculae praeter* 40 *numero.*

Nell'esemplare in esame è notevole che la parte di fronda che è quasi di tratto interrotta alla periferia, per modo che le maglie restano quivi incomplete, è volta verso la parte evanescente della vicina fronda, ciò che probabilmente si spiega col modo di origine di queste impronte, come vedremo tra breve, supponendo cioè che la fronda minore sia una colonia figlia della fronda maggiore.

Questo fossile venne trovato nel Tortonese e precisamente lungo la strada mulattiera che dal paesello di Molo di Borbora conduce a quello di Dernice. Quantunque io non abbia fatto uno studio geologico un po' dettagliato di tale regione, credo tuttavia che le descritte impronte derivino da terreni tongriani e più probabilmente dal *Tongriano medio* quivi assai sviluppato.

Fra le specie già descritte finora di questo genere la forma in esame si avvicina specialmente al *Paleodictyon majus* MENEGH.,

da cui si distingue per la quasi perfetta regolarità della sua reticolatura, per avere le aree esagonali generalmente alquanto più strette ed invece i rilievi proporzionatamente più larghi e più alti, ma non nettamente rilevati dal piano sottostante come si verifica generalmente sia nel *P. majus* come per lo più nei *Paleodictyon* sovraccennati dei terreni eocenici del Friuli, almeno riguardo ai campioni che ho potuto osservare.

La regolarità grande di questa fronda forse dipende anche in gran parte dalla regolarità del piano su cui si depositò, giacchè vediamo anche nelle altre specie che la regolarità od irregolarità di reticolatura è spesso in stretto rapporto coi rilievi del fondo su cui esse basano.

Paleodictyon miocenicum Sacc.

(Fig. 4).

Fila subcrassa, erecta, reticulatim conjuncta; maculae interdum pseudo-pentagonae, plerumque exagonae; exagona regularia vel irregularia. Fila plerumque recta, altitudine $\frac{1}{2}$-1 *millim., latitudine* 1-$1\frac{1}{4}$ *millim., longitudine* 2-4 *millim., plerumque inaequalia. Macularum latitudo inter fila parallela* 3-6 *millim., maxima* 7 *millim. Maculae praeter* 20 *numero.*

Le reticolature seguono assai bene il fondo su cui basano, adattandovisi variamente: le numerose deformazioni che si osservano in questa fronda si vede che non dipendono affatto da schiacciamento, pressioni laterali od altri fenomeni posteriori alla loro deposizione, ma solo dal modo stesso di deposizione sul fondo irregolare, ciò che d'altronde si deve dire generalmente anche per le altre forme. Alcune aree, esagonali come di solito, per deformazione simulano quasi aree pentagonali che però con attenta osservazione si possono ricondurre al tipo comune: soventi poi nell'esemplare in esame le aree si presentano allungate assai più in certe direzioni che non in altre.

Questa specie ricorda alquanto di lontano il *Paleodictyon Strozzii* Menegh. del Cretaceo superiore e dell'Eocene, distinguendosene però facilmente anche solo per le aree notevolmente più larghe che nella specie di Toscana.

Finora rinvenni un solo esemplare di questa specie caratteristica in certi schisti arenacei messi a nudo dalla profonda

erosione di un torrentello che dalla borgata di Pasco discende verso nord per sboccare sulla sinistra del fiume Tanaro poco a valle del paese di Bastia-Mondovì. Questi strati arenacei più volte ripetuti ed alternati con banchi marnosi grigio-bleuastri sono quelli che, secondo i miei recenti studi, costituiscono il passaggio dal *Tortoniano* inferiore all'*Elveziano* superiore, il quale appare poi nettamente lungo il corso del fiume Tanaro poco a monte della confluenza del sovraccennato torrentello del Pasco.

Ecco dunque ben stabilito che il genere *Paleodictyon* finora creduto iniziarsi nel periodo cretaceo e terminare coll'Eocene, ha in verità, almeno in Piemonte, prolungato di molto la sua esistenza, cioè sino al Miocene superiore. Questo fatto d'altronde non si basa solo sull'esemplare unico delle specie ora descritte, ma eziandio sopra un grandissimo numero di esemplari costituenti le specie che descriverò in seguito.

La specie esaminata è quella che presenta le aree più piccole fra tutte le specie di *Paleodictyon* dei terreni miocenici del Piemonte.

Paleodictyon tectiforme Sacc.

(Fig. 5, 6, 7, 8).

Fila crassissima, valde erecta, reticulatim conjuncta; maculae exagonae interdum pseudo-pentagonae; exagona plerumque regularia. Fila recta vel, in unaquaque macula, duo proxima aliquantulum arcuata, interdum fere unicum filum recurvum filo recto proximo erectius constituentia; hinc interdum facies tectiformis frondis; altitudine 2-5 *millim., latitudine* 2-5 *millim., plerumque* 3 *millim. Macularum latitudo inter fila parallela* 16 *millim. circiter, interdum praeter* 20 *millim., maxima* 24 *millim. Maculae praeter* 100 *numero.*

L'aspetto pseudo-pentagonale di certe aree è dato dall'accennato incurvarsi di alcuni rilievi e ciò generalmente sempre in una stessa direzione, per modo che siccome il rilievo diritto che viene ad attaccarsi perpendicolarmente alla parte esterna di tale curva è quasi sempre più basso del rilievo incurvato, l'assieme della fronda prende l'aspetto del sovrapporsi delle tegole

di un tetto, donde il suo nome specifico; ma ciò non è un fatto generale e d'altronde in altre specie si può in qualche raro caso osservare un lievissimo accenno a questa disposizione. Nel caso sovraccennato le aree si presentano molto più profonde da un lato che dall'altro, ed anche questo secondo una certa direzione. Il numero delle aree è spesso immenso, giacchè potei osservare fronde di oltre mezzo metro di diametro che contavano quindi oltre a cento maglie.

Questa specie si avvicina al *Paleodictyon giganteum* PER. del Cretaceo superiore od Eocene della Toscana; se ne distingue però specialmente per la mole, giacchè la forma descritta raggiunge non solo dimensioni e profondità maggiori nelle singole aree e maggior altezza dei fili, ma anche molto maggior sviluppo dell'intiera fronda, giacchè mentre il Peruzzi accenna ad essere le forme del suo genere composte di 15 o 16 aree, io ebbi a riscontrare frondi costituite di oltre un centinaio di tali maglie; ed inoltre è caratteristica la specie ora descritta per l'accennato incurvamento assai comune di due lati dell'esagono e ciò in linee regolari, il che dà l'aspetto quasi di una scalinata (fig. 6, 7, 8) o meglio di un adagiarsi o succedersi d'una maglia all'altra; fatto che parmi serva a spiegare il modo di accrescimento e di espansione della fronda del genere *Paleodictyon;* infine vediamo che il *P. tectiforme* quantunque abbia spesso i fili potentissimamente rilevati, spesso li ha accasciati e spesso pure li presenta allargantisi alla base per modo da confondersi poco a poco col fondo, mentre nel *P. giganteum* le maglie per lo più si distaccano assai bene dal fondo. Sono assai comuni le aree deformate, come nelle altre specie.

Gli esemplari che ebbi a rinvenire di queste specie sono numerosissimi e tutti provengono dagli strati inferiori del *Tortoniano* passanti all'*Elveziano* superiore o da strati dell'*Elveziano* vero. Dove mi si presentarono più comuni si è nel rio Garino (e nei suoi confluenti, specialmente nel rio Piano Bosco) che originandosi dalle colline di Belvedere delle Langhe viene a sboccare sulla destra del Tanaro, un chilometro circa a valle del paesello di Clavesana: anzi lungo questo rio, profondissimamente incassato nella regione collinosa, è comunissimo l'osservare, oltre agli abbondantissimi resti dei fossili in questione, anche bellissime Nemertiliti ed altre impronte più o meno decifrabili che talora parrebbero persino attribuibili ad impronte di piedi di Uccelli.

Oltre a questa località dobbiamo menzionare come pure ricchissimi di questi *Paleodictyon* i dintorni dei paeselli di Cigliè, e Rocca Cigliè, il rio del Bandito, il rio di Brillada ed altri profondi rii che dopo aver solcato le colline di queste regioni vengono poi a sboccare più o meno direttamente sulla destra del Tanaro.

Ne rinvenni pure alcuni rèsti negli strati arenacei che, al fondo delle cosidette *Rocche perticali* di Clavesana, costituiscono il *Tortoniano* inferiore, già iniziandosi l'alternanza più volte ripetuta di strati sabbiosi e marnosi che fanno poi il passaggio all'*Elveziano* inferiore.

Accennerò ancora all'aver trovato non poche di tali impronte lungo il torrente Rea che da Belvedere delle Langhe discende al paese di Dogliani per poi sboccare sulla destra del fiume Tanaro ed anche qui sia nell'*Elveziano* vero che nel *Tortoniano* inferiore.

Infine traccie del fossile descritto incontransi pure altrove nelle Langhe, ma sempre quasi allo stesso orizzonte geologico, almeno per ciò che finora mi risulta dagli studi fatti, cioè presso Alba, Mango, Castiglione Tinella, S. Stefano Belbo, Canelli, Calamandrana, ecc.

Paleodictyon maximum Sacc.

Fig. 9).

Fila subcrassa, mediocriter erecta, reticulum maculis latissimis constituentia; maculae parum numerosae, saepissime irregulares, plerumque exagonae, perrare pentagonae seu tetragonae. Fila recta, interdum tamen irregulariter recurva, altitudine ½ - 1 ½ *millim., latitudine* 2-4 *millim., longitudine* 20-25 *millim., macularum latitudo inter fila parallela millim.* 33, *maxima millim.* 35.

La fronda di questa specie non consta generalmente di molte maglie; la sua irregolarità dipende specialmente dalla straordinaria grandezza di queste maglie, per cui, quantunque la forma loro tipica sia l'esagonale, talora per cause diverse dispongonsi in pentagoni od in tetragoni. Di tutte le specie finora descritte di *Paleodictyon* è certamente questa quella che presenta le aree più grandi, donde il nome specifico che le ho attribuito.

I rilievi delle aree più larghe si vanno talora abbassando per modo da scomparire per qualche tratto per di nuovo comparire poco dopo.

Pochi esemplari di questa bella specie rinvenni finora negli strati arenacei costituenti la parte superiore dell'*Elveziano* nelle colline delle Langhe e specialmente nei dintorni di Calamandrana, Castiglione Tinella, ecc., assieme ad abbondanti resti di *Paleodictyon tectiforme*.

Paleodictyon sp.

Il Mayer nella sua Nota: *Sur la carte géologique de la Ligurie centrale*, Bull. Soc. Géol. de France, 1871, 3e Série, Tome V, parlando dei terreni *aquitaniani*, scrive: « dans la partie moyenne se trouvent, formant une espèce d'horizon persistant d'un bout à l'autre du bassin, ces singulières concrétions rétiformes, dues à la rupture en losanges d'une couche de vase mise à sec et au remplissage de ces fissures par du sable apporté par une nouvelle marée ».

Quantunque il fenomeno citato del Mayer per spiegare tali singolari impronte retiformi possa in alcuni casi aver luogo, tuttavia io credo, senza però aver potuto osservare le concrezioni osservate dal Mayer, che si tratti invece di impronte di qualche forma di *Paleodictyon* che serve appunto a collegare, almeno nel tempo, le forme *tortoniane* ed *elveziane* con quelle *tongriane* ed *coceniche*.

Quanto al formare tali impronte un orizzonte persistente, ciò non ha importanza stratigrafica, ma ci indica soltanto che gli organismi che le hanno originate per il loro sviluppo dovettero trovarsi in condizioni speciali, condizioni che si sono prodotte di tanto in tanto durante l'epoca terziaria a diversi periodi, e credo che tali condizioni consistessero nel fatto che, per alternanze di sollevamenti ed abbassamenti, avveniva talvolta che il gran golfo marino della valle padana si presentava pochissimo profondo specialmente verso l'Apennino settentrionale, e formando così una specie di estesa spiaggia sommersa di soli pochi metri ed adatta allo sviluppo degli organismi producenti le maglie studiate.

Qui cadrebbe precisamente in acconcio di ricercare quale sia veramente l'origine di queste impronte, ma a dir il vero essa ci si presenta ancora alquanto dubbia.

Il Meneghini quando nel lavoro precitato istituì il suo genere *Paleodictyon* fece notare esservi tra queste impronte e l'*Hydrodictyon pentagonum* una grande analogia, così pure questa esistere con qualche Ceramiea (*Halodictyon*); il Massalongo nella sovraccennata sua opera dice esser molto simile il *Paleodictyon* alla *Dictyosphaeria favulosa* Decais ed avvicina il suo genere *Hydrodictyopsis*, che credo abbia una certa affinità coi *Paleodictyon*, agli *Hydrodictyon* ed ai *Dictyonema*, ma pone questi resti come prova della deposizione dei terreni che li includono in bacini lacustri, mentre io son certo invece, per i dati paleontologici, che le impronte di *Paleodictyon* si formarono sopra un basso fondo marino, leggermente rialzantesi verso una spiaggia più o meno vicina.

Dopo le indicate supposizioni di sì eminenti scienziati non credo sia il caso di fare ulteriori osservazioni, e quindi sino a prova contraria io credo che si possa ammettere derivare le impronte di *Paleodictyon* da Alghe marine della famiglia delle Idrodictiee. Infatti noi osserviamo come negli *Hydrodictyon*, nei *Pediastrum* e generi affini le spore mobili o zoospore prodotte o direttamente da una cellula madre o da uova pure originate dalla cellula madre, dopo essersi fissate in punti vicini, aver perdute le ciglia ed essersi rivestite ciascuna di una membrana di cellulosa, prendono spesso la forma di un poliedro le cui estremità talora si prolungano in corna; frattanto questi talli unicellulari vanno ingrandendosi finchè si toccano e per associazione omogenea e giustaposizione unendo le loro membrane, per modo che lungo le faccie di contatto ogni linea di separazione diviene irriconoscibile (quantunque lascino talora spazi intercellulari riempiti d'aria e di liquido), formano un tessuto solo, un tallo membranoso o corpo vegetativo reticolare, costituito di numerose maglie più o meno larghe, più o meno regolarmente esagonali o pentagonali, spesso terminando di tratto alla periferia in corna libere, molto simili a quelle che osservansi in molti esemplari di *Paleodictyon*, così nel *P. regulare* Sacc. figurato in questo lavoro.

In un esemplare ho eziandio potuto osservare che due rilievi corrono paralleli e vicini senza unirsi, ciò che proverebbe

che forse i rilievi unici derivano dalla riunione di due fili che in casi eccezionali possono anche rimaner distaccati, come si vede in uno degli esemplari che ho disegnati.

Lo straordinario allargamento delle reti del *Paleodictyon*, nonchè la notevole estensione di questo fossile in certi strati e piani speciali, si spiega poi abbastanza facilmente notando come ciascuna delle cellule costituenti il tallo complesso ora indicato per divisione totale del protoplasma produce un grandissimo numero o di uova che danno luogo poi a zoospore o direttamente di zoospore che danno luogo ciascuna ad un tallo unicellulare nel modo sopra descritto; e siccome queste cellule figlie oltre a saldarsi poi fra di loro, spesso formano la loro colonia presso alla cellula madre, così la fronda reticolare primitiva può enormemente allargarsi con o senza spazi intermediari per accrescimento direi centrifugo; fatto che sembrami di aver potuto constatare eziandio in alcuni esemplari di *Paleodictyon*. Così vediamo nell'esemplare figurato di *Paleodictyon regulare* che la parte esterna della fronda più grande terminante di tratto in specie di corna, fronteggia appunto un'altra colonia minore poco lontana, che forse è una colonia figlia le cui zoospore originarie furono probabilmente prodotte dalle vicine aree incomplete.

Notiamo infine come questa forma di Alghe Cenobiee oltre che il fenomeno di associazione di talli distinti presenta sovente il fatto di disassociazioni e riassociazioni successive: quindi, date le condizioni favorevoli, queste forme, per i fenomeni sovraccennati, dovettero propagarsi abbondantissimamente ed estesissimamente e perciò non ci deve stupire l'enorme sviluppo loro in certi piani geologici.

Ad ogni modo saranno sempre necessari studi speciali sulle forme di Alghe viventi affini a questi fossili sia per meglio constatare le indicate osservazioni, sia per spiegare il modo di formazione dei rilievi costituenti le maglie, rilievi costituiti della stessa sostanza arenacea di cui è costituito lo strato su cui stanno le impronte, ed aventi pure lo stesso colore del fondo, giacchè è solo in rari casi che queste maglie presentano un color giallo brunastro di ossido di ferro, ciò che forse deriva da materiale di natura organica.

Risulterebbe quindi dalle ricerche che ho finora eseguite in Piemonte, come il genere *Paleodictyon* invece di essere limitato

al periodo cretaceo ed eocenico, come si suppose sinora, ha continuato a svilupparsi sino al Miocene superiore e quindi la sua estensione cronologica sarebbe la seguente:

Tortoniano passante all'Elveziano	*Paleodictyon*	*miocenicum* SACC.
	»	*tectiforme* SACC.
Elveziano	»	*tectiforme* SACC.
	»	*maximum* SACC.
Aquitaniano . .	»	sp.
Tongriano. . . .	»	*regulare* SACC.
Eocene.	»	*Strozzii* MENEGH.
	»	*majus* MENEGH.
	»	*giganteum* PER.
	»	sp. (Eocene del Friuli).
Cretaceo sup. ?	»	*giganteum* PER.
Cretaceo sup. .	»	*Strozzii* MENEGH.

HELMINTHOPSIS HEER.

L'Heer nella classica sua opera sulla flora fossile della Svizzera (1) istituì il genere *Helminthopsis* per impronte trovate nei terreni giurassici e che diagnosticò in questo modo: « *Frons simplex, valde elongata, fistulosa, cylindrica, gyrosa* », descrivendone tre specie molto differenti fra di loro.

In diversi orizzonti dei terreni miocenici superiori delle colline delle Langhe ebbi occasione nell'estate scorsa di osservare, assieme alle specie sopradescritte, alcune impronte affatto simili, genericamente, a quelle descritte e figurate dall'Heer sotto il nome di *Helminthopsis*, quantunque specificamente ben distinguibili; siccome inoltre tali impronte, che probabilmente con altri nomi vennero pure indicate nei terreni eocenici, non vennero sinora riscontrate, per quanto io sappia, nei terreni miocenici, così credetti opportuno di accennarle in questa Nota.

---

(1) O. HEER, *Die Vorweltliche Flora der Schweiz* - Dritte Lieferung, Zürich, 1877.

Elminthopsis pedemontana Sacc.

(Fig. 1).

Frons fistulosa, canaliculata, 25-35 *millim. lata, longa, flexuosa, in canale mediano interdum filo parum erecto, rotundato, arcuato, interrupta. Canalis latitudo* 15 *millim. circiter; fila lateralia* 3-5 *millim. altitudine, superne fere plani.*

Questa specie, che per la sua enorme dimensione differisce assai da quelle descritte dall'Heer, s'avvicina però per la forma all'*Helminthopsis magna* Heer dei terreni giurassici di Ganei, quantunque non abbia potuto finora riscontrare in questa specie i forti contorcimenti a ferro di cavallo che presenta invece comunemente la forma giurassica.

Questa forma venne da me rinvenuta in numerosi esemplari specialmente lungo il sopraccennato rio di Garino, cioè in quelle arenarie a *Paleodictyon* che ripetutamente alternandosi colle marne fanno il passaggio tra il *Tortoniano* inferiore e l'*Elveziano* superiore; d'altronde accompagna quasi sempre il *Paleodictyon tectiforme.*

Riguardo alla natura degli organismi che diedero origine alle varie forme del genere *Helminthopsis*, la questione è forse ancora più ardua che riguardo ai *Paleodictyon;* Heer che istituì il genere lo pose fra le Alghe, ma altri contrastano molto tale classificazione. Dobbiamo tuttavia menzionare come alcune Alghe marine specialmente della famiglia delle Sifonee hanno un tallo che può presentarsi allargato, tubulare, cilindrico, talora incurvato ad S, ed inoltre che questo tubo cilindrico, membranoso ed anche ricco di incrostazioni calcaree, talora allungato oltre un metro, poggiato sulla sabbia del fondo marino, può benissimo lasciare delle impronte simili a quelle che furono appellate *Helminthopsis;* osserviamo infine che talora questo tallo allungato, come ad esempio nella *Vaucheria*, per la formazione delle zoospore talora dà luogo a dei tramezzi, come residui dei quali potrebbero forse interpretarsi quei leggeri rilievi arcuati che osservansi talora nel canale dell'*Helminthopsis pedemontana* Sacc., come si vede nell'esemplare che ho figurato.

Ad ogni modo io credo che questa spiegazione possa ancora presentare campo a dubbi, potendo forse tali impronte esser prodotte dallo strisciare di qualche animale marino sul fondo sabbioso, quantunque questa ipotesi mi sembri meno probabile della prima.

ELMINTHOIDA Schaph.

Questo genere venne istituito dal Schaphäutl (1) per impronte costituite da rilievi cilindrici, sottili, più volte ricurvati, che trovansi nei terreni eocenici e specialmente nel Flysch di molte regioni d'Europa; la diagnosi del genere è: « *Corpuscula funiculiformia, praelonga, cylindrica vel depressa, simplicia, multoties recurvatim inflexa, gyris parallelis, approximatis* ». Oltre alla specie descritta dal Schaphäutl, l'Heer ne indicò altre due (2) pure comunissime, specialmente l'*Elminthoida labyrinthica*, in quasi tutti i giacimenti di Flysch eocenico d'Europa. La specie che rinvenni nei terreni terziari del Piemonte oltre ad essere diversa da quelle finora descritte appartiene al Miocene medio e credo quindi opportuno pubblicarla.

Helminthoida miocenica Sacc.

(Fig. 2).

Corpuscula funiculiformia, cylindrica, praelonga, $^3/_4$-1 *mill. lata, regulariter flexuosa, simplicia, multoties recurvatim. Flexiones* 15-20 *millim. latitudine; inter flexiones spatium* 1-5 *mill. latum; fila* $^1/_2$-$^3/_4$ *mill. erecta.*

Ne rinvenni pochi esemplari nel rio Garino assieme ai *Paleodictyon* ed alle specie sopra descritte, come di solito nelle lastre arenacee passanti dall'*Elveziano* superiore al *Tortoniano* inferiore.

---

(1) Schaphäutl, *Geognostiche Untersuchungen des südbayerischen Alpengibirges.*

(2) O. Heer, *Die Urwelt der Schweiz.* Zürich, 1865. — *Die Worweltliche Flora der Schweiz* - Dritte Lieferung. Zürich, 1877.

Fra le specie di *Helminthoida* finora descritte questa presenta maggior somiglianza colla *H. crassa* SCHAPH. da cui si distingue sia per la mole generale molto minore, che per la maggior sottigliezza e minor elevazione dei funicoli che presentano delle circonvoluzioni assai meno ampie. Per certi caratteri la specie ora descritta si collega ad alcune forme di *Helminthopsis*, specialmente alla *H. labyrinthica* HEER, da cui si distingue, oltre che per la molto maggior gracilità dei funicoli, specialmente per le incurvature regolari, quasi parallele fra loro e molto approssimate.

Helminthoida labyrinthica HEER.

Trattando delle impronte del genere *Helminthoida* finora rinvenute in Piemonte, non posso tralasciare di accennare come numerosissimi esemplari della *Helminthoida labyrinthica* HEER siansi rinvenuti dal Dott. A. Portis (1), da me (2) e da altri, specialmente negli strati argillo-schistosi che, alternandosi con strati arenacei, costituiscono in massima parte il *Flysch* ed in piccola parte il *Macigno* (cioè specialmente l'Eocene superiore), dove esso si presenta sviluppato sia nelle Alpi Marittime che nell'Appennino Settentrionale, ciò che serve vieppiù a provare l'immensa estensione di questa bellissima forma caratteristica dell'Eocene.

Per ciò che riguarda l'origine delle impronte di questo genere non posso far altro che rimandare sia alle osservazioni fatte in proposito dall'Heer, che li credette dapprima resti di Vermi e poi di Alghe, sia a quelle sopra indicate per l'*Helminthopsis*, giacchè tra alcune forme di questi due generi sonvi analogie evidentissime.

---

(1) A. PORTIS, *I terreni stratificati di Argentera*. Mem. R. Acc. delle Scienze di Torino. Serie II, Vol. XXXIV, 1881.

(2) F. SACCO, *Massima elevazione dell'Eocene nelle Alpi occidentali italiane*. Boll. del Club Alpino Italiano, nº 52, 1885.

ZOOPHYCOS Massal.

Nel 1851 (1) il Massalongo istituiva il nome di *Zoophycos*, e poco dopo confermava tal nome (2) per certe impronte grandi spiralate che dapprima erano state attribuite al genere *Zonarites* e *Pterocarpus* dal Massalongo stesso, al genere *Fucoides* da Villa ed Unger, ed al genere *Gorgonia* dal Meneghini. Solo però nel 1855 il Massalongo (3) descriveva e figurava quattro specie di tale genere che diagnosticò in questi termini: « *Frondes simplices vel ramosae, lineares, fistulosae, creberrimae, radiantes vel spiraliter convolutae, segregatae seu liberae, vel coalitae, basi in stipitem crassum, cylindricum vel conicum vel subrotundum elevatum inaequale saepe infundibuliformem, congestae* ».

Parrebbe che dopo un tale lavoro monografico il genere *Zoophycos* avrebbe dovuto rimanere ben costituito, ma probabilmente per non esser giunti a conoscere le accennate memorie, lo Schimper istituisce per forme simili il nome di *Physophycus* ed *Alectorurus*, il Fischer-Ooster di *Taonurus*, l'Hall di *Spirophyton*, il Saporta di *Cancellophycus*, il Ludwig di *Buthrotrepis*, altri di *Doedalus*, di *Caulerpites*, ecc.; l'Heer ed ultimamente lo Schimper, nell'*Handbuch der Paleontologie* (Münch 1879), adottano il nome di *Taonurus*, mentre il Gastaldi, trattando di simili forme, loro conserva il nome di *Zoophycos* ed il Thiollière ed il Dumortier le pongono nel genere *Chondrites*. Ora, pur ammettendo che le diverse forme descritte da tali autori appartengano a generi diversi, per il che fare talora bisogna basarsi piuttosto sulle differenze di età che di forma, tuttavia è certo che di esse molte, specialmente quelle forme che furono incluse nei *Taonurus*, spettano assolutamente al genere *Zoophycos* e quindi tal nome, ben costituito e con diagnosi e con disegni sin dal 1855, deve avere senza dubbio la prevalenza sopra ogni altro pubblicato in seguito.

---

(1) A. Massalongo, *Osservazioni sulle piante fossili dei terreni terziari del Vicentino*. Pavia, 1851.

(2) Id., *Conspectus Florae tertiariae primeae*, 1852.

(3) Id., *Zoophycos - Novum genus plantarum fossilium*. Verona, 1855.

Zoophycos Gastaldii Sacc. (Miocene).

Zoophycos sp. - B. Gastaldi - *Intorno ad alcuni fossili del Piemonte e della Toscana*, Mem. R. Acc. Sc. di Torino, Serie II, Tomo XXIV, Tav. VI, fig. 8, 1866.

Frons expansa, flabelliformis, aliquantulum spiraliter contorta, infundibuliformis. Costae subrotundatae, crassae, radiantes, arcuatim convolutae, ad peripheriam praecipue, inter se profundo canale disjunctae. Frondis peripheria costarum margines subrotundati, inter costis praeminentibus saepe quatuor minores.

Lat. praeter 80 *centim.*

Questa grandissima specie, che si presenta nel suo assieme avvolta sopra se stessa come un cartoccio, è molto comune in certe località delle colline di Torino, specialmente in Val Ceppi presso Tetti Toni, in marne grigiastre che molto probabilmente fanno il passaggio tra il *Tortoniano* e l'*Elveziano*, per quanto almeno ho potuto osservare in una breve escursione.

Il Gastaldi parla inoltre di esemplari di *Zoophycos* trovati nel territorio di Brozolo, nelle colline Torino-Valenza, pure in marne mioceniche.

Noto che la figura data dal Gastaldi nel suo lavoro farebbe apparire il *Zoophycos* in questione come molto appiattito, mentre in realtà si presenta generalmente imbutiforme con un' altezza di 30 e più centimetri.

Dedico questa specie al compianto geologo e paleontologo Bartolomeo Gastaldi che pel primo attirò l'attenzione sui *Zoophycos* del Piemonte.

Zoophycos Gastaldii Sacc.
var. *pliocenica* Sacc. (Pliocene).

Distinguunt hanc varietatem a specie tipica sequentes notae: Frons depressior; costae numero minores, magis crassae.

In recenti escursioni presso il paese di Govone d'Alba e precisamente alla base di enormi spaccati naturali, detti rocche

dei Perosini, sulla sinistra del fiume Tanaro, incontrai diversi esemplari abbastanza ben conservati di *Zoophycos* che per l'assieme dei caratteri credo si possano ancora includere nella specie ora descritta facendone solo una varietà per ciò che è indicato nella diagnosi.

Come di solito gli esemplari trovavansi quasi sempre riuniti molti assieme, ciò che ci prova come questi organismi, dove trovavano condizioni adatte alla loro vita, formavano quasi direi delle foreste sul fondo marino.

Negli esemplari meglio conservati, che raggiungono persino 80 centim. di diametro, le coste assai lunghe, leggermente convesse, che sembrano quasi sovrapporsi l'una all'altra, in numero di 27 o 28 per giro (mentre in quello miocenico figurato dal Gastaldi se ne contano circa 50), si presentano ora quasi diritte, ora, e più sovente, leggermente incurvate nel loro percorso e tutte nella stessa direzione, ed ora invece dopo una leggera curva in un senso, verso la periferia si rivolgono alquanto in senso opposto. Tutte le coste nel loro percorso presentano nettamente una specie di nervatura costituita di numerosissime costicine più o meno regolari, fra loro quasi parallele e che partendo da un lato della costa si dirigono, leggermente incurvandosi, verso il lato opposto, e ciò sempre con egual direzione per tutte le coste dell'intiera fronda: queste nervature divengono sempre più fortemente incurvate verso la periferia, finchè vengono a costituire il giro marginale di ciascuna costa.

Il solco intercostale, della larghezza di 3 a 4 mill., si conserva quasi inalterato di forma sino al margine della fronda. Varia molto la forma e la larghezza di ciascuna costa, alcune oltrepassando persino i 6 centim. di diametro nella parte loro terminale.

Mentre la parte maggiore della fronda è piuttosto schiacciata, lo stipite si presenta assai elevato; per l'accartocciarsi del fossile s'osserva, presso il margine, una distanza di circa 6 centim. tra un giro e l'altro della fronda.

In conclusione le due forme di *Zoophycos* ora esaminate appartengono perfettamente allo stesso tipo, giacchè non dobbiamo dare troppa importanza a differenze secondarie che presentano i vari esemplari e che spesso dipendono solo dall'età, dal modo di fossilizzazione, dal giro di fronda che si studia, dall'osservare l'impronta interna od esterna del fossile, ecc.

Il fatto importante per la varietà ora descritta si è che la trovai in terreni pliocenici, e precisamente negli strati marno-sabbiosi bleuastri che costituiscono il passaggio tra il *Piacentino* e l'*Astiano*, mentre finora questo genere si credeva estinto col *Miocene* medio, ciò che mi fa supporre, pensando che la famiglia dei *Zoophycos* si è già iniziata coll'*Alectorurus* sin dal *Siluriano* ed ha quindi resistito a tante vicende, che forse si troveranno ancora nei mari attuali i rappresentanti delle ora studiate forme fossili, quando meglio si conoscerà l'Algologia delle regioni tropicali.

Zoophycos sp. (Miocene).

Nello studio delle Langhe soventissimo mi imbattei in orizzonti marnosi a *Zoophycos*, rappresentati da forme molto grandi, talora di 1 metro di diametro, a fronda spiralata, simili alquanto allo *Zoophycos Gastaldii*.

Le località dove queste impronte trovansi più comunemente sono la base degli stupendi spaccati naturali di Cigliè e specialmente di Rocca Cigliè presso il Tanaro, le Rocche Zampone, la valle del rio Bandito che sbocca sulla destra del Tanaro, il rio di Brillada ed altre località più a Nord-Est della regione collinosa delle Langhe.

L'orizzonte geologico in cui si trovano tali *Zoophycos* non è sempre identico, ma per lo più essi sono comuni nelle marne che, alternandosi con banchi arenacei, costituiscono il passaggio dal *Tortoniano* inferiore all'*Elveziano* e nell'*Elveziano* superiore.

Per mancanza di esemplari completi non posso specificare queste forme, d'altronde abbastanza simili a quelle sovraccennate del Miocene della collina torinese: solo possiamo notare che i *Zoophycos* delle Langhe concordano abbastanza bene, oltre che per la forma, anche per l'orizzonte geologico, con quelli dei colli torinesi; ciò mi fa supporre che sulla fine del periodo *elveziano* siansi verificate nel mare occupante la valle padana condizioni tali, probabilissimamente di poca profondità, che poterono dar luogo ad un grande sviluppo di *Zoophycos*, alghe viventi con tutta probabilità nei bassi fondi marini a non grande distanza dalla spiaggia.

Zoophycos funiculatus Sacc. (Oligocene).

Zoophycos sp. - B. Gastaldi - *Intorno ad alcuni fossili del Piemonte e della Toscana*, Mem. R. Acc. Sc. di Torino, Serie II, Tomo XXIV, Tav. VI, fig. 9, 1866.

Frons expansa, flabelliformis, spiraliter contorta, striolata, infundibuliformis. Costae subrotundatae crassissimae, radiantes et arcuatim convolutae, superficie laeviter ondulato-striolatae. Inter costis funiculum eminens, ad stipitem incrassatum, marginem versus evanescens.

Lat. praeter 30 *centim.*

Questa bella specie ventagliforme venne trovata in marne grigio-giallastre dei dintorni di Dego, nell'Appennino settentrionale, probabilmente in terreni *tongriani;* è notevole oltre che per la forma generale, per la grossezza delle coste assai rigonfie, specialmente ad una certa distanza dallo stipite centrale, e divise le une dalle altre da un solco abbastanza profondo (più profondo a qualche distanza dallo stipite), in cui corre un funicolo assai rilevato che si va poco a poco impicciolendo ed abbassando man mano che dal centro si porta verso la periferia della fronda; inoltre le coste, che sembrano quasi accasciarsi l'una sull'altra, presentano delle ondulature abbastanza regolari in una certa direzione, similmente cioè alle impronte che lascierebbe una metà di qualche foglia penninervia, ciò che d'altronde già si è accennato pel *Z. Gastaldii.*

Noto infine che il fossile in esame, di cui esistono finora solo due esemplari conservati nella collezione paleontologica di Torino, si presenta sotto forma di una specie di incamiciatura marnosa della potenza di circa 3 mill. avvolgente un corpo discoidale leggermente imbutiforme costituito dell'identica marna e che porta anch'esso la controimpronta dell'intiero fossile.

Zoophycos sp. (Eocene).

In alcune escursioni fatte per visitare i calcari di Gassino nella collina torinese ebbi occasione di rinvenire nelle marne grigio-giallastre, alternate coi calcari, sia nelle vicinanze delle cave che presso Villa Donaudi coll'orizzonte a Terebratule, numerose impronte di *Zoophycos* della grandezza talora di oltre 60 centim. largamente e profondamente imbutiformi, a fronda spiralata, ondulata, irregolarmente costulata.

Gli esemplari osservati non presentano caratteri sufficienti per una determinazione specifica e quindi mi limito per ora a constatare la presenza di questo genere nelle marne eoceniche di Gassino, marne che già indicate come nummulitiche dal Collegno vennero poi poste nel Miocene inferiore dal Fuchs e nel *Tongriano* superiore dal Mayer, mentre che le varie specie di Nummuliti, la *Serpula spirulaea* ed altri fossili che vi si trovano indicano piuttosto doversi porre questi terreni marnoso-calcarei di Gassino nel piano *Bartoniano*, cioe nel vero Eocene.

Da quello che venne esposto finora risulterebbe qüindi che il gruppo delle Alghe a cui appartenne il *Zoophycos*, gruppo appellato delle *Alectoruridee* ed ora spento, se pure ulteriori ricerche in regioni inesplorate non smentiranno questa asserzione, avrebbe, secondo i recenti studi, il seguente sviluppo nelle varie epoche geologiche:

PLIOCENE	*Zoophycos Gastaldii* SACC. var. *pliocenica* SACC. (*Piacentino* sup. presso Govone d'Alba).
MIOCENE	» *Gastaldii* SACC. (Val Ceppi, colli torinesi)
	» » sp. (*Tortoniano* inferiore ed. *Elveziano* delle Langhe).
	» » (Brozolo, colli torinesi).
	» *Scarabellii* MASSAL. (Bologna).
OLIGOCENE	» *funiculatus* SACC. (Dego).
EOCENE . .	*Zoophycos Caput Medusae* MASSAL. (Monte Bolca).
	» Sp. (Macigno schistoso di Pracchia).
	» Sp. (Marne grigio-giallastre di Gassino - Bartoniano).
	» cf. *Villae* MASSAL. (Calcare alberese di Grigliano, alta valle del Tevere).
	» cf. *Villae* MASSAL. (Calcare schistoso-argilloso di S. Anna presso Pistoia).
	» *flabelliformis* FISCHER-OOSTER (Flysch. della Svizzera).
CRETACEO	» *Targionii* SAVI e MENEGH. (Pietraforte di Toscana).
	» *Villae* MASSAL. (Brianza).
	» *Brianteus* MASSAL. (Brianza).
	» *tenuestriatus* HEER (Cretaceo superiore della Svizzera).
GIURA . . .	*Cancellophycus* SAP.
LIAS	*Cancellophycus* SAP.
	Physophycus SCH.
CARBONIFERO	*Lophoctenium* RICHT.
DEVONIANO	*Spirophyton* HALL
	Lophoctenium RICHT.
SILURIANO.	*Alectorurus* SCH.

Forse alcuna delle specie qui poste nei *Zoophycos* dovranno esserne tolte con uno studio più dettagliato di esse, come pure l'orizzonte geologico di alcune è ancora alquanto incerto; ma

ad ogni modo è importante l'osservare il grande sviluppo di questa curiosa famiglia le cui forme paiono generalmente abbastanza caratteristiche degli orizzonti a *facies* littorale o di mare poco profondo che sovente fanno il passaggio tra due piani geologici diversi.

Notiamo infine che molti paleontologi, come il Nathorst ed altri, sono contrari al collocamento dei *Zoophycos* fra le Alghe; tuttavia l'osservare come diverse alghe marine presentano un tallo allargato, semplice o con nervature, assai resistente, eretto sopra uno stipite centrale, talvolta contorto od anche accartocciato, mi indurrebbe invece ad abbracciare l'ipotesi prima emessa riguardo alla origine vegetale di queste forme.

Oltre alle impronte descritte in questa Nota, trovansi nei terreni eocenici piemontesi, sia delle Alpi Marittime, che dell'Appennino settentrionale e dei colli Casalborgone-Valenza, numerose impronte assai svariate di *Fucoides*, *Chondrites*, *Cylindrites*, ecc., già menzionate da altri autori e che quindi, non offrendo più interesse, tralascio di indicare.

Noto per ultimo come assieme alle impronte di *Paleodictyon* nei terreni elveziani superiori delle Langhe abbia soventissimo incontrato delle lastre d'arenaria che presentavano sparsi regolarmente alla loro superficie dei rialzi della grossezza di 6 o 7 millim., per un'altezza di 5 o 6 millim., regolarmente rotondeggianti, che credetti dapprima controimpronte delle lastre a *Paleodictyon*, ma che per non avere distinta forma esagonale, sembrammi doversi attribuire ad altre cause. Ad ogni modo presento il disegno di una di queste lastre, che aveva la larghezza di oltre 40 centim., sperando che nuove ricerche portino luce in riguardo o che altri, più di me competente in questi difficili studi, possa sciogliere il problema della loro origine.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — *Helminthopsis pedemontana* Sacc. (Elveziano delle Langhe).

» 2. — *Helminthoida miocenica* Sacc. (Elveziano delle Langhe).

» 3. — *Paleodictyon regulare* Sacc. (Tongriano del Tortonese).

» 4. — » *miocenicum* Sacc. (Tortoniano passante ad Elveziano nelle Langhe).

» 5. — » *tectiforme* Sacc. (Elveziano delle Langhe).

» 6. — » » » »

» 7. — » » » »

» 8. — » » » »

» 9. — » *maximum* Sacc. (Elveziano delle Langhe).

» 10. — Lastra arenacea a rialzi (Elveziano delle Langhe).

Il Direttore della Classe
Alfonso Cossa.

Lit Doyen Tonno

INDICE

DEL VOLUME XXI

ELENCO degli Accademici ..... *Pag.* 3

ERRATA-CORRIGE ..... » 217

SUNTI degli Atti verbali delle adunanze tenute dalla Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali ..... » 33
89, 91, 116, 161, 182, 221, 234, 271, 293, 357, 361, 417, 433.

BASSO (Giuseppe) — Relazione pel IV Premio BRESSA ..... » 151

—— Commemorazione di Giulio JAMIN ..... » 236

—— Sulla legge di ripartizione dell'intensità luminosa fra i raggi birifratti da lamine cristalline ..... » 398

BATTELLI (Angelo) — Intorno all'influenza della magnetizzazione sopra la conducibilità termica del ferro ..... » 559

—— V. NACCARI.

BELLARDI (Luigi) — Relazione sulla Memoria del signor Marchese A. DE-GREGORIO, intitolata: *Fossili di Monte Erice di Sicilia del piano Alpiniano* DE-GREG. ..... » 163

BIZZOZERO (Giulio) — Relazione sulla Memoria del Dott. PIERO GIACOSA: *Su di un ricettario del secolo* XI *esistente nell'Archivio capitolare d'Ivrea* ..... » 223

BRUNO (Giuseppe) — Sopra un punto della teoria delle frazioni continue » 177

—— Relazione sopra un lavoro del Dott. Corrado SEGRE, intitolato: *Le coppie di elementi imaginari della geometria proiettiva sintetica* ..... » 357

CATTANI (Giuseppina) — Sull'apparecchio di sostegno della mielina nelle fibre nervose midollari periferiche ..... » 365

CHARRIER (Angelo) — Effemeridi del Sole, della Luna e dei principali Pianeti, calcolate per Torino in tempo medio civile di Roma per l'anno 1887 ..... » 485

CURIONI (G.) — Relazione sulla Memoria del sig. Ing. Camillo GUIDI: *Sulle curve delle pressioni negli archi e nelle volte* ..... » 146

Di Mattei (Eugenio) — Contributo allo studio della patologia del rene. — Ricerche sperimentali ..... *Pag.* 681

Discalzo (G.) — V. Mazzara (G.).

Dorna (Alessandro) — Breve notizia delle Osservazioni astronomiche e geodetiche eseguite nel 1885 all'Osservatorio della R. Università di Torino, nel Palazzo Madama, per iniziativa ed a spese della Commissione del Grado ..... » 36

—— Lavori dell'Osservatorio astronomico di Torino ..... » 60, 215

—— Sulla mira meridiana dell'Osservatorio di Torino a Cavoretto e formola per dedurne la posizione dalla sua altezza e dalle costanti dello strumento dei passaggi ..... » 92
283, 339.

—— Nozioni intorno all'equatoriale con refrattore Merz di 30 centimetri di apertura e metri 4 $^1/_2$ di distanza focale ..... » 208
225, 247, 458.

Errera (Giorgio) — Sulle monocloropropilbenzine e sul metilbenzilcarbinol ..... » 612

Fileti (M.) — Ricerche sull'ortoisopropilfenol ..... » 297

Genocchi (Angelo) — Breve commemorazione dell'Ingegnere Savino Realis ..... » 361

Golgi (Camillo) e Monti (Achille) — Sulla storia naturale e sul significato clinico-patologico delle così dette anguillule intestinali » 55

Guareschi (Icilio) — Nuove ricerche sulla naftalina ..... » 133

—— Sulla γ dicloronaftalina e l'acido ortomonocloroftalico ..... » 184

Jadanza (Nicodemo) — Nuovo metodo per accorciare i cannocchiali terrestri ..... » 118

—— Sul calcolo della distanza di due punti, le cui posizioni geografiche sono note ..... » 319

Lessona (Michele) — Relazione sulla Memoria del Prof. B. Grassi, intitolata: *I progenitori degli insetti e dei miriapodi. — Morfologia delle Scolopendrelle* ..... » 48

—— Breve commemorazione di Edoardo Rüppel ..... » 170

—— Nota intorno al valore specifico della *Rana agilis* Thomas . . » 192

—— Relazione sulla Memoria del sig. Carlo Pollonera, intitolata: *Molluschi fossili post-pliocenici del contorno di Torino* ..... » 295

Loria (Gino) — Rappresentazione su un piano delle congruenze (2, 6), e (2, 7) ..... » 419

Mattirolo (Ettore) — Sulla natrolite di Montecatini (Val di Cecina) . . » 608

Mattirolo (Oreste) — Sullo sviluppo di due nuovi Hypocreacei e sulle spore-bulbilli degli Ascomiceti ..... » 273

Mazzara (G.) — Trasformazione del timol in carvacrol ..... » 238

—— e Discalzo (G.) — Bromoderivati del timol, del timochinone e dell'ossitimol ..... » 244

MOINE (F.) — Azione degli acidi bibasici organici e delle loro anidridi sui senfòle e sulla tiosinnamina ..... *Pag.* 598

MONTI (Achille) — V. GOLGI (Camillo).

MORERA (Giacinto) — Sulla rappresentazione delle funzioni di una variabile complessa per mezzo di espressioni analitiche infinite » 652

MOSSO (Ugolino) — Sull'azione delle sostanze che per mezzo del sistema nervoso aumentano o diminuiscono la temperatura animale ..... » 381

NACCARI (A.) e BATTELLI (Angelo) — Sul fenomeno Peltier nei liquidi. — Nota terza ..... » 581

NOVARESE (E.) — Di una analogia fra la teorica della velocità e la teorica delle forze ..... » 660

PADOVA (Ernesto) — Sul moto di rotazione di un corpo rigido ..... » 38

PAGLIANI (S.) — Sulle forze elettromotrici di contatto fra liquidi ... » 518

PEANO (Giuseppe) — Sull'integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine ..... » 437

PIOLTI (G.) — Sopra una pseudomorfosi ..... » 677

PORRO (Francesco) — Osservazioni delle comete Fabry, Barnard e Brooks (1ª 1886) fatte all'equatoriale di Merz dell'Osservatorio di Torino ..... » 510

ROTONDI (E.) — Sull'invertimento spontaneo del saccaroso, e sull'analisi dei prodotti industriali preparati con zucchero di canna e di fecola ..... » 476

SACCO (Federico) — Intorno ad alcune impronte organiche dei terreni terziari del Piemonte ..... » 687

SEGRE (Corrado) — Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani ..... » 95

—— Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine ..... » 628

SIACCI (F.) — Sulla rotazione di un corpo intorno a un punto ..... » 165

SPEZIA (G.) — Sulla flessibilità dell'Itacolumite ..... » 51

—— Sull'influenza della pressione nella formazione dell'anidrite .. » 672

VIRGILIO (Francesco) — Di un antico lago glaciale presso Cogne in valle d'Aosta ..... » 195

ZANOTTI-BIANCO (Ottavio) — Sull'esagramma di Pascal. – Nota storica » 446

New York Botanical Garden Library
3 5185 00297 4804